Analyse en spectres de puissance

B. Revenu

22 août 2001

1 Formules générales

Polynômes de Legendre :

$$P_\ell(\cos\theta) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\,\frac{d^\ell}{d\cos^\ell\theta}\left(1-\cos^2\theta\right)^\ell$$

Polynômes de Legendre associés :

$$\begin{array}{rcl}
P_\ell^m(\cos\theta) & = & (-1)^m\left(1-\cos^2\theta\right)^{m/2}\,\dfrac{d^m}{d\cos^m\theta}P_\ell(\cos\theta)\\
P_\ell^{-m}(\cos\theta) & = & (-1)^m\,\dfrac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\,P_\ell^m(\cos\theta)\\
P_m^m(\cos\theta) & = & (-1)^m\ (2m-1)!!\ (1-\cos^2\theta)^{m/2} = (-1)^m\ (2m-1)!!\ \sin^m\theta\\
P_{m+1}^m(\cos\theta) & = & (2m+1)\ \cos\theta\ P_m^m(\cos\theta)\\
P_\ell^m(-\cos\theta) & = & (-1)^{\ell+m}\ P_\ell^m(\cos\theta)
\end{array}$$

Relation de récurrence :

$$P_\ell^m = \frac{2\ell-1}{\ell-m}\cos\theta\,P_{\ell-1}^m - \frac{\ell+m-1}{\ell-m}\,P_{\ell-2}^m$$

Définition des λ_ℓ^m :

$$\begin{array}{rcl}
\lambda_\ell^m & = & \sqrt{\dfrac{2\ell+1}{4\pi}}\sqrt{\dfrac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\ \ P_\ell^m\\
\lambda_\ell^{-m} & = & (-1)^m\ \lambda_\ell^m\\
\lambda_\ell^m(-\cos\theta) & = & (-1)^{\ell+m}\ \lambda_\ell^m(\cos\theta)
\end{array}$$

Relation de récurrence :

$$\lambda_\ell^m = \sqrt{\frac{4\ell^2-1}{\ell^2-m^2}}\left(\cos\theta\,\lambda_{\ell-1}^m - \sqrt{\frac{(\ell+m-1)(\ell-m-1)}{(2\ell-3)(2\ell-1)}}\,\lambda_{\ell-2}^m\right)$$

Harmoniques sphériques scalaires :

$$\begin{array}{rcl}
Y_\ell^m(\theta,\phi) & = & \sqrt{\dfrac{2\ell+1}{4\pi}}\sqrt{\dfrac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\ P_\ell^m(\cos\theta)\ e^{im\phi}\\
 & = & \lambda_\ell^m(\cos\theta)\ e^{im\phi}
\end{array}$$

Harmoniques sphériques tensorielles et propriétés :

$$\begin{aligned}
{}_sY_\ell^m(\theta,\phi) &= (-1)^{\ell-m}\sqrt{\frac{(\ell+m)!\ (\ell-m)!\ (2\ell+1)}{(\ell+s)!\ (\ell-s)!\ 4\pi}}\ \sin^{2\ell}\frac{\theta}{2} \\
&\quad \times \sum_r C_r^{\ell-s}\ C_{r+s-m}^{\ell+s}\ \frac{(-1)^{r+s-m}}{\tan^{2r+s-m}\frac{\theta}{2}}\ e^{im\phi} \\
\text{avec}\ \ C_n^p &= \frac{n!}{p!\ (n-p)!} \\
{}_sY_\ell^{m*} &= (-1)^{s+m}\ {}_{-s}Y_\ell^m \\
\sum_{\ell,m} {}_sY_\ell^{m*}(\theta,\phi)\ {}_sY_\ell^m(\theta',\phi') &= \delta(\phi-\phi')\ \delta(\cos\theta-\cos\theta') \\
\int \sin\theta\ d\theta\ d\phi\ {}_sY_\ell^m(\theta,\phi)\ {}_sY_{\ell'}^{m'*}(\theta,\phi) &= \delta_{\ell,\ell'}\ \delta_{m,m'}
\end{aligned}$$

