

L'expansion

- 1927 : l'abbé Georges Lemaître trouve des solutions **dynamiques** aux équations d'Einstein : il prédit l'**expansion** de l'Univers et qu'elle se ferait selon $v \propto d$
- 1929 : Edwin Hubble établit la relation entre vitesse de fuite des nébuleuses et leur distance mais ne fait pas le lien avec l'expansion



L'expansion

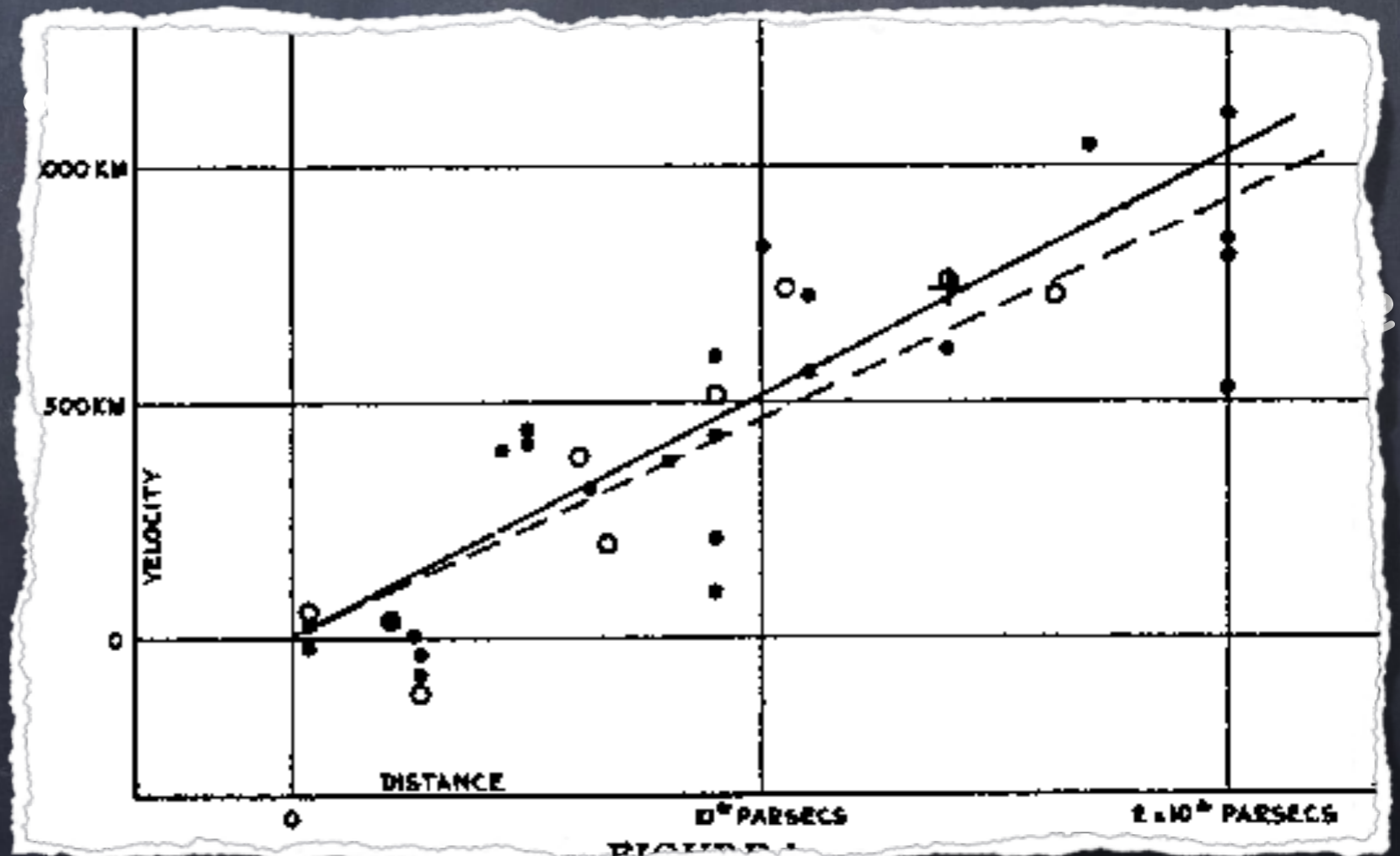
- 1927 : l'abbé Georges Lemaître trouve des solutions **dynamiques** aux équations d'Einstein : il prédit l'**expansion** de l'Univers et qu'elle se ferait selon $v \propto d$



Lemaître



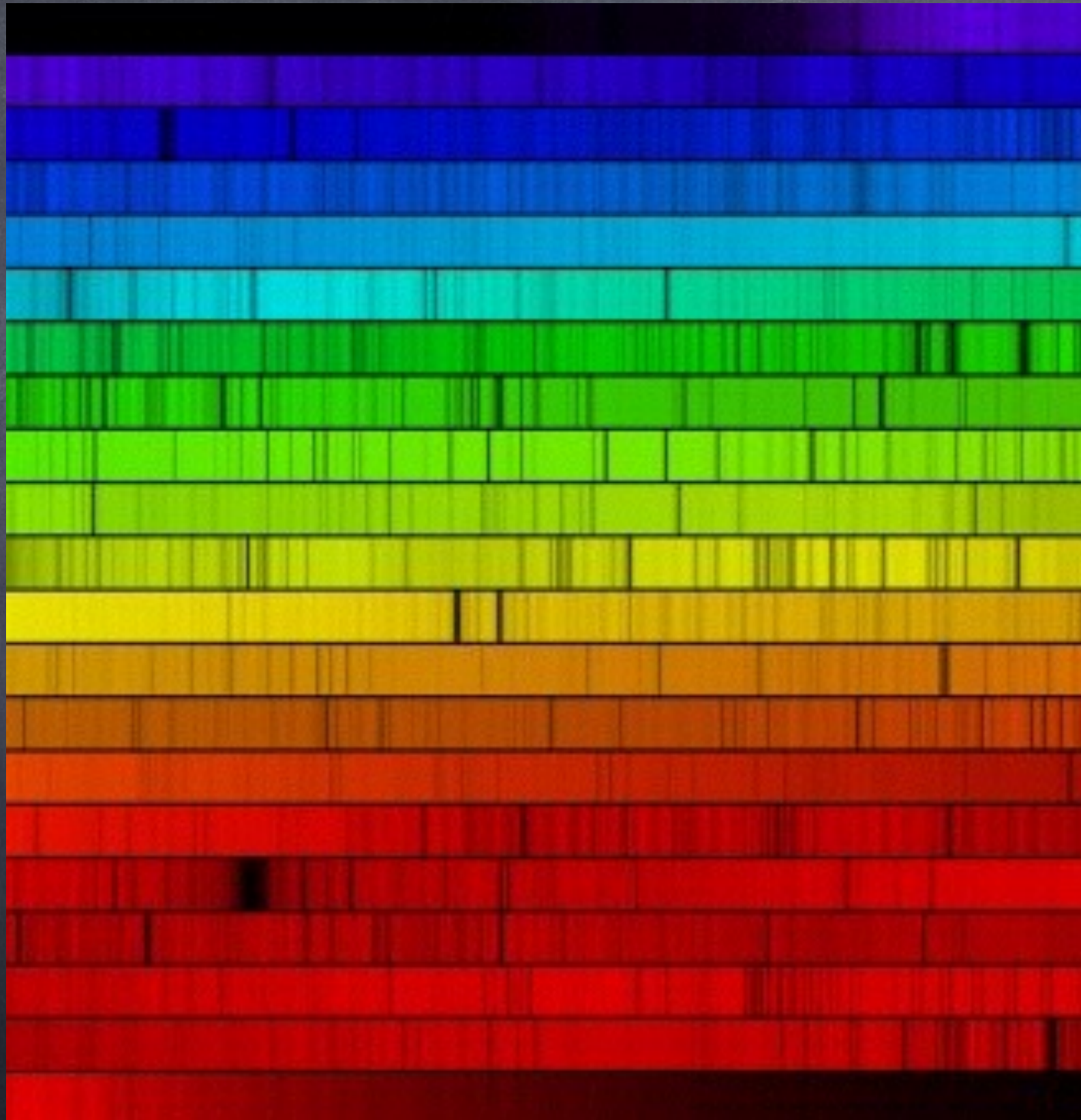
Hubble



L'expansion et le redshift

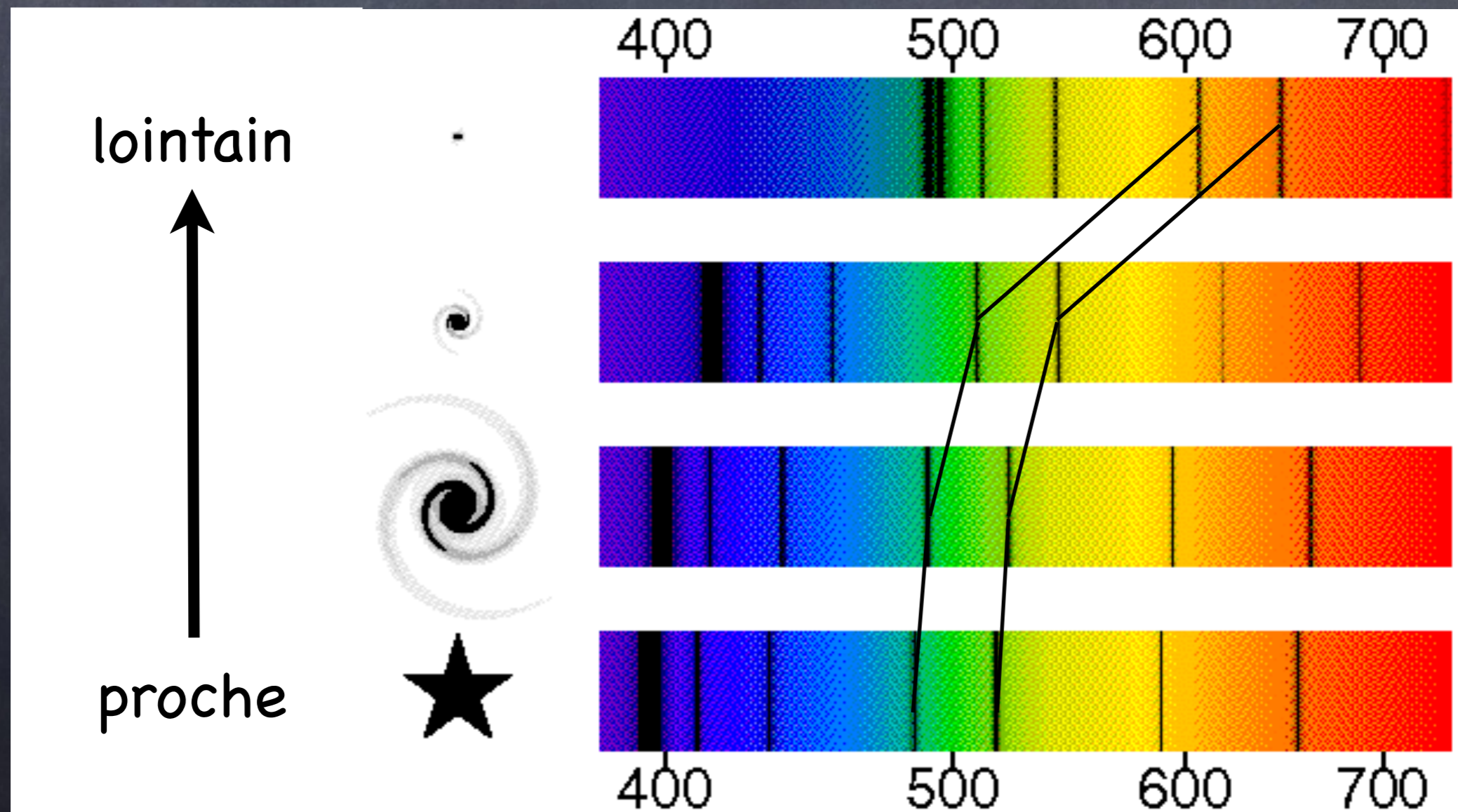
l'expansion de l'Univers produit un effet comparable à l'effet Doppler mais sur la lumière

L'expansion et le redshift



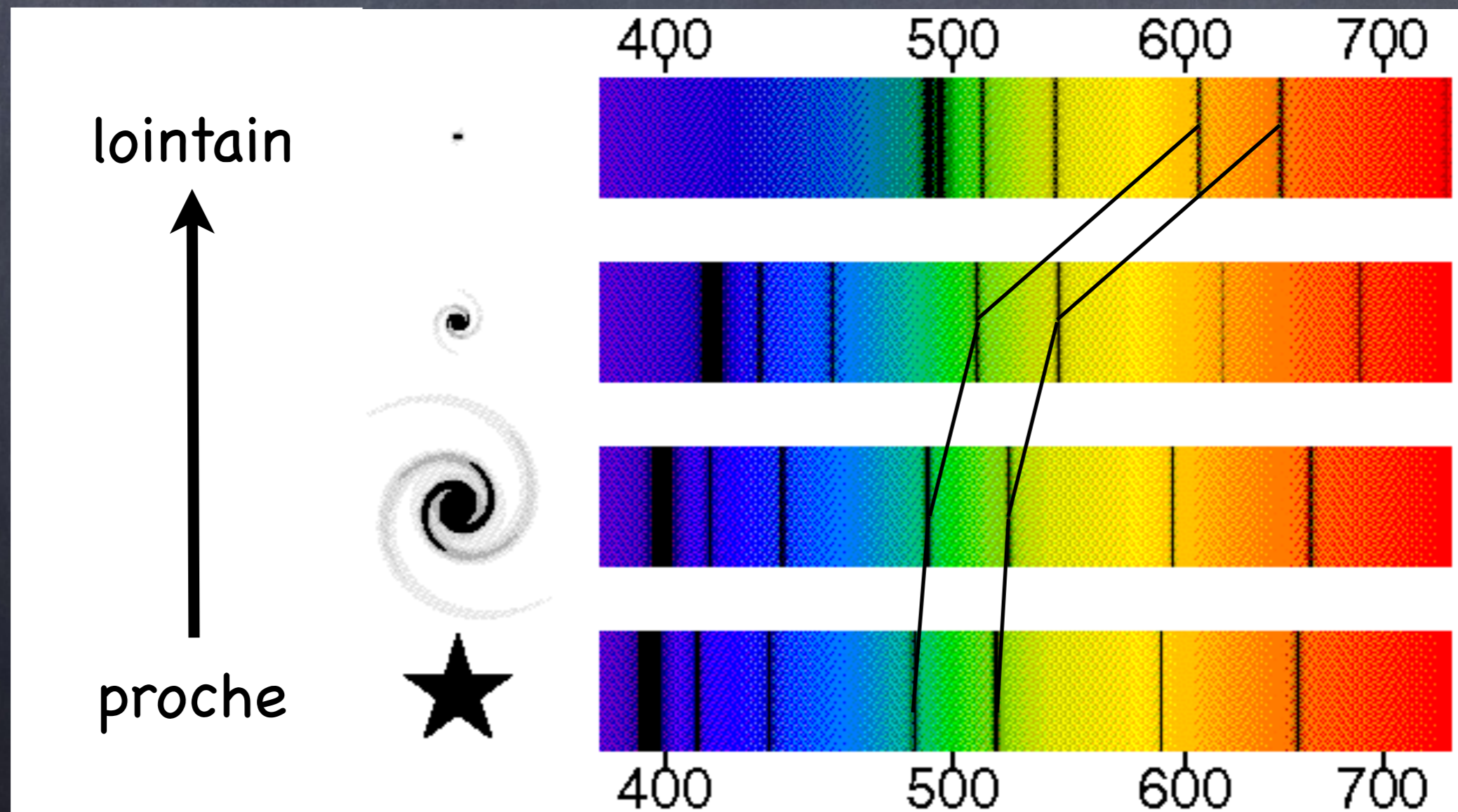
L'expansion et le redshift

l'expansion de l'Univers produit un effet comparable à l'effet Doppler mais sur la **lumière**



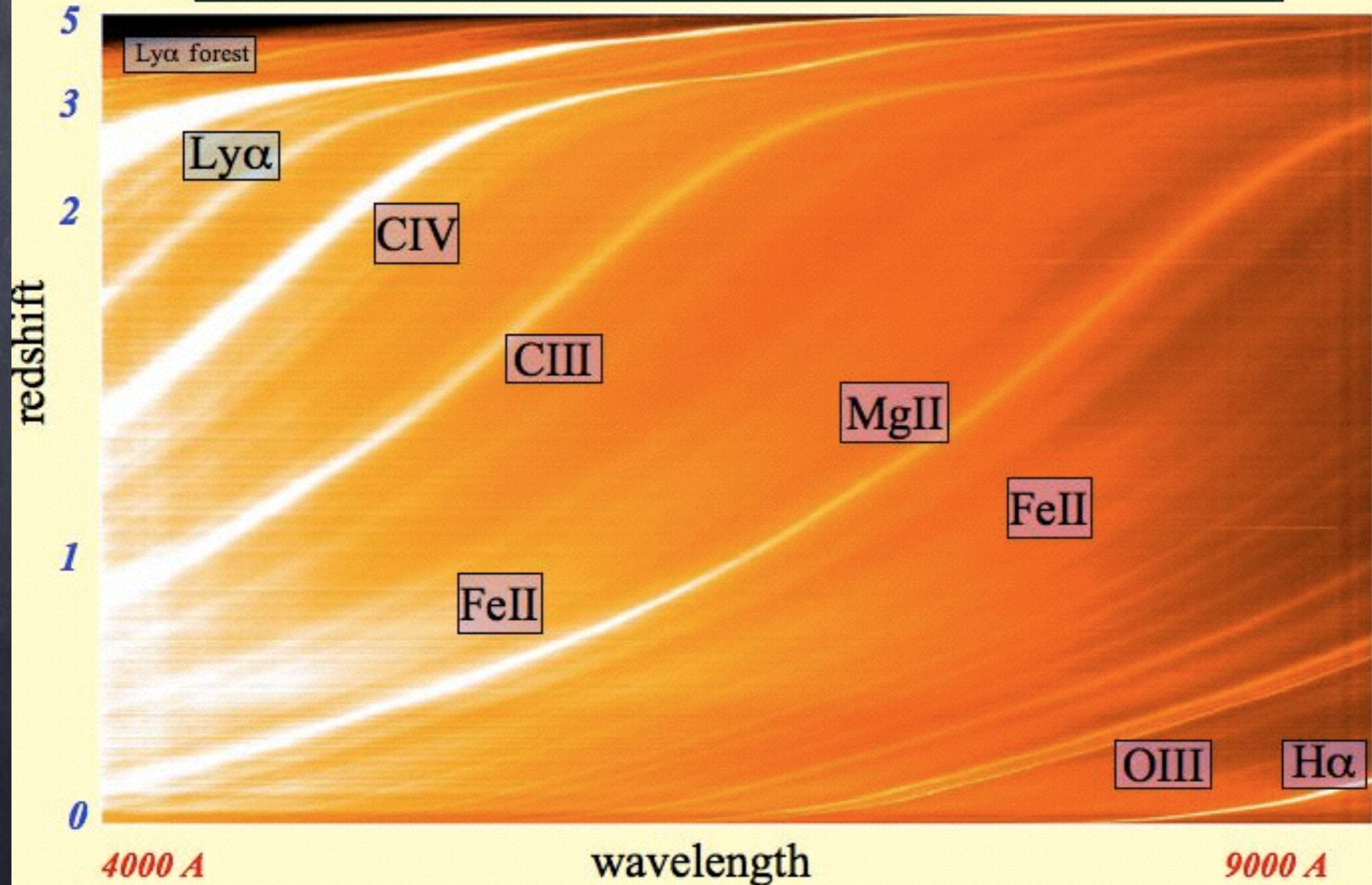
L'expansion et le redshift

l'expansion de l'Univers produit un effet comparable à l'effet Doppler mais sur la **lumière**



L'expansion et le redshift

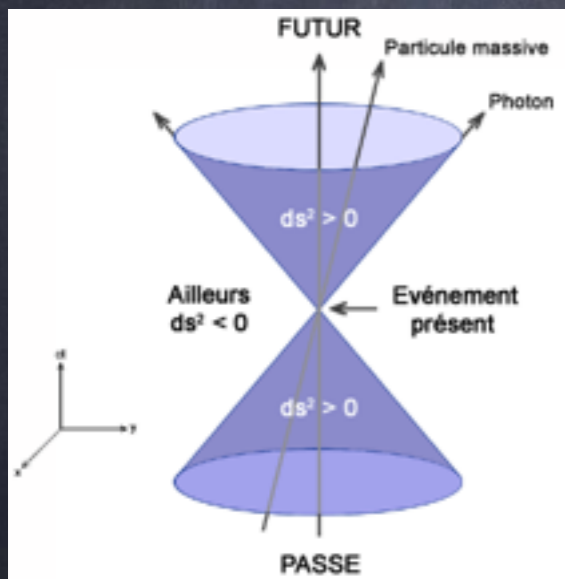
46,420 Quasars from the SDSS Data Release Three



L'expansion et le redshift

comment comprendre l'expansion dans le cadre de notre métrique ?

notion de distance propre : c'est la distance que mesureraient au même moment une infinité d'observateurs placés sur la géodésique reliant deux points P et P₀



ces deux points sont tels que :

$$\textcircled{dt} = d\theta = d\phi = 0$$

et donc

$$ds^2 = -a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} \quad \text{soit}$$

$$d_{\text{propre}}(t) = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}$$

L'expansion et le redshift

$$d_{\text{propre}}(t) = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}$$

$$d_{\text{propre}}(t) = a(t)g(r)$$

$$g(r) = \begin{cases} \arcsin r, & \text{si } k = 1 \\ r, & \text{si } k = 0 \\ \operatorname{argsinh} r, & \text{si } k = -1 \end{cases} .$$

séparation
temps et
espace !

la distance propre entre 2 observateurs peut varier dans le temps à cause du facteur d'échelle ; leur distance comobile $g(r)$ est par contre constante

L'expansion et le redshift

$$d_{\text{propre}}(t) = a(t)g(r)$$

$$d_{\text{propre}}(t_0) = a(t_0)g(r) = \frac{a(t_0)}{a(t)} d_{\text{propre}}(t)$$

la vitesse radiale de P par rapport à P₀ est donc :

$$v_r(t) = \dot{a} g(r) = \frac{\dot{a}}{a} a(t)g(r) = H(t) d_{\text{propre}}(t)$$

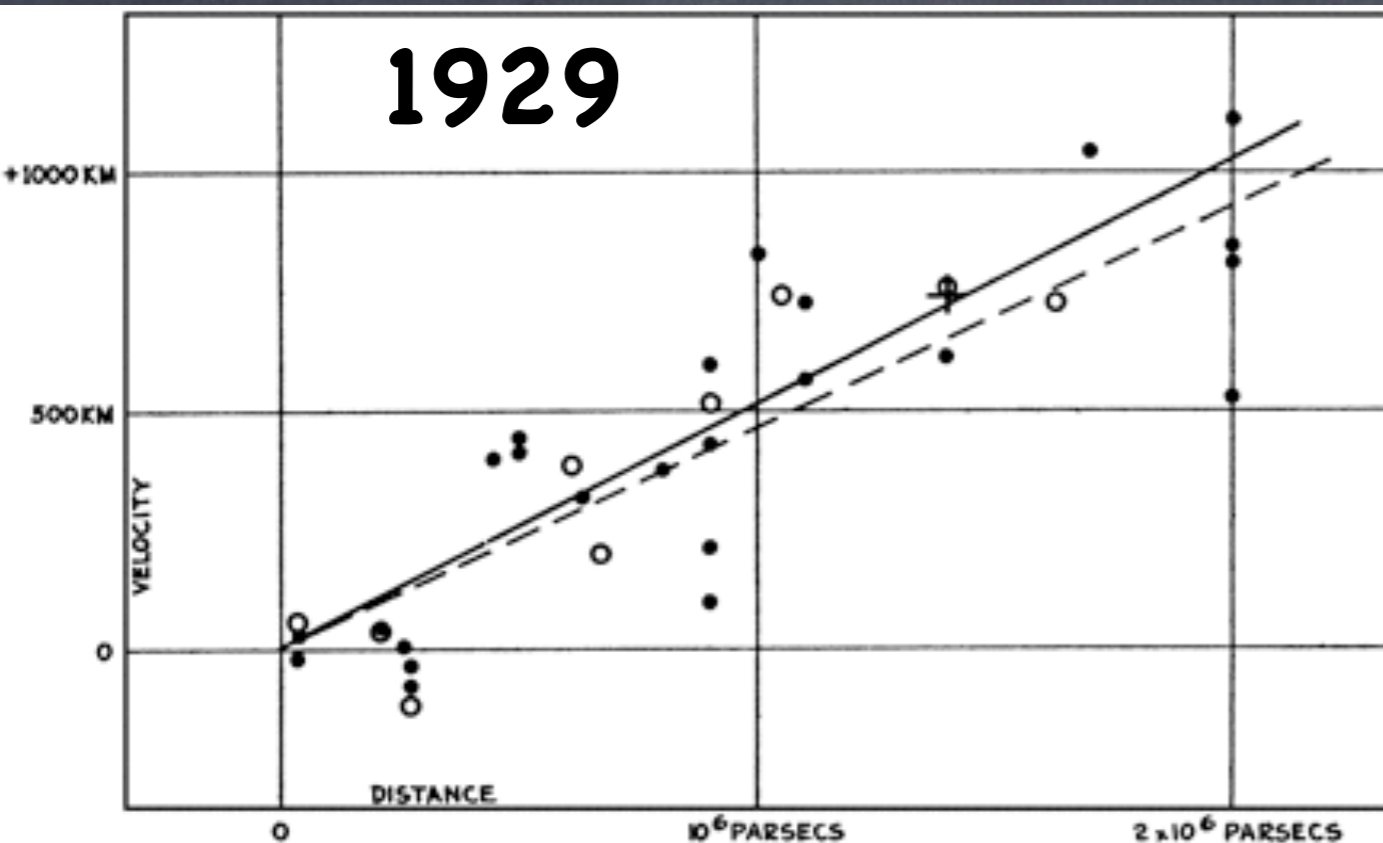
$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}(t)$$