Opérateurs de dérivation pour les ${}_sY_\ell^m$:

$$\begin{aligned}
\eth &= -\sin^s\theta\ \left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\frac{1}{\sin^s\theta} \\
\bar{\eth} &= -\frac{1}{\sin^s\theta}\ \left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\sin^s\theta \\
\bar{\eth}\,\eth\ -\eth\,\bar{\eth} &= 2s \\
\eth\ {}_sY_\ell^m &= \sqrt{(\ell-s)(\ell+s+1)}\ {}_{s+1}Y_\ell^m \\
\bar{\eth}\ {}_sY_\ell^m &= -\sqrt{(\ell+s)(\ell-s+1)}\ {}_{s-1}Y_\ell^m \\
\bar{\eth}\,\eth\ {}_sY_\ell^m &= -(\ell-s)(\ell+s+1)\ {}_sY_\ell^m
\end{aligned}$$

Expression des ${}_sY_\ell^m$ en fonction des Y_ℓ^m :

$$\begin{aligned}
{}_sY_\ell^m(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{(\ell-s)!}{(\ell+s)!}}\,\eth^{\ s}\ Y_\ell^m(\theta,\phi),\ \text{si}\ \ 0\leqslant\ s\leqslant\ \ell \\
&= \sqrt{\frac{(\ell+s)!}{(\ell-s)!}}(-1)^s\ \bar{\eth}^{\ -s}\ \ Y_\ell^m(\theta,\phi),\ \text{si}\ \ -\ell\ \leqslant\ s\leqslant\ 0
\end{aligned}$$

2 Application à la physique

Décomposition des champs réels sur les Y_ℓ^m :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{n}}) &= \sum_{\ell m} a_{\ell m}^T\ Y_\ell^m(\hat{\boldsymbol{n}}) \\
E(\hat{\boldsymbol{n}}) &= \sum_{\ell m} a_{\ell m}^E\ Y_\ell^m(\hat{\boldsymbol{n}}) \\
B(\hat{\boldsymbol{n}}) &= \sum_{\ell m} a_{\ell m}^B\ Y_\ell^m(\hat{\boldsymbol{n}}) \\
\text{avec}\ a_{\ell m}^E &= -\ \frac{a_{2\ell m}+a_{-2\ell m}}{2}\quad \text{et}\ \ a_{\ell m}^B = i\ \frac{a_{2\ell m}-a_{-2\ell m}}{2}
\end{aligned}$$

On peut définir les spectres de puissance :

$$\begin{aligned}
C_\ell^T &= \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=0}^{+\infty} \left|a_{\ell m}^T\right|^2 = \left\langle \left|a_{\ell m}^T\right|^2 \right\rangle \\
C_\ell^E &= \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=0}^{+\infty} \left|a_{\ell m}^E\right|^2 = \left\langle \left|a_{\ell m}^E\right|^2 \right\rangle \\
C_\ell^B &= \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=0}^{+\infty} \left|a_{\ell m}^B\right|^2 = \left\langle \left|a_{\ell m}^B\right|^2 \right\rangle
\end{aligned}$$

On a de plus

$$a_{\ell m}^{X\ *} = (-1)^m \ a_{\ell -m}^X \quad \text{avec } X \in \{T, E, B\}$$

et

$$\begin{aligned}
a_{2\ell m}{}^* &= (-1)^m \ a_{-2\ell -m} \\
a_{-2\ell m}{}^* &= (-1)^m \ a_{2\ell -m}
\end{aligned}$$