ce qui définit la constante de Hubble $v = H d$

L'expansion et le redshift

distance estimée par les Céphéides, vitesse estimée par le redshift

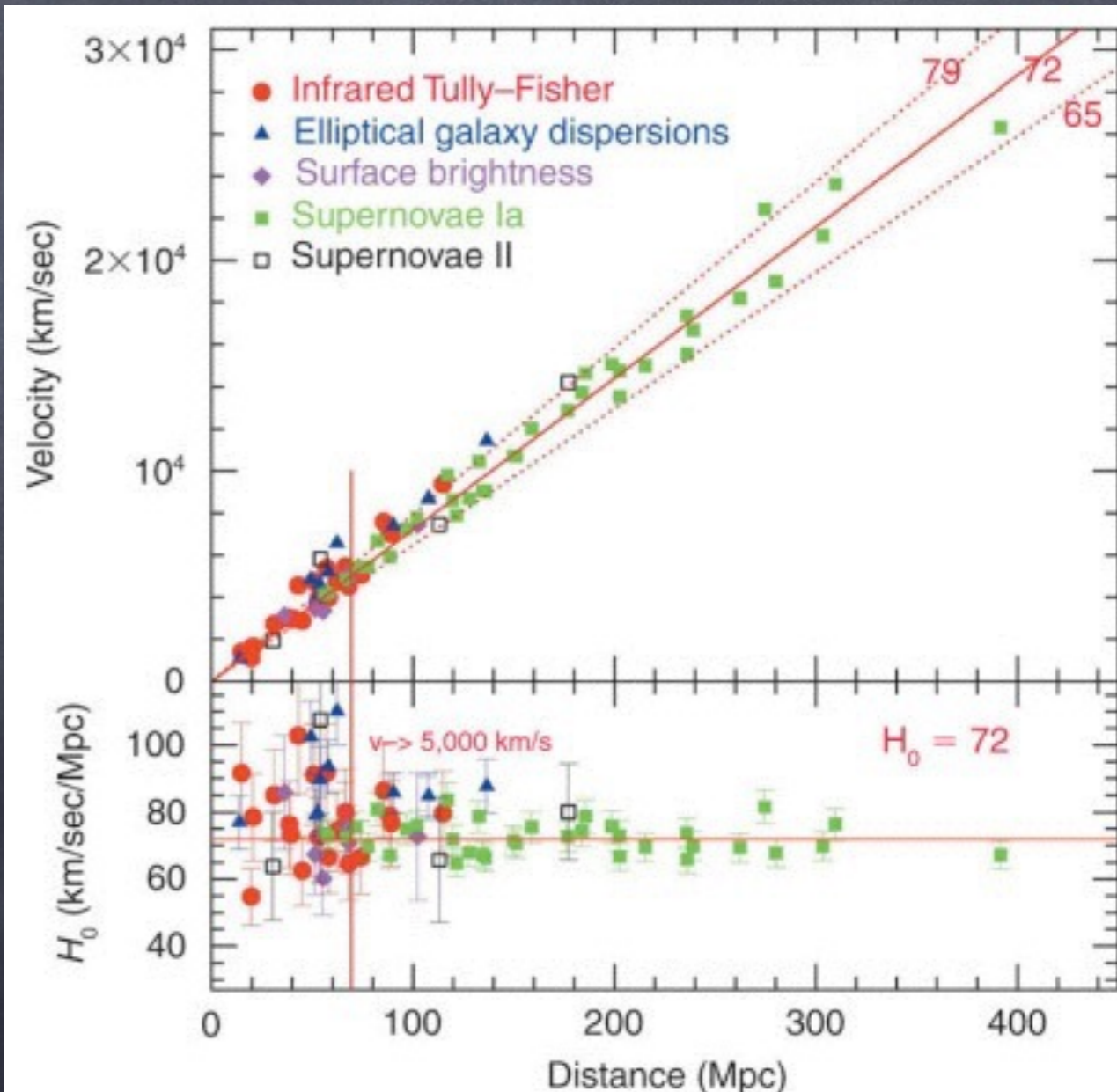
1929



Tully-Fisher : mesure de la vitesse de rotation des galaxies spirales, liée à sa luminosité $L = \text{Const} * V(\text{rot})^4$

mesures modernes \longrightarrow

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}} \sim 0.72$$



B

(Wendy L. Freedman, Observatories of the Carnegie Institution of Washington, and NASA)

L'expansion et le redshift

Pour Hubble, l'expansion était manifeste via la vitesse de récession (fuite) des galaxies observées. Cette vitesse était estimée par le redshift et interprétée comme un effet Doppler-Fizeau.

Aux faibles distances (Mpc), on peut faire l'approximation $z = v/c = Hd/c$ (voir la démonstration plus tard)

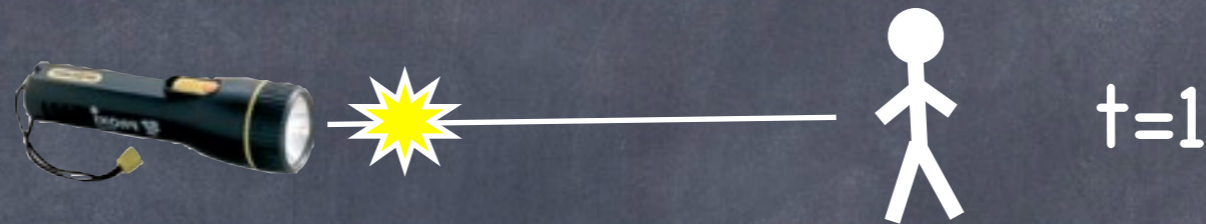
Aux grandes distances cette définition n'est plus valable et il faut raisonner en terme d'augmentation de l'espace entre la source et l'observateur.

L'expansion et le redshift

Pour le redshift, ce n'est pas un effet de vitesse mais un effet d'augmentation de l'espace lui-même PENDANT le voyage des photons (on regarde dans le passé)

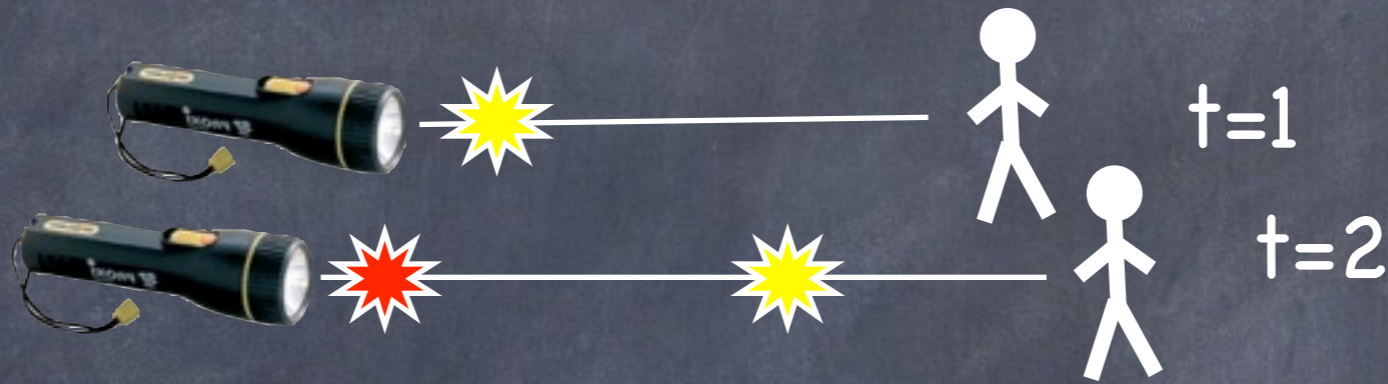
L'expansion et le redshift

Pour le redshift, ce n'est pas un effet de vitesse mais un effet d'augmentation de l'espace lui-même PENDANT le voyage des photons (on regarde dans le passé)



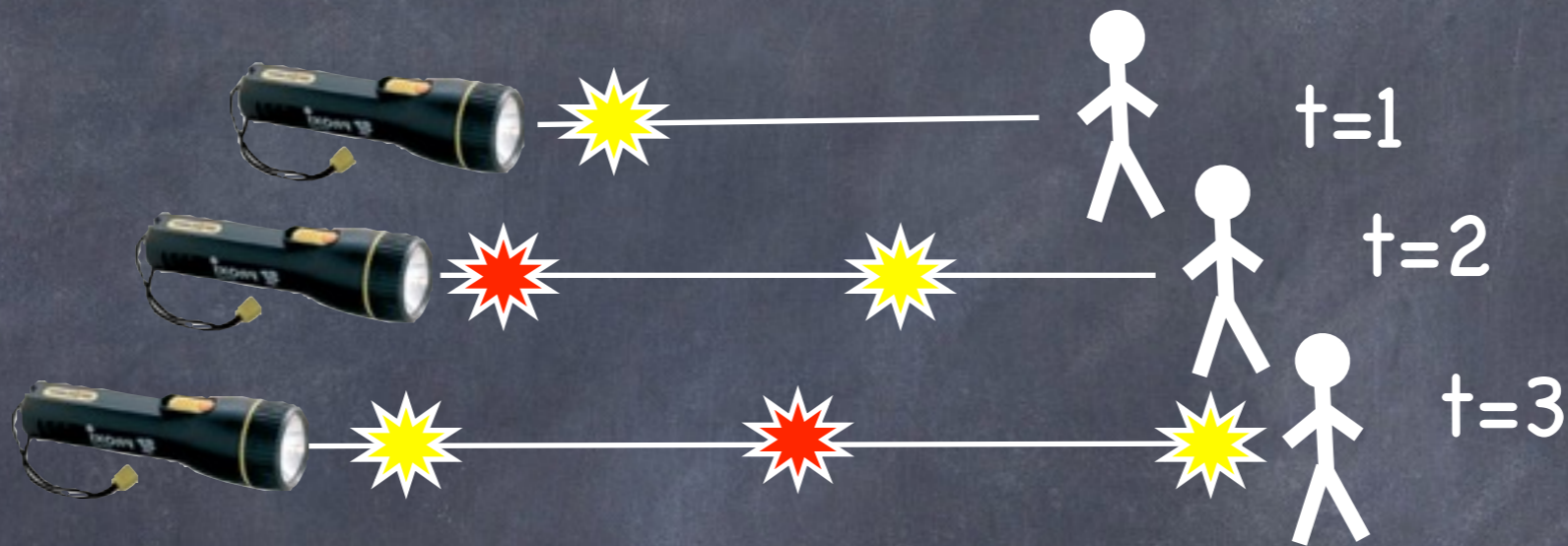
L'expansion et le redshift

Pour le redshift, ce n'est pas un effet de vitesse mais un effet d'**augmentation de l'espace** lui-même PENDANT le voyage des photons (on regarde dans le passé)



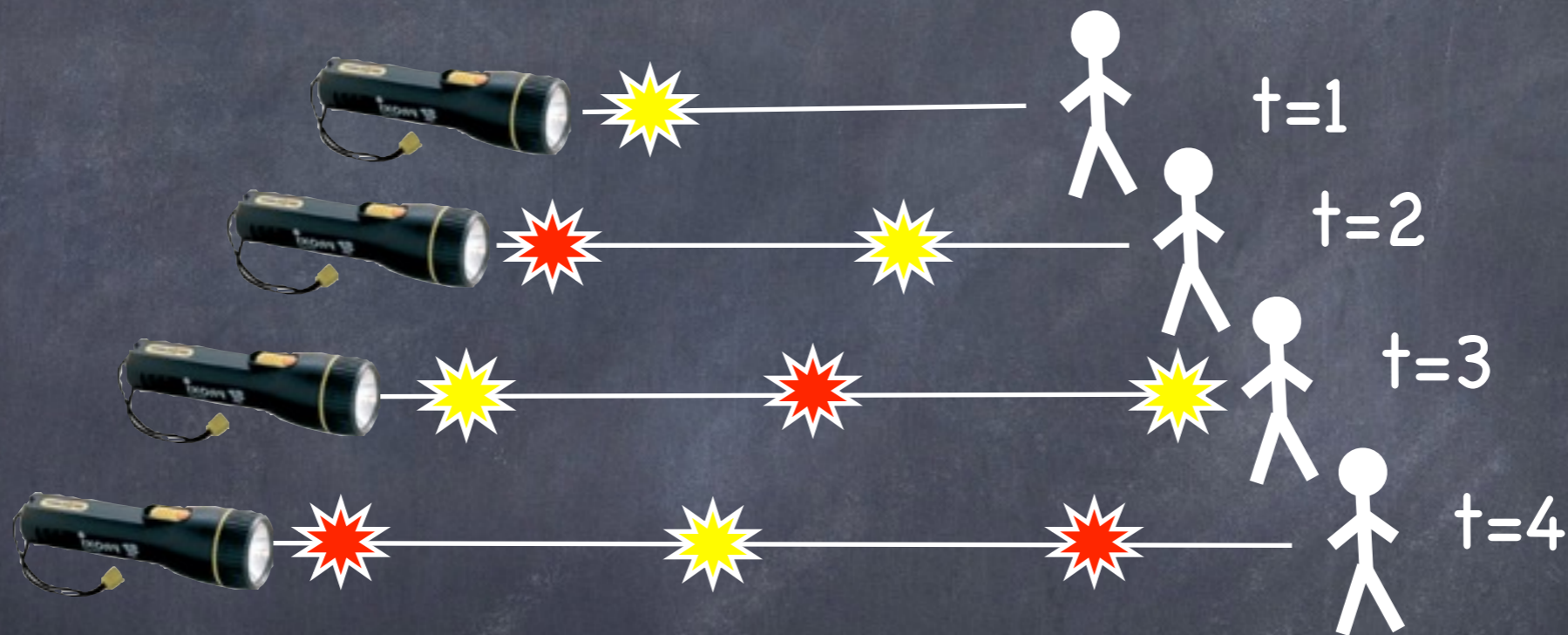
L'expansion et le redshift

Pour le redshift, ce n'est pas un effet de vitesse mais un effet d'**augmentation de l'espace** lui-même PENDANT le voyage des photons (on regarde dans le passé)



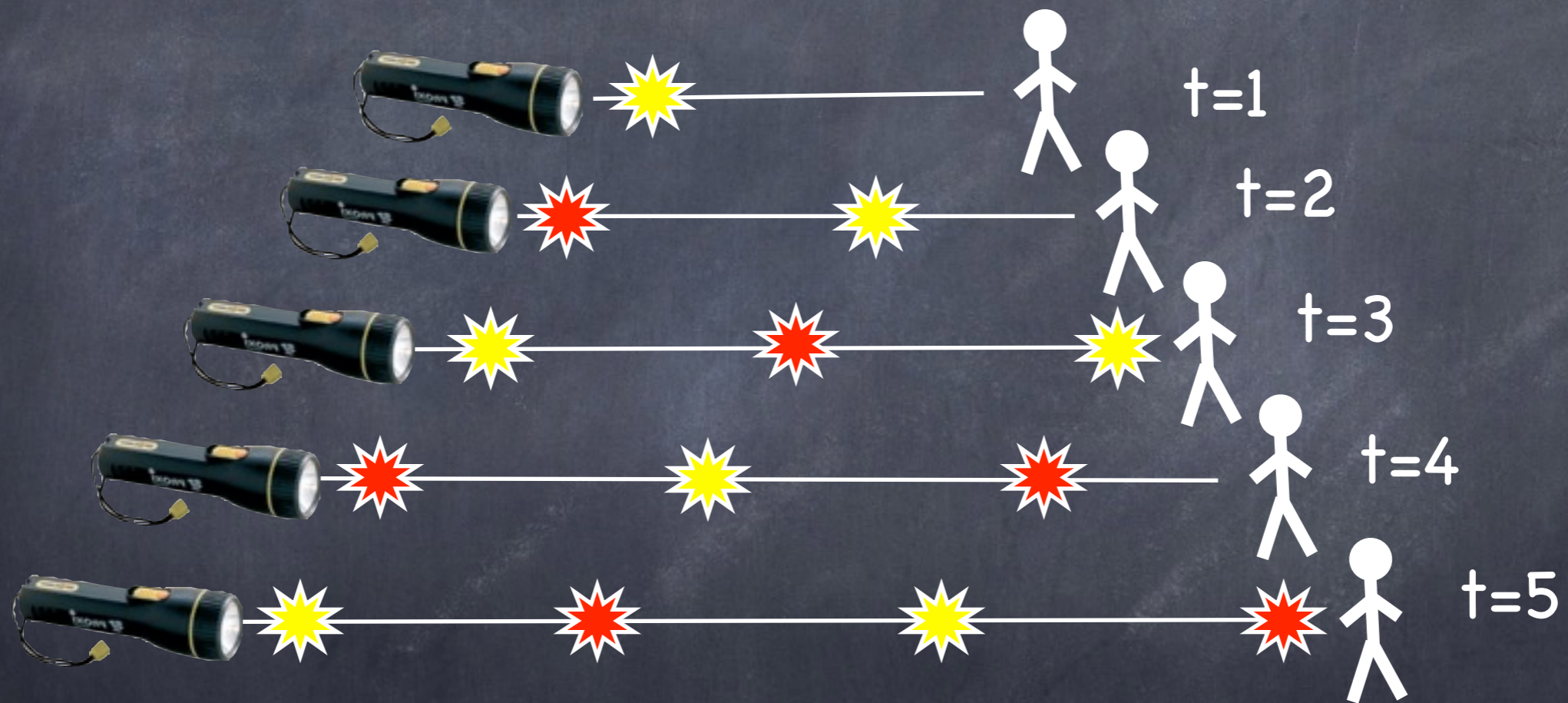
L'expansion et le redshift

Pour le redshift, ce n'est pas un effet de vitesse mais un effet d'augmentation de l'espace lui-même PENDANT le voyage des photons (on regarde dans le passé)



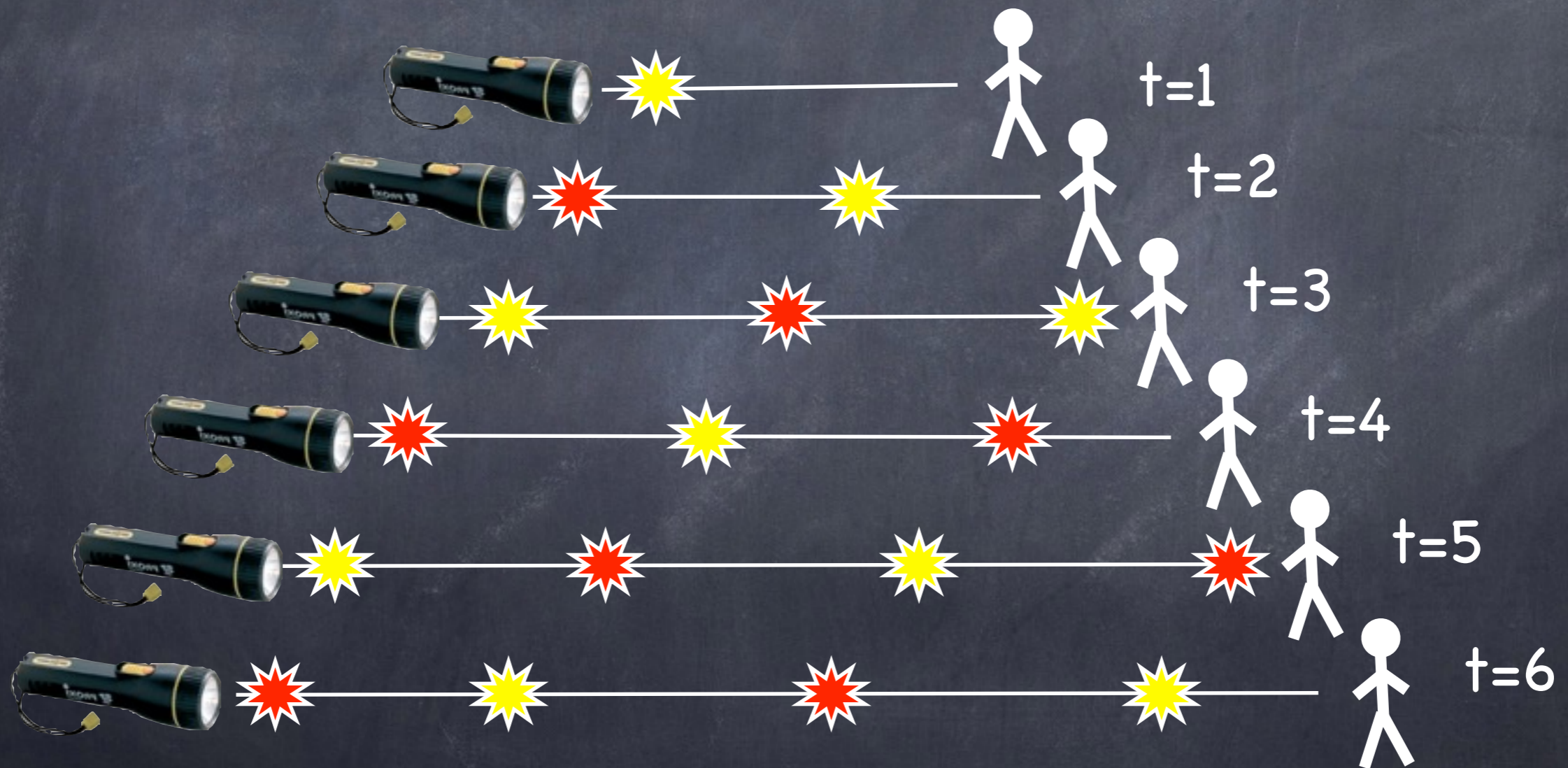
L'expansion et le redshift

Pour le redshift, ce n'est pas un effet de vitesse mais un effet d'augmentation de l'espace lui-même PENDANT le voyage des photons (on regarde dans le passé)



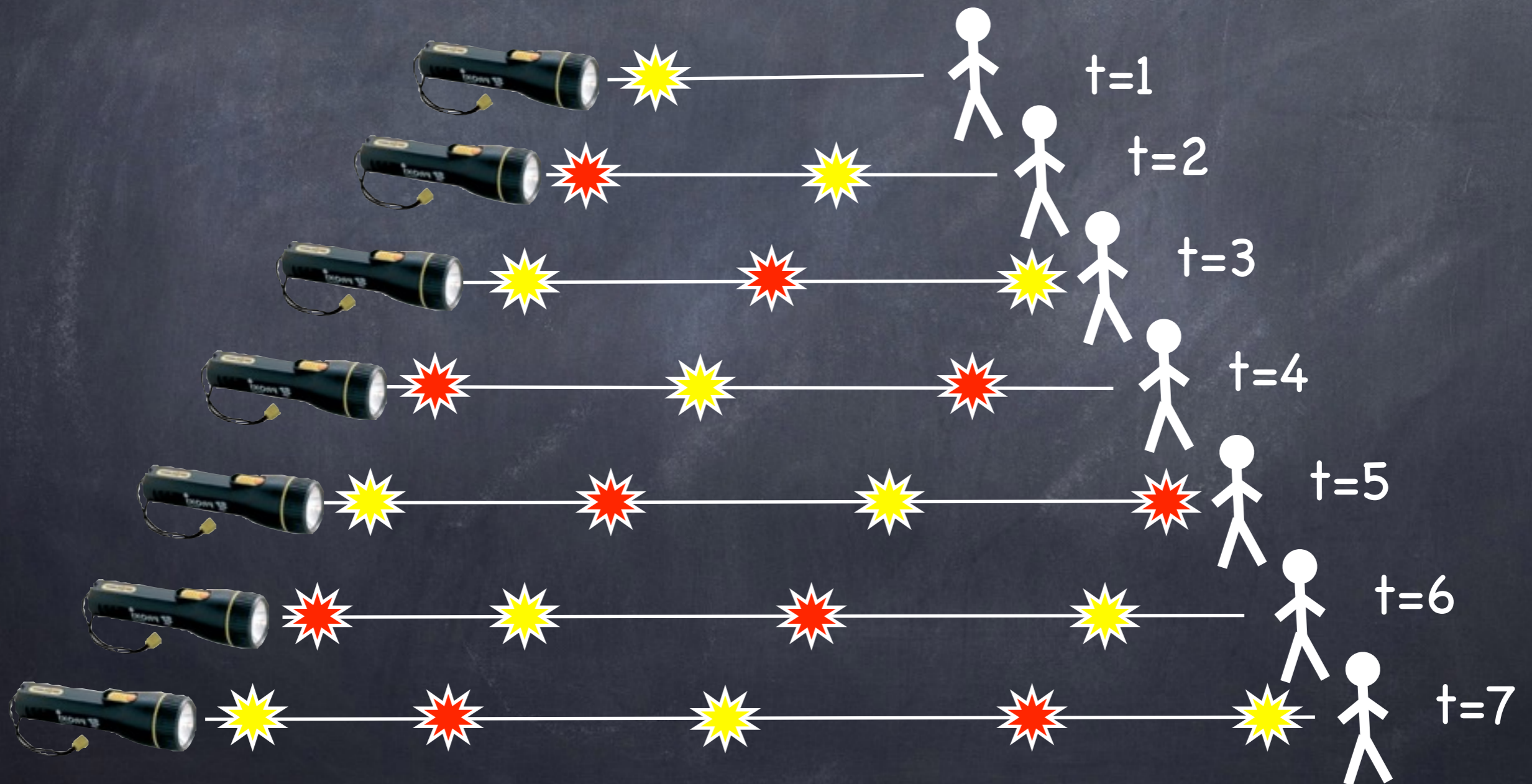
L'expansion et le redshift

Pour le redshift, ce n'est pas un effet de vitesse mais un effet d'augmentation de l'espace lui-même PENDANT le voyage des photons (on regarde dans le passé)