Pour les paramètres de Stokes :

$$\begin{aligned}
Q &= T_0 \sum_{\ell m} N_\ell \left(a_{\ell m}^G W_{\ell m} - a_{\ell m}^C X_{\ell m}\right) \\
U &= -T_0 \sum_{\ell m} N_\ell \left(a_{\ell m}^G X_{\ell m} + a_{\ell m}^C W_{\ell m}\right)
\end{aligned}$$

avec

$$N_\ell = \sqrt{\frac{2(\ell-2)!}{(\ell+2)!}}$$

Quantités de spin 2, qui ne sont pas invariantes par rotation :

$$\begin{aligned}
Q \pm iU &= \sum_{\ell m} a_{\pm 2\ell m} \ {}_{\pm 2}Y_\ell^m \\
Q + iU &= T_0 \sum_{\ell m} N_\ell \left(\left(a_{\ell m}^G - i a_{\ell m}^C\right) W_{\ell m} - \left(a_{\ell m}^C + i a_{\ell m}^G\right) X_{\ell m}\right) \\
Q - iU &= T_0 \sum_{\ell m} N_\ell \left(\left(a_{\ell m}^G + i a_{\ell m}^C\right) W_{\ell m} - \left(a_{\ell m}^C - i a_{\ell m}^G\right) X_{\ell m}\right)
\end{aligned}$$

On identifie pour obtenir :

$$\begin{aligned}
{}_2Y_\ell^m &= -\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \ (W_{\ell m} - i X_{\ell m}) \\
{}_{-2}Y_\ell^m &= -\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \ (W_{\ell m} + i X_{\ell m}) \\
W_{\ell m} &= -\sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \ \left(\frac{{}_2Y_\ell^m +_{-2} Y_\ell^m}{2}\right) \\
X_{\ell m} &= -i\sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \ \left(\frac{{}_2Y_\ell^m -_{-2} Y_\ell^m}{2}\right)
\end{aligned}$$

pour les fonctions de base et :

$$\begin{aligned}
a_{2\ell m} &= -T_0\sqrt{2} \ \left(a_{\ell m}^G - i a_{\ell m}^C\right) \\
a_{-2\ell m} &= -T_0\sqrt{2} \ \left(a_{\ell m}^G + i a_{\ell m}^C\right) \\
a_{\ell m}^E &= T_0\sqrt{2} \ a_{\ell m}^G \\
a_{\ell m}^B &= -T_0\sqrt{2} \ a_{\ell m}^C
\end{aligned}$$

pour les coefficients des développements. Pour ce qui est des expressions analytiques des $X_{\ell m}$, $W_{\ell m}$, ${}_2Y_\ell^m$ et ${}_{-2}Y_\ell^m$, on introduit d'abord deux fonctions $G^+_{\ell m}$ et $G^-_{\ell m}$:

$$
\begin{aligned}
G^+_{\ell m} &= -\left(\frac{\ell - m^2}{\sin^2\theta} + \frac{\ell(\ell-1)}{2}\right) P_\ell^m + (\ell+m)\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\, P_{\ell-1}^m \\
G^-_{\ell m} &= \frac{m}{\sin^2\theta}\left((\ell-1)\cos\theta\, P_\ell^m - (\ell+m)\, P_{\ell-1}^m\right)
\end{aligned}
$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
W_{\ell m} &= -2\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, G^+_{\ell m}\, e^{im\phi} \\
iX_{\ell m} &= -2\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, G^-_{\ell m}\, e^{im\phi}
\end{aligned}
$$

Ce qui nous permet d'en déduire :

$$
\begin{aligned}
{}_2Y_\ell^m &= 2\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}}\sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\left(G^+_{\ell m} - G^-_{\ell m}\right) e^{im\phi} \\
{}_{-2}Y_\ell^m &= 2\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}}\sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\left(G^+_{\ell m} + G^-_{\ell m}\right) e^{im\phi}
\end{aligned}
$$

soit

$$
\begin{aligned}
{}_2Y_\ell^m = 2\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}}\sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\Bigg(-\left(\frac{\ell-m^2}{\sin^2\theta} + \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \frac{m(\ell-1)\cos\theta}{\sin^2\theta}\right) P_\ell^m \\
+(\ell+m)\frac{\cos\theta + m}{\sin^2\theta}\, P_{\ell-1}^m\Bigg)\; e^{im\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{-2}Y_\ell^m = 2\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}}\sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\Bigg(-\left(\frac{\ell-m^2}{\sin^2\theta} + \frac{\ell(\ell-1)}{2} - \frac{m(\ell-1)\cos\theta}{\sin^2\theta}\right) P_\ell^m \\
+(\ell+m)\frac{\cos\theta - m}{\sin^2\theta}\, P_{\ell-1}^m\Bigg)\; e^{im\phi}
\end{aligned}
$$

ou encore, en fonction des λ_ℓ^m :

$$
\begin{aligned}
{}_2Y_\ell^m = 2\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}}\Bigg(-\left(\frac{\ell-m^2}{\sin^2\theta} + \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \frac{m(\ell-1)\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)\; \lambda_\ell^m \\
+\sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell-1}}\sqrt{\frac{\ell-m}{\ell+m}}\;\frac{(\ell+m)(\cos\theta+m)}{\sin^2\theta}\lambda_{\ell-1}^m\Bigg)\; e^{im\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{-2}Y_\ell^m = 2\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}}\Bigg(-\left(\frac{\ell-m^2}{\sin^2\theta} + \frac{\ell(\ell-1)}{2} - \frac{m(\ell-1)\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)\; \lambda_\ell^m \\
+\sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell-1}}\sqrt{\frac{\ell-m}{\ell+m}}\frac{(\ell+m)(\cos\theta-m)}{\sin^2\theta}\lambda_{\ell-1}^m\Bigg)\; e^{im\phi}
\end{aligned}
$$

Cas particuliers où $\ell = m$:

$$\begin{aligned}
W_{\ell m} &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right) Y_\ell^m \qquad (1)\\
X_{\ell m} &= \frac{2im}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) Y_\ell^m \\
\text{soit, pour } \ell = m,\quad W_{mm} &= -m(m-1)\left(\frac{2}{\sin^2\theta} - 1\right)\sqrt{\frac{2m+1}{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{(2m)!}}\, P_m^m\, e^{im\phi} \\
X_{mm} &= 2im\sqrt{\frac{2m+1}{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{(2m)!}}\frac{(m-1)\cos\theta}{\sin^2\theta}\, P_m^m\, e^{im\phi} \\
\text{ou encore, en fonction des } \lambda_m^m,\quad W_{mm} &= -m(m-1)\left(\frac{2}{\sin^2\theta} - 1\right)\lambda_m^m\, e^{im\phi} \\
X_{mm} &= 2i\,\frac{m(m-1)\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\lambda_m^m\, e^{im\phi}
\end{aligned}$$

Ce qui donne pour les ${}_{\pm 2}Y_m^m$:

$$\begin{aligned}
{}_2Y_m^m &= \sqrt{\frac{(m-1)m}{(m+1)(m+2)}}\left(\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\theta} - 1\right)\lambda_m^m\, e^{im\phi} \\
{}_{-2}Y_m^m &= \sqrt{\frac{(m-1)m}{(m+1)(m+2)}}\left(\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\theta} - 1\right)\lambda_m^m\, e^{im\phi}
\end{aligned}$$

Si on note $f_{\ell m}^{\pm}(\cos\theta)$ les dépendances en θ des ${}_{\pm 2}Y_\ell^m$, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
f_{\ell m}^{\pm}(\pm\cos\theta) &= (-1)^{\ell+m}\, f_{\ell m}^{\mp}(\pm\cos\theta) \\
f_{\ell -m}^{\pm}(\pm\cos\theta) &= (-1)^{m}\, f_{\ell m}^{\mp}(\pm\cos\theta)
\end{aligned}$$