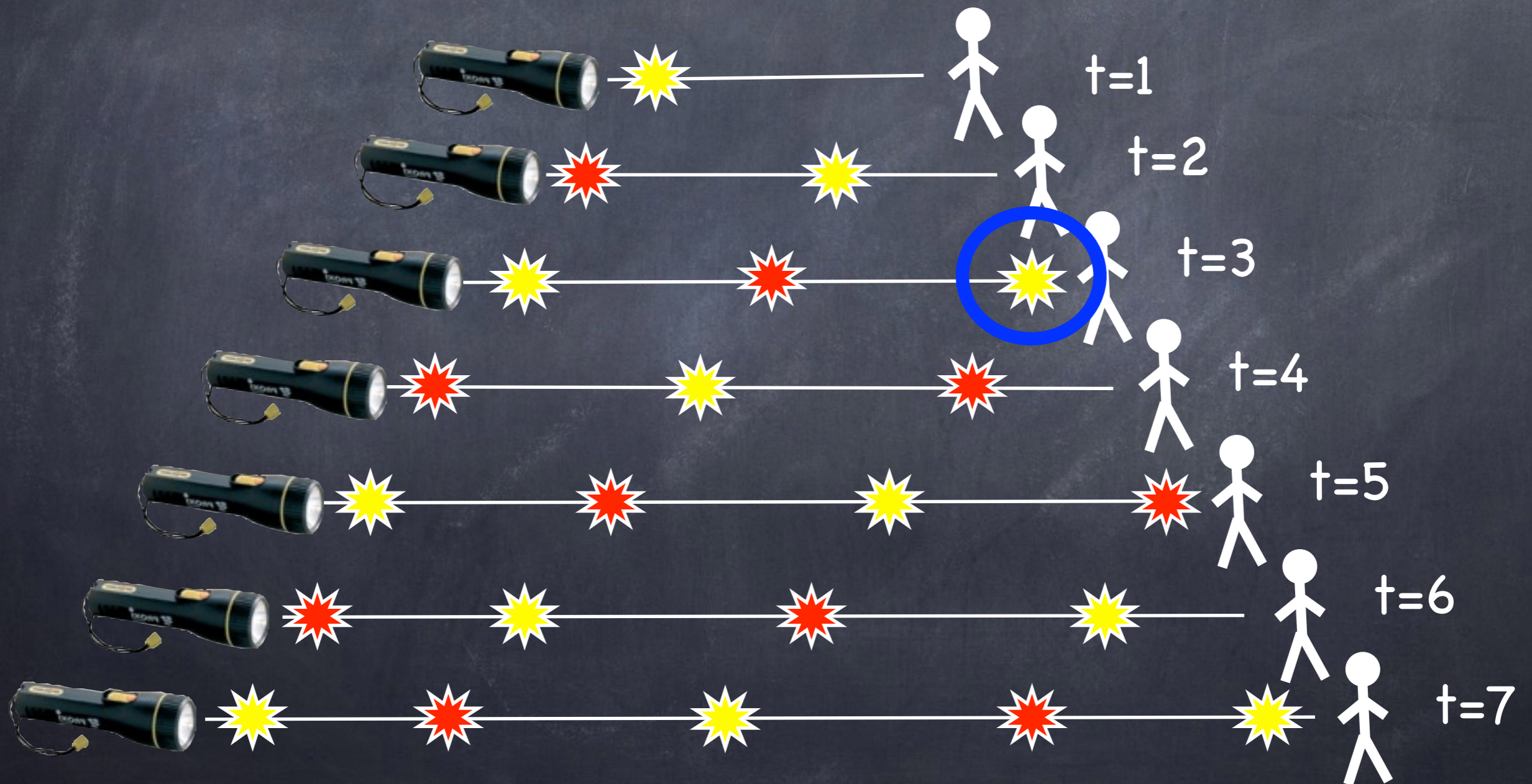
L'expansion et le redshift

Pour le redshift, ce n'est pas un effet de vitesse mais un effet d'augmentation de l'espace lui-même PENDANT le voyage des photons (on regarde dans le passé)



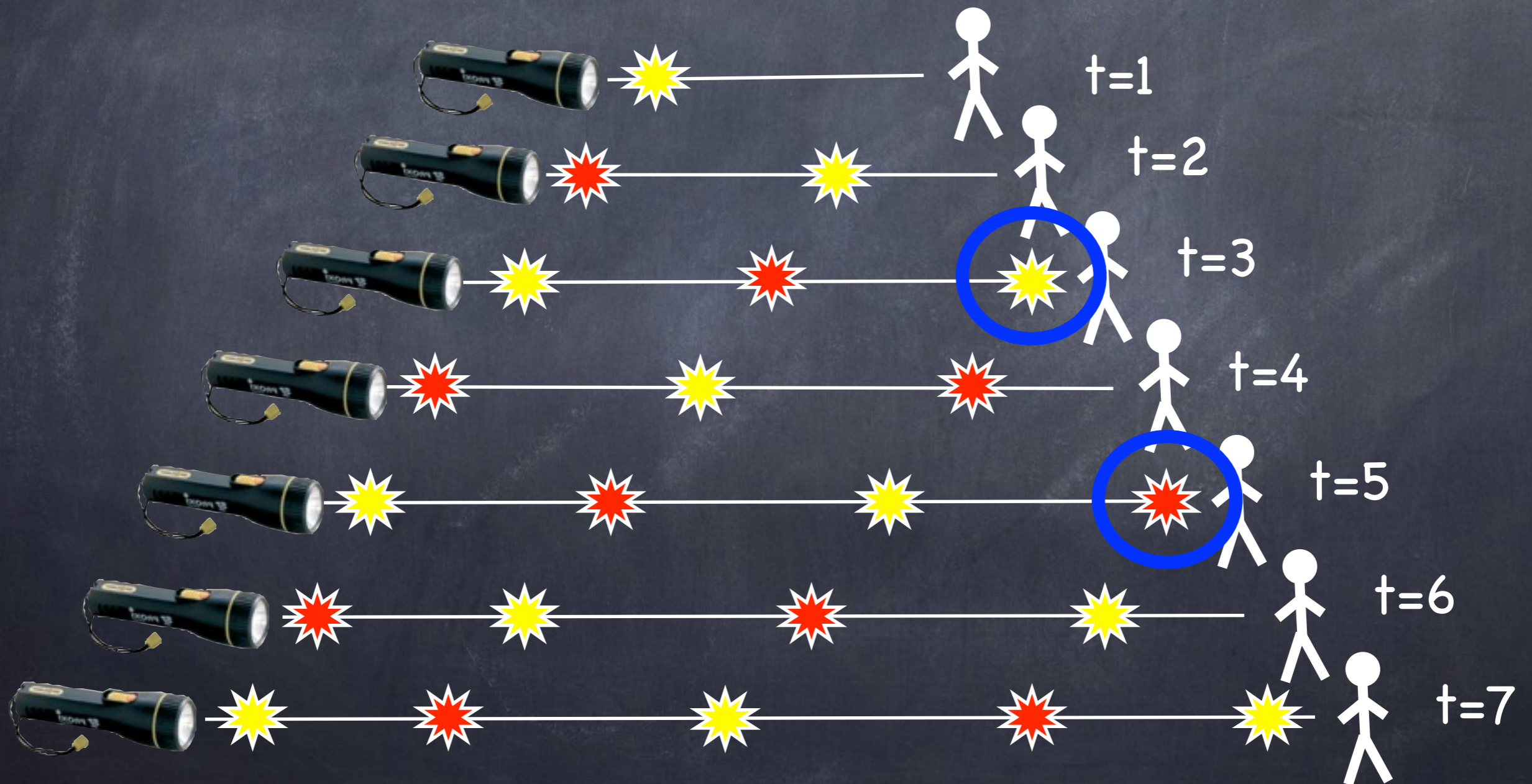
L'expansion et le redshift

Pour le redshift, ce n'est pas un effet de vitesse mais un effet d'augmentation de l'espace lui-même PENDANT le voyage des photons (on regarde dans le passé)



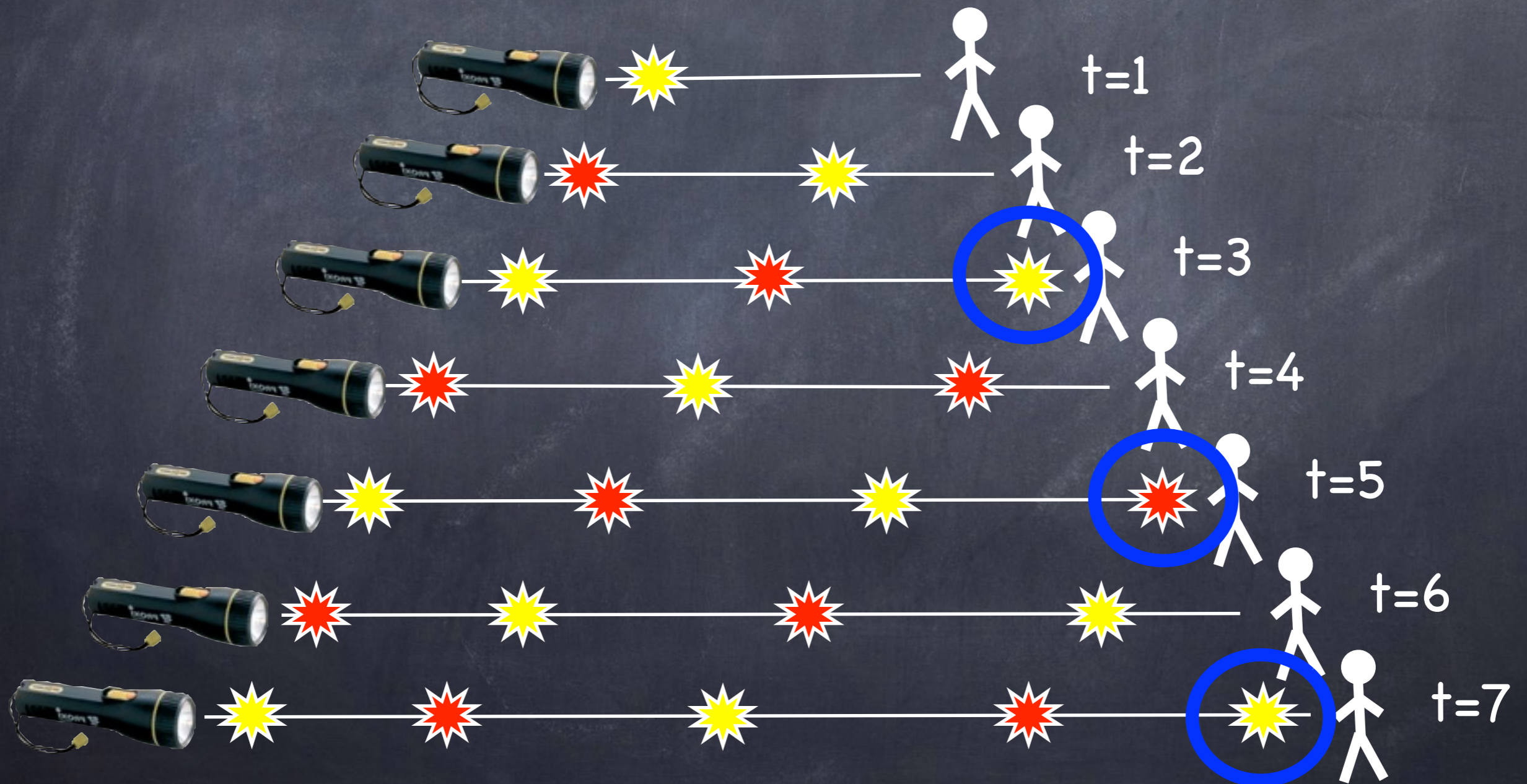
L'expansion et le redshift

Pour le redshift, ce n'est pas un effet de vitesse mais un effet d'augmentation de l'espace lui-même PENDANT le voyage des photons (on regarde dans le passé)