3 Cartes

3.1 Généralités

On part de la décomposition des champs suivants sur la sphère :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{n}}) &= \sum_{\ell m} a_{\ell m}^T\, Y_\ell^m(\hat{\boldsymbol{n}}) \\
(Q \pm iU)(\hat{\boldsymbol{n}}) &= \sum_{\ell m} a_{\pm 2\ell m}\, {}_{\pm 2}Y_\ell^m(\hat{\boldsymbol{n}})
\end{aligned}$$

Les fonctions Y_ℓ^m et ${}_{\pm 2}Y_\ell^m$ sont orthonormales. On peut donc calculer les coefficients :

$$\begin{aligned}
a_{\ell m}^T &= \int \frac{\Delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{n}})\, Y_\ell^{m*}(\hat{\boldsymbol{n}})\, d\hat{\boldsymbol{n}} \\
a_{\pm 2\ell m} &= \int (Q \pm iU)(\hat{\boldsymbol{n}})\, {}_{\pm 2}Y_\ell^{m*}(\hat{\boldsymbol{n}})\, d\hat{\boldsymbol{n}}
\end{aligned}$$

Remarque :

$$\sum_{\ell m} = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \equiv \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{\ell=|m|}^{+\infty}$$

Cette nouvelle écriture de la somme nous sera utile dans la suite pour faire apparaître des FFT.

3.2 Cas de la température

3.2.1 Synthèse d'une carte

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{n}}) &= \sum_{\ell m} a_{\ell m}^T \, Y_\ell^m(\hat{\boldsymbol{n}}) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=|m|}^{+\infty} a_{\ell m}^T \, \lambda_\ell^m(\theta) \right) e^{im\phi}
\end{aligned}$$

Si on pose :

$$b_m(\theta) = \sum_{\ell=|m|}^{+\infty} a_{\ell m}^T \, \lambda_\ell^m(\theta), \tag{2}$$

on obtient :

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{n}}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(\theta) \, e^{im\phi} \tag{3}$$

Ces formules sont exactes mais elles sont inutilisables en pratique. La pixelisation correspond à un nombre fini de pixels, donc a une taille minimale. Cette taille minimale est reliée à une valeur maximale de ℓ et de m. On note $\ell_{\max}$ cette valeur et on prendra $m_{\max} = \ell_{\max}$. Si la pixelisation est bien choisie (c'est le cas pour la pixelisation ThetaPhi et Healpix), le calcul de l'Eq. 3 se fait très facilement par FFT.
Pour ce qui est de la synthèse d'une carte de température, on procède donc de la façon suivante :

1. on se donne un spectre de puissance C_ℓ^T ;
2. on en déduit une réalisation des $a_{\ell m}^T$;
3. on calcule les coefficients $b_m(\theta)$ à l'aide de Eq. 2 ;
4. on calcule enfin la carte de température par FFT des $b_m(\theta)$.

3.2.2 Analyse d'une carte

Réciproquement, étant donnée une carte de température, on peut calculer le spectre de puissance C_ℓ^T. On commence par calculer les coefficients $a_{\ell m}^T$. Pour une carte pixelisée, on transforme :

$$a_{\ell m}^T = \int \frac{\Delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{n}}) \, Y_\ell^{m*}(\hat{\boldsymbol{n}}) \, d\hat{\boldsymbol{n}}$$

en

$$a_{\ell m}^T = \frac{4\pi}{N_{\text{pix}}} \sum_{\text{pixels } k} \frac{\Delta T}{T}(\theta_k, \phi_k) \, \lambda_\ell^m(\theta_k) \, e^{im\phi_k}$$

Il faut ici faire attention à la façon dont la somme est faite : on part du pixel de plus petit θ_k et on descend du Nord vers le Sud pour finir avec le pixel de plus grand θ_k. Pour chaque valeur de θ_k, on fait la somme sur tous les pixels k' tels que $(\theta_k, \phi_{k'})$. Dans une pixelisation appropriée, on peut à nouveau faire apparaître une FFT :

$$\begin{aligned}
a_{\ell m}^T &= \frac{4\pi}{N_{\text{pix}}} \sum_{\theta_k} \sum_{\phi_{k'}} \frac{\Delta T}{T}(\theta_k, \phi_{k'}) \, e^{im\phi_{k'}} \\
&= \frac{4\pi}{N_{\text{pix}}} \sum_{\theta_k} C_m(\theta_k) \, \lambda_\ell^m(\theta_k) \\
\text{avec } \; C_m(\theta_k) &= \sum_{\phi_{k'}} \frac{\Delta T}{T}(\theta_k, \phi_{k'}) \, e^{im\phi_{k'}}.
\end{aligned}$$