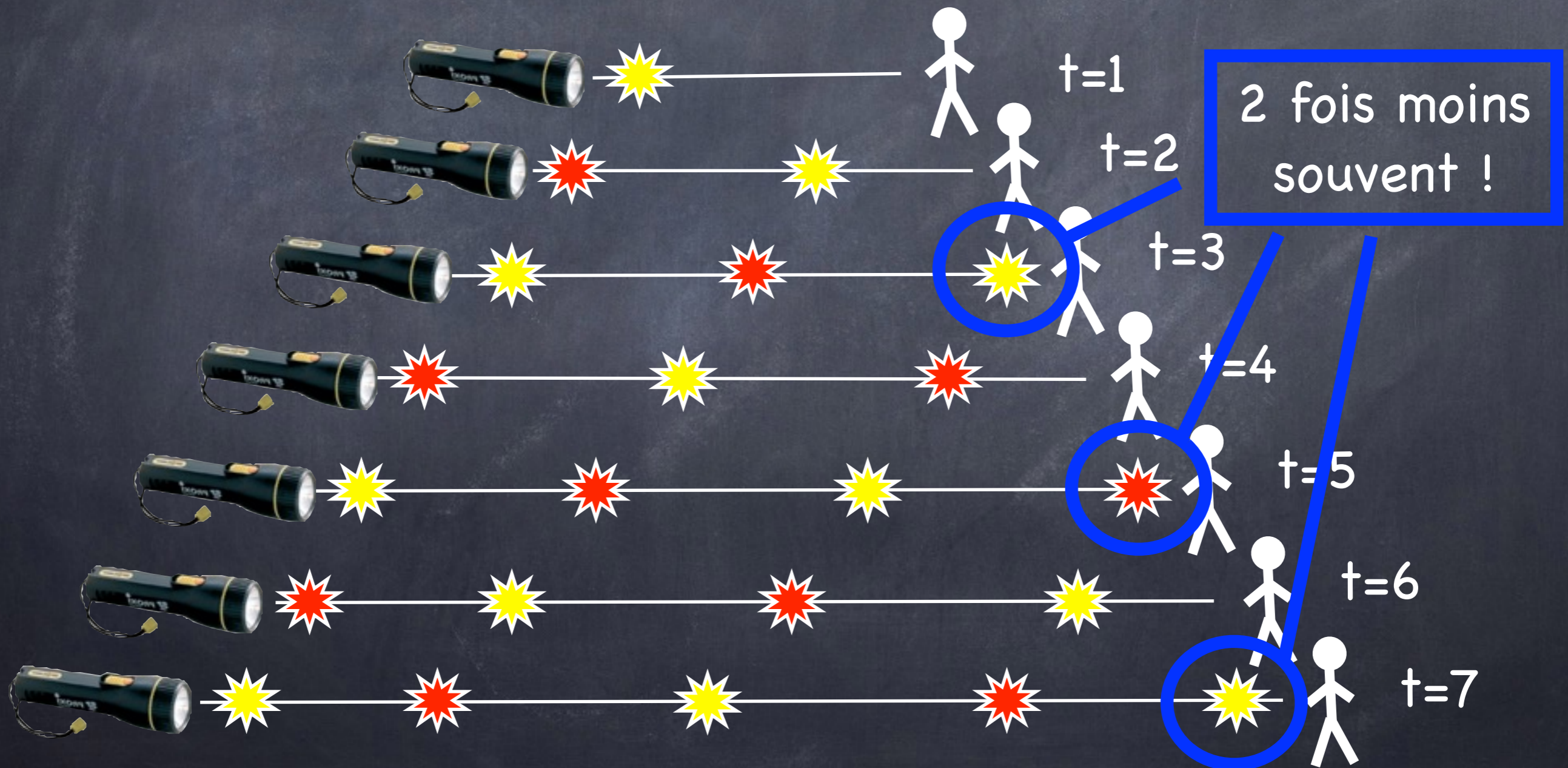
L'expansion et le redshift

Pour le redshift, ce n'est pas un effet de vitesse mais un effet d'augmentation de l'espace lui-même PENDANT le voyage des photons (on regarde dans le passé)




L'expansion et le redshift

Pour le redshift, ce n'est pas un effet de vitesse mais un effet d'augmentation de l'espace lui-même PENDANT le voyage des photons (on regarde dans le passé)



L'expansion et le redshift

définition rigoureuse


observateur



source à la
coordonnée
comobile r

à t_0 , l'observateur reçoit une onde de longueur λ_0
cette onde a été émise à t_e ($< t_0$) avec une longueur d'onde λ_e
les photons se déplacent selon la géodésique : $ds = 0$

soit :

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - k r'^2}} = g(r)$$

et pour la crête suivante :

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = g(r) = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

L'expansion et le redshift

définition rigoureuse

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = g(r) = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

or pour les ondes lumineuses, la période est de l'ordre de 10^{-14} s de sorte que l'on peut négliger la variation du facteur d'échelle pendant cet intervalle de temps ; on obtient alors

$$\frac{\delta t_0}{a_0} = \frac{\delta t_e}{a_e} \quad \text{ou} \quad \nu_e a_e = \nu_0 a_0$$

ce qui définit le redshift

$$1 + z = \frac{a_0}{a_e}, \quad z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}$$

L'expansion et le redshift

définition rigoureuse

$$1 + z = \frac{a_0}{a_e}, \quad z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}$$

exemple : $z=1$: la lumière reçue d'un objet situé à $z=1$ a été émise alors que l'univers était 2 fois plus petit qu'aujourd'hui (l'indice 0 se réfère conventionnellement à aujourd'hui)

$z=0$ correspond à aujourd'hui et potentiellement z peut être infini (au moment du Big-Bang)

attention : le lien entre z et l'âge de l'univers n'est pas immédiat, il dépend de l'histoire de l'univers qui est décrite par les paramètres cosmologiques (voir plus tard dans le cours)

Exercice !

L'expansion et le redshift

On a vu que la longueur d'onde est proportionnelle au facteur d'échelle. Pour des distances proches, montrer que le redshift z peut être confondu avec un effet Doppler-Fizeau.

à quel redshift trouverait-on un objet à 1 Mpc de nous ?

Étant donnée la loi de Hubble, il existe une distance à partir de laquelle la vitesse de fuite devient supérieure à celle de la lumière ; commenter.

L'expansion et le redshift

Exercice !

On a vu que la longueur d'onde est proportionnelle au facteur d'échelle. Pour des distances proches, montrer que le redshift z peut être confondu avec un effet Doppler-Fizeau.

$$l_0/l = a(t_0)/a(t_0 - d/c), \quad d/c \ll 1 \text{ soit } l_0 = l(1 + H_0 d/c) \text{ et donc}$$
$$z = H_0 * d/c = v/c$$

à quel redshift trouverait-on un objet à 1 Mpc de nous ?

$$z = v/c = H_0 d/c = 72 \text{ km/s/Mpc} * 1 \text{ Mpc}/c = 0.00024 !$$

Étant donnée la loi de Hubble, il existe une distance à partir de laquelle la vitesse de fuite devient supérieure à celle de la lumière ; commenter.

pas d'échange d'information entre les 2 objets donc pas de problème avec la relativité

Horizons et rayon de Hubble

l'horizon des particules

c est finie : la distance parcourue en un temps fini par une particule se déplaçant à **c** est également finie.

l'horizon des particules : distance parcourue par la lumière depuis $t=0$ jusqu'à un instant t

formellement :

observateur en $r=0$ à $t=t_0$ recevant des signaux des points situés à une distance comobile $r < r_1$, r_1 étant la distance pour laquelle un signal émis à $t=t_1$ atteint l'observateur à $t=t_0$

$$g(r_1) = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - k r^2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)}$$

Horizons et rayon de Hubble

l'horizon des particules

$$g(r_1) = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - k r^2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)}$$

si l'intégrale en t diverge pour t_1 proche de 0 (limite du Big-Bang) alors $g(r_1)$ est infini et l'observateur a reçu des signaux de tous les points dans l'univers ; dans le cas contraire, l'observateur ne pourra recevoir de signal que de points se trouvant à l'intérieur d'une sphère de rayon r_{HorPart} défini par :

$$g(r_{\text{HorPart}}(t_0)) = \int_0^{r_{\text{HorPart}}(t_0)} \frac{dr}{\sqrt{1 - k r^2}} = \int_{t_1 \rightarrow 0}^{t_0} \frac{c dt'}{a(t')}$$

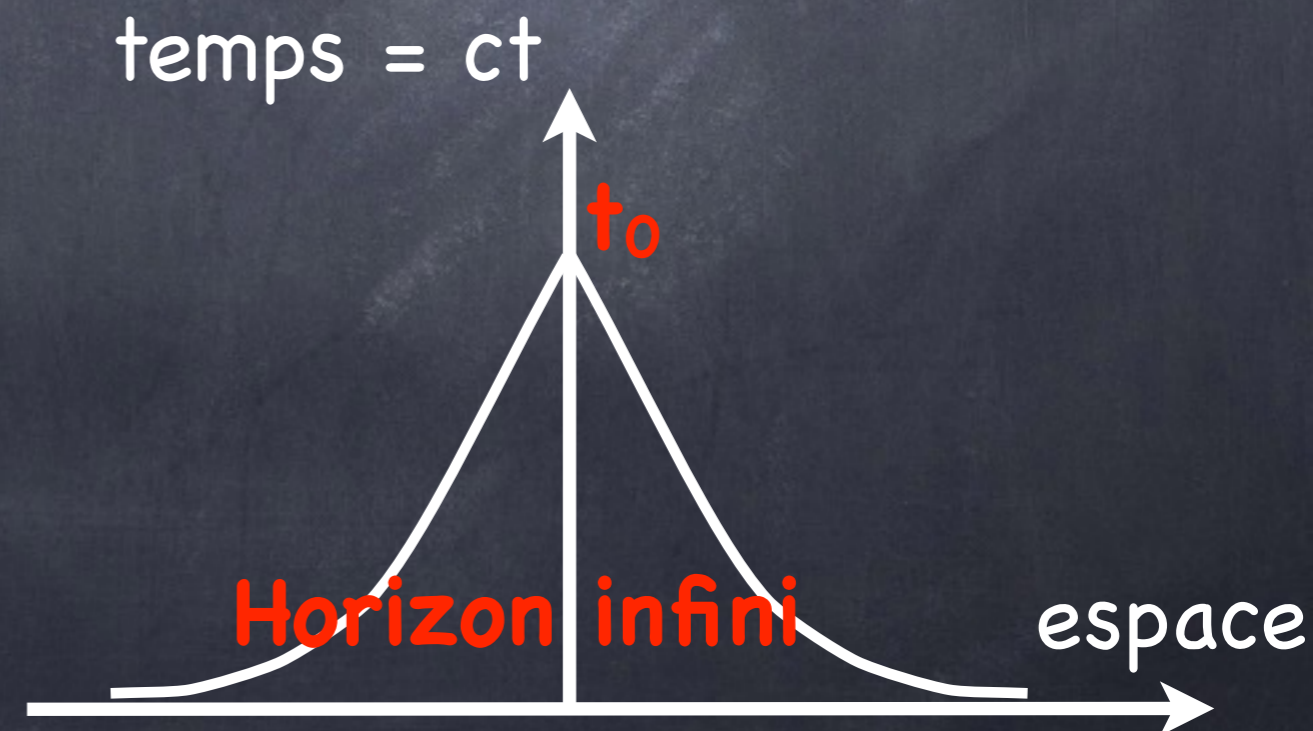
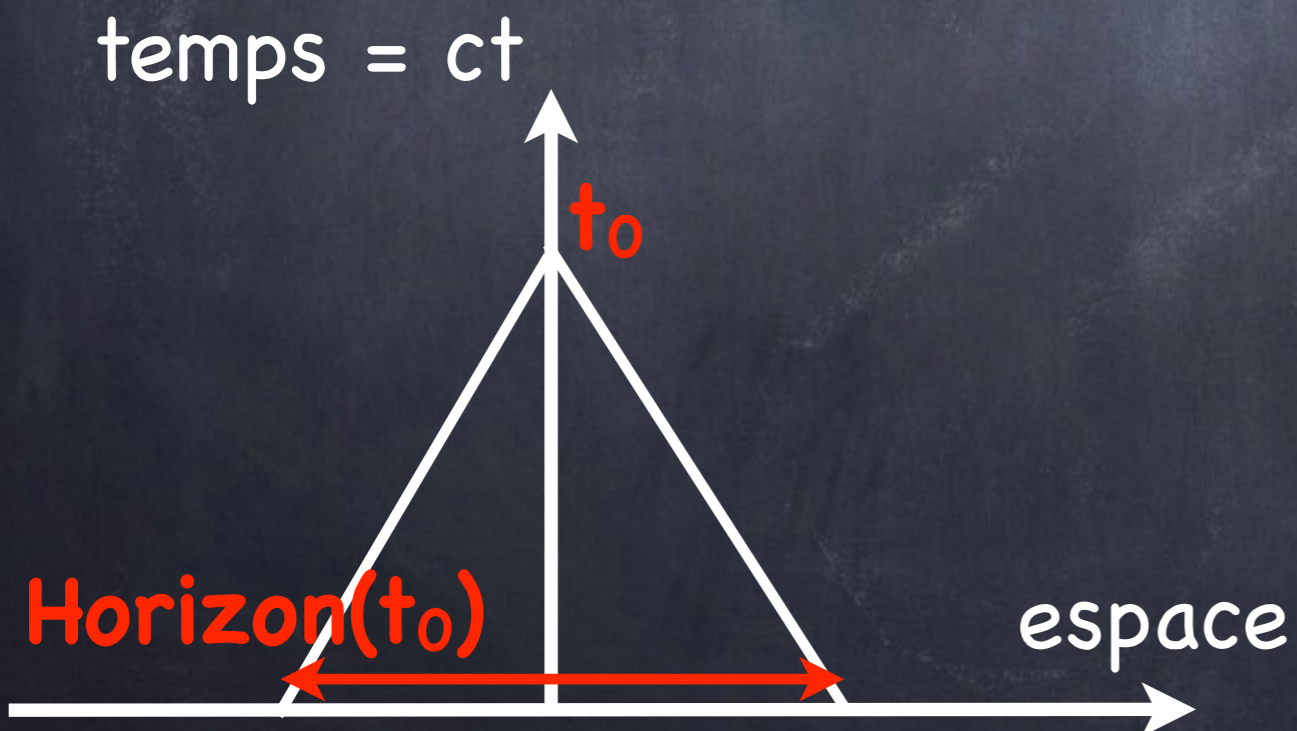
Horizons et rayon de Hubble

l'horizon des particules

$$g(r_{\text{HorPart}}(t_0)) = \int_0^{r_{\text{HorPart}}(t_0)} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_1 \rightarrow 0}^{t_0} \frac{c dt'}{a(t')}$$

la distance propre associée à cet horizon est donc :

$$d_{\text{HorPart}}(t_0) = a(t_0) g(r_{\text{HorPart}}(t_0))$$

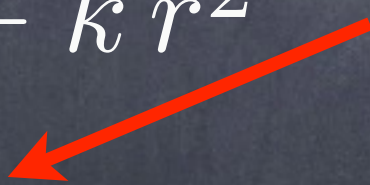


Horizons et rayon de Hubble

l'horizon des événements

analogue à l'horizon des particules mais en regardant vers le futur ; un événement en (t_0, r_1) sera-t-il visible un jour pour un observateur en $r=0$ à un instant $t > t_0$?