Comme dans la pixelisation choisie (ThetaPhi ou Healpix) les pixels sont régulièrement espacés en $\phi_{k'}$ sur les tranches θ_k, les coefficients $C_m(\theta_k)$ se calculent très facilement par FFT.

Remarque :

$$C_m(\theta_k) = b_m(\theta_k)\ N_{\phi_{k'}}(\theta_k)$$

où $N_{\phi_{k'}}$ est le nombre de pixels sur la tranche θ_k.

Pour analyser une carte de température, on procède donc de la façon suivante :

1. on calcule les coefficients $C_m(\theta_k)$ par FFT de la carte de température ;
2. on calcule la somme donnant les $a^T_{\ell m}$ en fonction des $C_m(\theta_k)$ et des $\lambda_\ell^m(\theta_k)$;
3. on calcule ensuite les valeurs moyennes des $a^T_{\ell m}$ pour trouver les C^T_ℓ.

3.3 Cartes de polarisation

On a besoin ici de deux cartes : une pour Q et une pour U. Le principe est exactement le même que dans le cas de la température, puisque nous disposons également de fonctions orthonormales ${}_{\pm 2}Y_\ell^m$. Ces fonctions de base nous sont utiles lorsque nous considérons les deux cartes complexes $Q \pm iU$.

$$(Q \pm iU)\,(\hat{\boldsymbol{n}}) = \sum_{\ell m} a_{\pm 2 \ell m}\ {}_{\pm 2}Y_\ell^m(\hat{\boldsymbol{n}})$$

On note $P^\pm = Q \pm iU$ et $f^\pm_{\ell m}$ les fonctions de θ telles que ${}_{\pm 2}Y_\ell^m(\theta, \phi) = f^\pm_{\ell m}(\theta)\ e^{im\phi}$, c'est-à-dire l'équivalent pour les harmoniques sphériques de spin des fonctions λ_ℓ^m pour les harmoniques sphériques scalaires.

3.3.1 Synthèse d'une carte

On va décomposer les deux sommes sur ℓ et m :

$$\begin{aligned} Q \pm iU &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\pm 2\ell m}\ f^\pm_{\ell m}(\theta)\ e^{im\phi} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=|m|}^{+\infty} a_{\pm 2\ell m}\ f^\pm_{\ell m}(\theta) \right) e^{im\phi} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b^\pm_m(\theta)\ e^{im\phi} \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$b^\pm_m(\theta) = \sum_{\ell=|m|}^{+\infty} a_{\pm 2\ell m}\ f^\pm_{\ell m}(\theta)$$

On utilisera encore les propriétés de la pixelisation pour calculer $Q \pm iU$ efficacement par FFT. En pratique, les sommes se limiteront aux valeurs $\ell_{\max}$ et $m_{\max}$ déterminées par la résolution angulaire.

Pour générer la carte de polarisation, on va suivre les mêmes étapes que pour la température :

1. on se donne des spectres de puissance pour les champs E et B, C^E_ℓ et C^B_ℓ ;
2. on en déduit une réalisation des coefficients $a^E_{\ell m}$ et $a^B_{\ell m}$;
3. on calcule ensuite les $a_{2\ell m}$ et $a_{-2\ell m}$;
4. on calcule la somme donnant $b^\pm_m(\theta)$;
5. on fait les FFT de $b^\pm_m(\theta)$ pour chaque valeur de θ et on obtient la valeur du champ complexe $Q \pm iU$ en chaque pixel (θ_k, ϕ_k).