c'est la distance que la lumière peut parcourir depuis l'instant t jusqu'à un temps infini

$$g(r_1) = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - k r^2}} = \int_{t_0}^t \frac{c dt'}{a(t')}$$


si DV (t_{\max} infini, ou Big-Crunch), on peut atteindre tout point de l'espace-temps pourvu d'attendre suffisamment longtemps

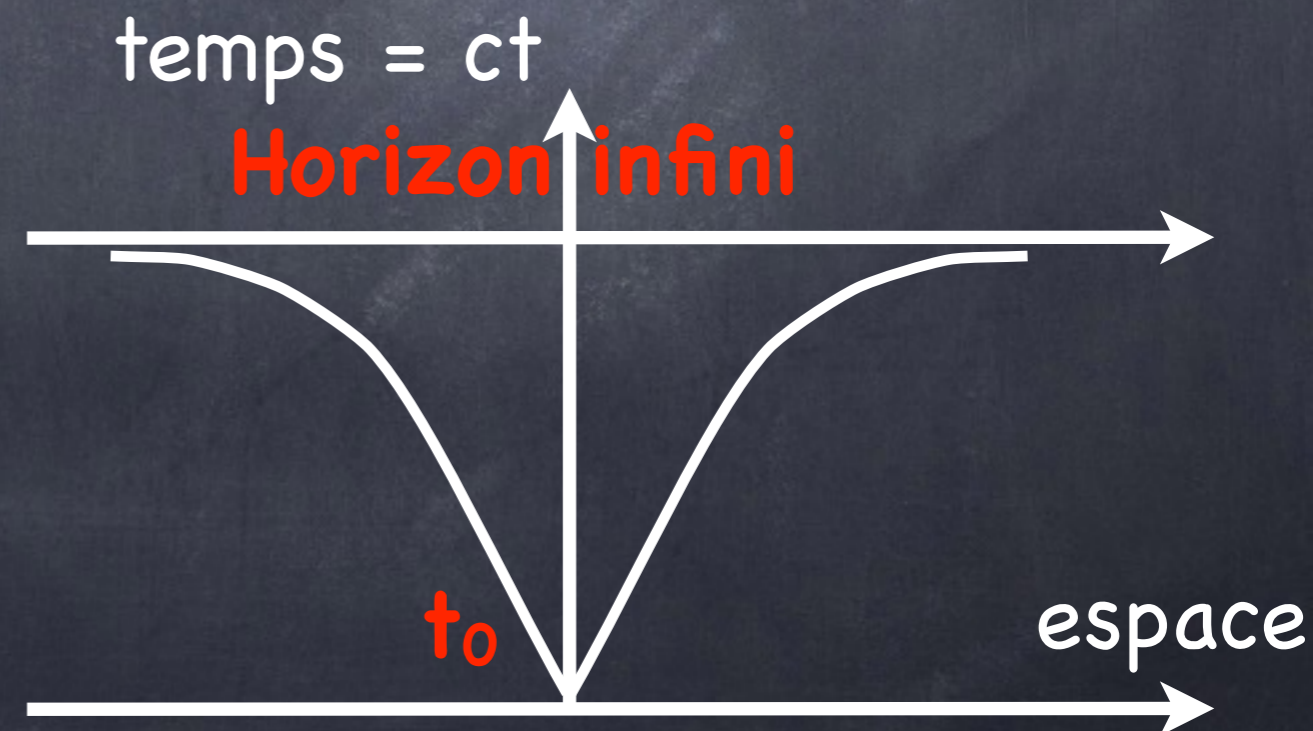
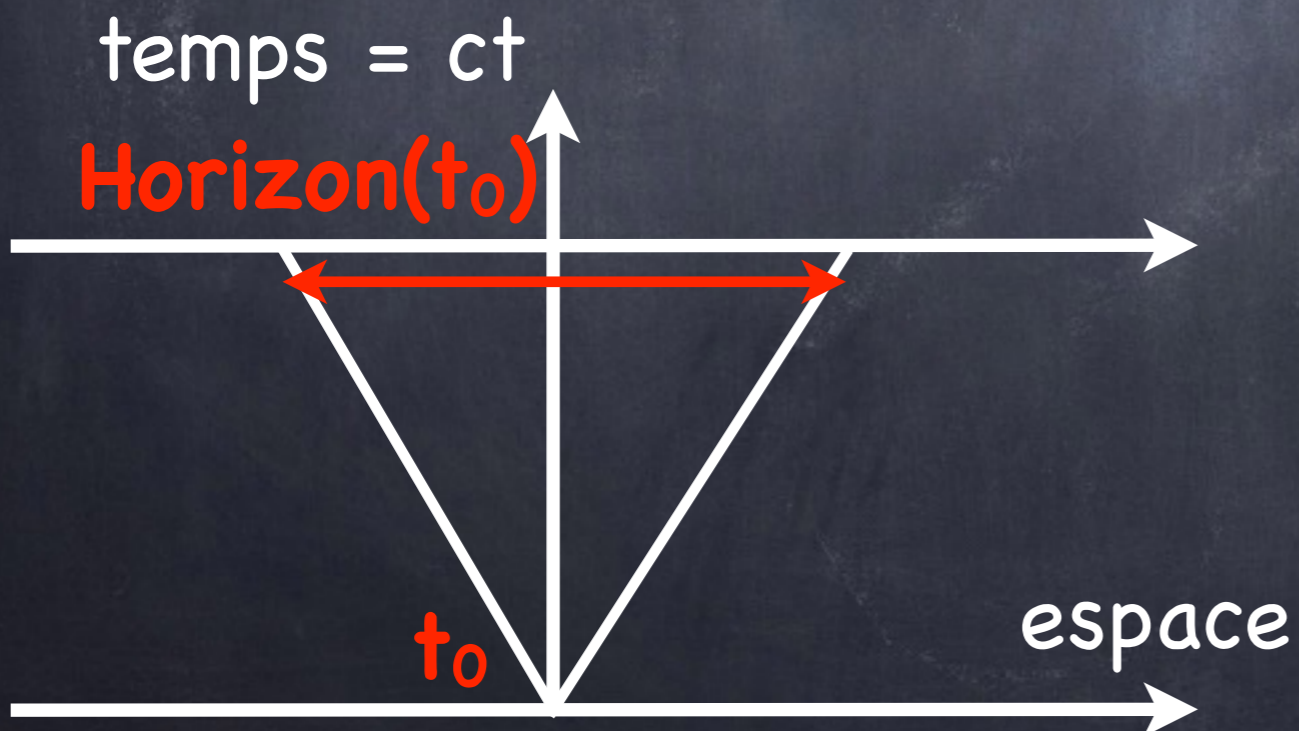
si CV, on ne pourra recevoir de signaux que des événements tels que :

Horizons et rayon de Hubble

l'horizon des événements

$$g(r_1) \leq g(r_{\text{HorEvt}}(t_0))$$

$$g(r_{\text{HorEvt}}(t_0)) = \int_0^{r_{\text{HorEvt}}(t_0)} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_0}^{+\infty} \frac{c dt'}{a(t')}$$



Horizons et rayon de Hubble

Les horizons des particules et des événements dépendent donc de l'histoire de l'évolution de l'univers et de son futur respectivement, contrairement au rayon de Hubble

remarque : l'horizon des événements se rencontre "quotidiennement" dans les trous noirs

Horizons et rayon de Hubble

Le rayon de Hubble

par définition c'est la distance pour laquelle la vitesse de fuite est égale à celle de la lumière

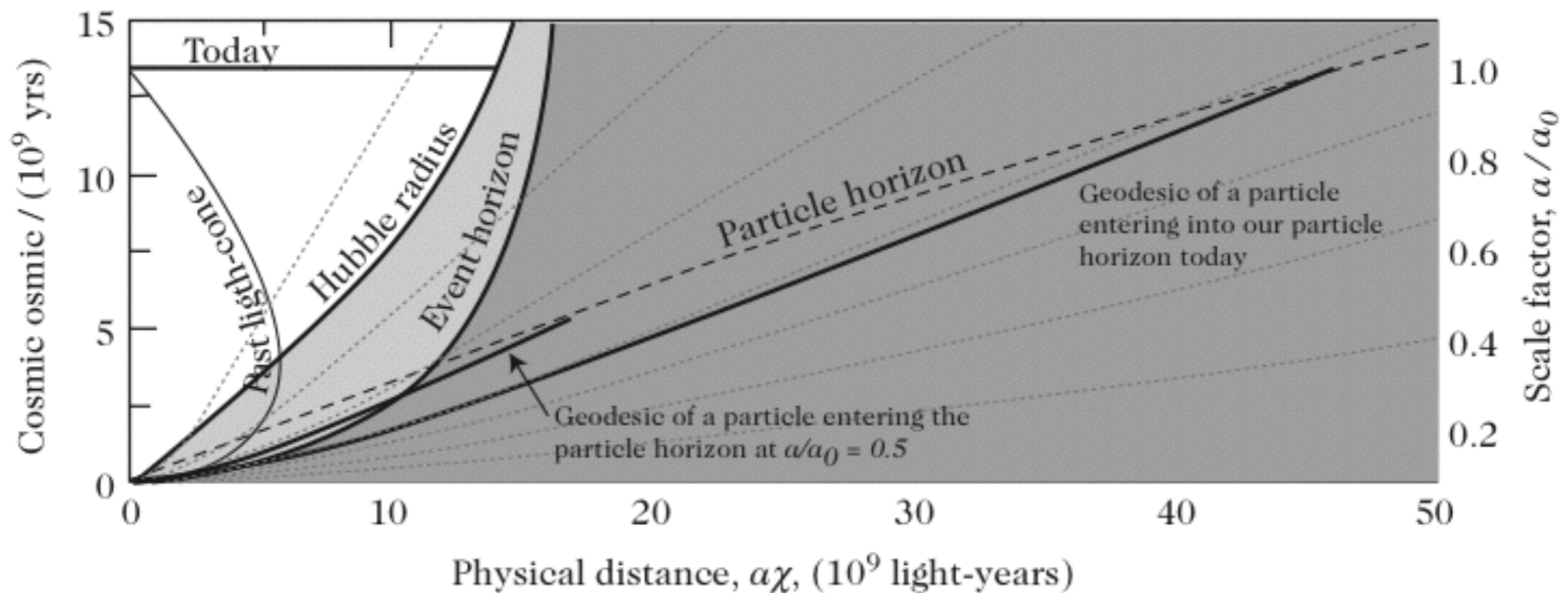
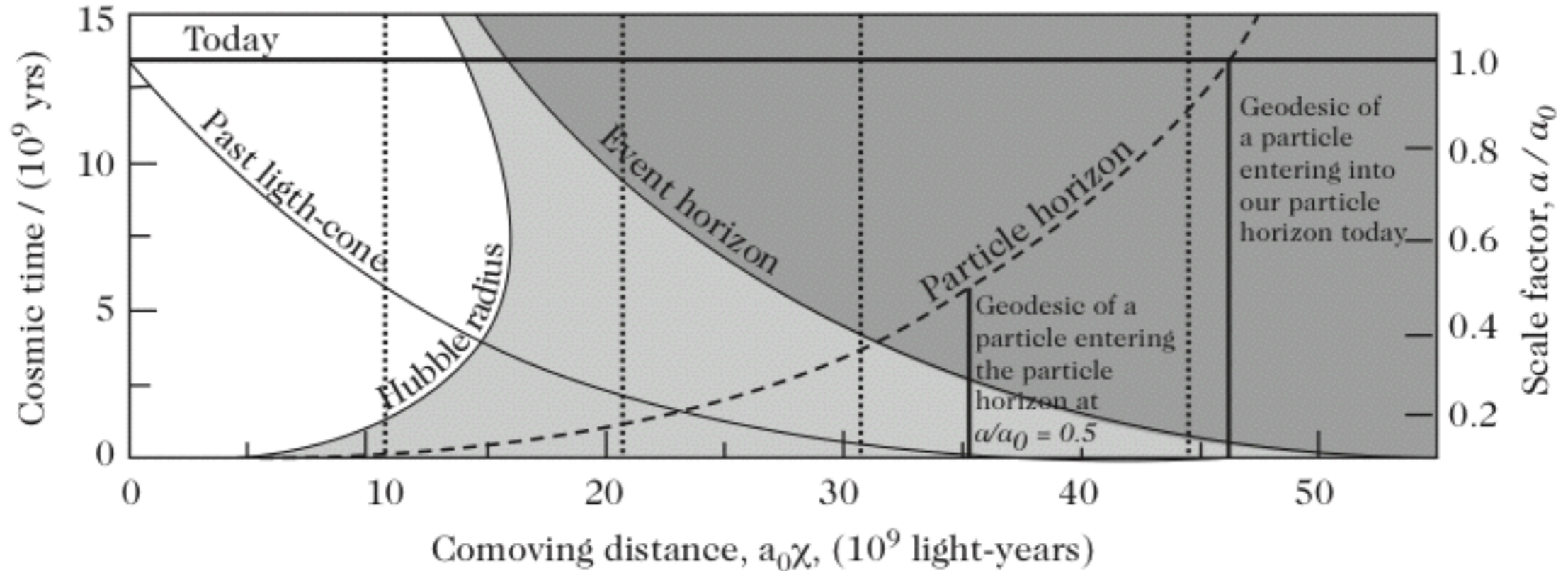
$$d_{\text{Hubble}}(t) = \frac{c}{H(t)}$$

remarque : H dépendant du temps, le rayon de Hubble peut croître ou décroître selon l'époque