3.3.2 Analyse d'une carte

Étant donnée deux cartes $Q(\hat{\boldsymbol{n}})$ et $U(\hat{\boldsymbol{n}})$, on peut calculer les coefficients $a_{\pm 2\ell m}$:

$$a_{\pm 2\ell m} = \int (Q \pm iU)(\hat{\boldsymbol{n}}) \ {}_{\pm 2}Y_\ell^{m*}(\hat{\boldsymbol{n}}) \ \sin\theta \ d\theta \ d\phi.$$

Ce qui donne, en discret :

$$a_{\pm 2\ell m} = \frac{4\pi}{N_{\rm pix}} \sum_{\text{pixels } k} (Q \pm iU)(\theta_k, \phi_k) \ f^{\pm}_{\ell m}(\theta_k) \ e^{-im\phi_k}$$

On effectue la somme de la même façon que pour la température : on va du Nord au Sud et pour chaque valeur de θ, on somme sur les ϕ.

$$\begin{aligned} a_{\pm 2\ell m} &= \frac{4\pi}{N_{\rm pix}} \sum_{\theta_k} C^{\pm}_m(\theta_k) \ f^{\pm}_{\ell m}(\theta_k) \\ \text{avec} \ \ C^{\pm}_m(\theta_k) &= \sum_{\phi_{k'}} (Q \pm iU)(\theta_k, \phi_{k'}) \ e^{-im\phi_{k'}} \end{aligned}$$

Le calcul de $C^{\pm}_m(\theta_k)$ se fait très simplement par FFT. Pour analyser deux cartes de polarisation $Q(\hat{\boldsymbol{n}})$ et $U(\hat{\boldsymbol{n}})$, on suivra les étapes suivantes :

1. on calcule les coefficients $C^{\pm}_m(\theta_k)$ par FFT sur $\phi_{k'}$ de la carte complexe $(Q \pm iU)(\hat{\boldsymbol{n}})$
2. on en déduit les $a_{\pm 2\ell m}$ en faisant la somme sur θ_k de $C^{\pm}_m(\theta_k) \ f^{\pm}_{\ell m}(\theta_k)$
3. avec les $a_{\pm 2\ell m}$ on calcule facilement les $a^E_{\ell m}$ et $a^B_{\ell m}$
4. enfin, on en déduit les spectres C^E_ℓ et C^B_ℓ.

Pour une résolution de 30 arcminutes, on a 196608 pixels, soit $\ell_{\max} \sim 250$. L'analyse d'une carte de température prend environ 9 secondes CPU sur une alpha (eros au LAL) et celle d'une carte de polarisation prend environ 33 secondes.

Remarque sur la bibliographie :

Attention, page 5 de (Kamionkowski et al., 1997) , il y a une faute de signe à l'équation 2.22, définissant $W_{\ell m}$ (mettre un "-" devant) ; toujours dans cette équation, la dernière forme n'est pas correcte, voir l'Eq. 1 page 5 dans ce document.

Références

Goldberg, J. N., Macfarlane, A. J., Newman, E. T., Rohrlich, F., et Sudarshan, E. C. G.: 1967, Spin-s Spherical Harmonics and $\eth$, *J. Math. Phys.* **8(11)**, 2155

Kamionkowski, M., Kosowsky, A., et Stebbins, A.: 1997, Statistics of Cosmic Microwave Background Polarization, *Phys. Rev. D* **55**, 7368, `astro-ph/9611125`

Newman, E. et Penrose, R.: 1966, Note on the Bondi-Metzner-Sachs Group, *J. Math. Phys.* **7(5)**, 863

Stebbins, A.: 1996, Weak lensing on the celestial sphere, `astro-ph/9609149`

Zerilli, F.: 1970, Tensor Harmonics in Canonical Form for Gravitational Radiation and Other Applications, *J. Math. Phys.* **11(7)**, 2203