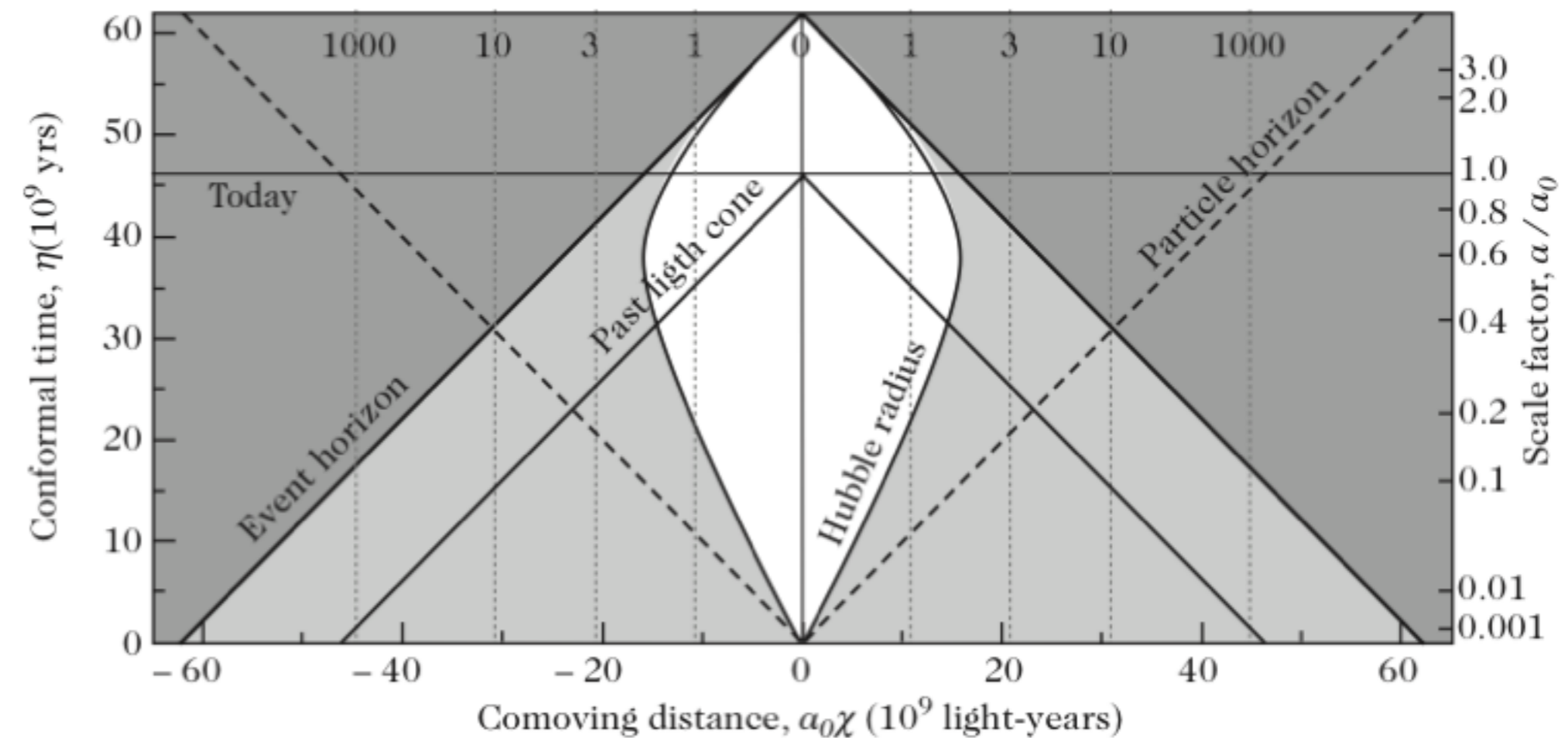
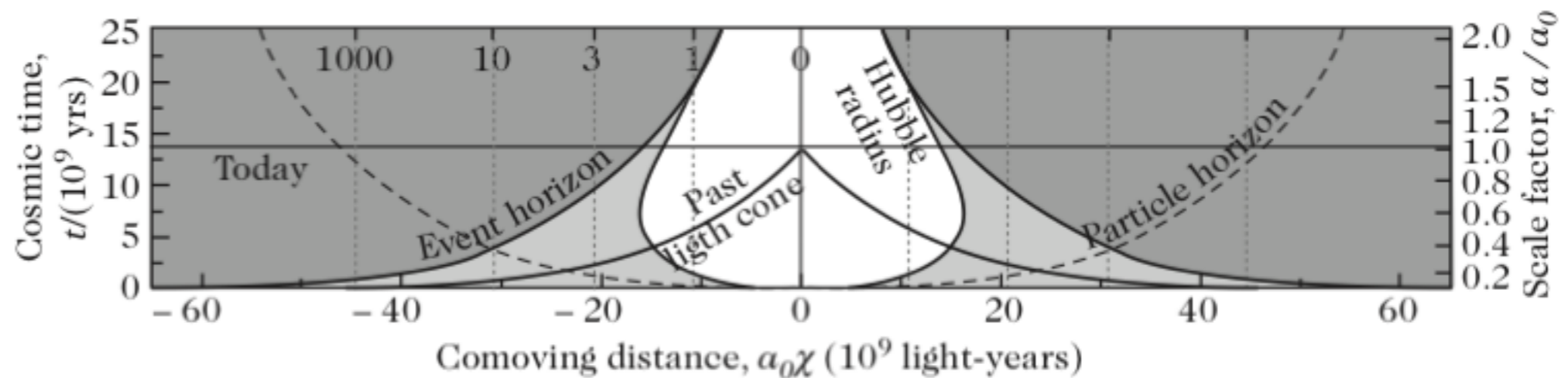
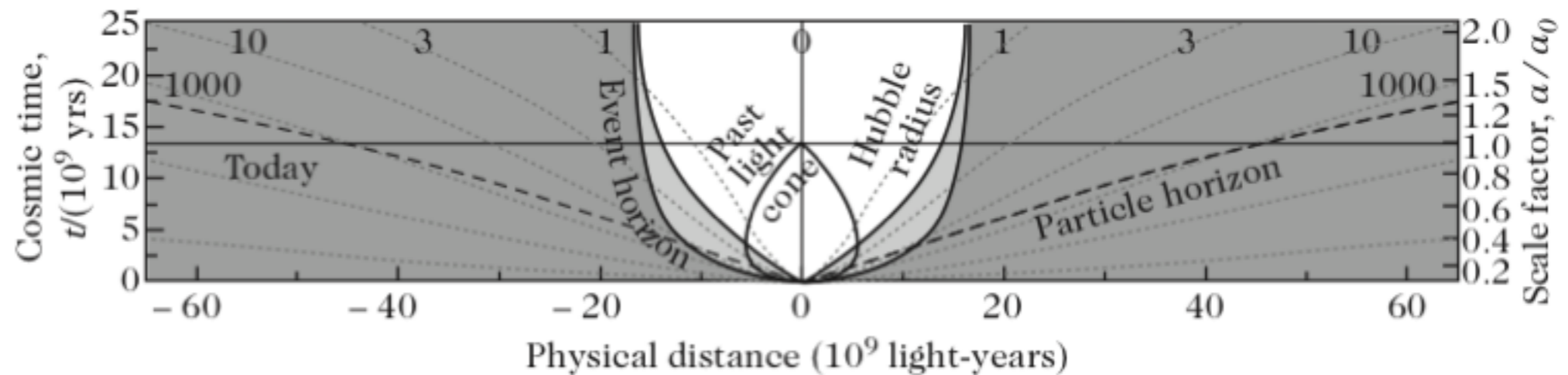
remarque : le rayon de Hubble ne dépend que de l'instant t où on le considère alors que l'horizon dépend de l'histoire passée de l'observateur jusqu'au temps t

un très bon papier de revue sur les notions difficiles d'horizon et rayon de Hubble : [astro-ph/0310808](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0310808)

Horizons et rayon de Hubble



Horizons et rayon de Hubble



Horizons et rayon de Hubble

Le rayon de Hubble

Exemple : un objet peut se trouver hors de la sphère de Hubble d'un observateur mais à l'intérieur de son horizon des particules

Exemple : une fois dans l'horizon des particules d'un observateur, un objet ne peut plus en sortir, contrairement à la sphère de Hubble

Parfois, la sphère de Hubble est appelée : horizon cosmologique effectif car c'est la grandeur pertinente dans les processus physiques pouvant se produire à une échelle donnée

Résolution des équations d'Einstein

jusque là, nous n'avons fait que raisonner sur un univers décrit par une métrique homogène et isotrope

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

on a étudié la partie géométrique (membre de gauche) avec une courbure constante mais qu'en est-il de la partie matière et énergie (membre de droite) ?

on considère un fluide parfait (principe cosmologique) remplissant l'univers

Résolution des équations d'Einstein

Fluide parfait : pas de conductivité thermique (pas de loi de Fourier), le flux d'énergie est directement lié au flux des particules constituant le fluide donc

$$T^{0i} = 0$$

dans un référentiel où le fluide est au repos
de plus : pas de viscosité donc pas de forces de cisaillement, donc toutes les forces sont orthogonales aux surfaces donc

T^{ij} est diagonale

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Résolution des équations d'Einstein

ou encore :

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)\delta^{\mu 0}\delta^{\nu 0} - p\eta^{\mu\nu}$$

dans un référentiel boosté :

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta T^{\alpha\beta} = (\rho + p)\Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 - p\eta^{\mu\nu}$$

or $\Lambda^\mu_0 = u^\mu$ on obtient finalement

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$$

pression

densité d'énergie

quadri vitesse

Résolution des équations d'Einstein

pour un observateur lié à l'expansion, le fluide est au repos partout et $u_\mu = \{1, \vec{0}\}$

$$T_{00} = \rho \quad \text{et} \quad T_{ij} = -p g_{ij}$$

méthode :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta}$$

$$= \Gamma^\rho_{\alpha\beta,\rho} - \Gamma^\rho_{\alpha\rho,\beta} + \Gamma^\rho_{\gamma\rho} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \Gamma^\rho_{\beta\gamma} \Gamma^\gamma_{\alpha\rho}$$

$$\text{et : } R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R_\alpha{}^\alpha$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\rho\beta,\gamma} + g_{\rho\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho})$$

Résolution des équations d'Einstein

la métrique étant : $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

$$ds^2 = dt^2 - a^2 g_{ij} dx^i dx^j$$

le calcul de la partie géométrique de l'équation d'Einstein fournit :

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{a}}{a} g_{ij},$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i,$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} [\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk}],$$

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a},$$

$$R_{ij} = - \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{k}{a^2} \right] g_{ij},$$

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right].$$

à comparer avec les composantes du tenseur énergie-impulsion

Les équations de Friedmann

partie (00)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

vient de (00)
et (ij)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

partie (ij)

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -8\pi Gp$$

On exploite également la conservation du tenseur
énergie-impulsion :

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$$

Les équations de Friedmann

partie (00)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

vient de (00)
et (ij)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

ATTENTION !

les équations de Friedmann ont été obtenues sous l'hypothèse du principe cosmologique par conséquent, elles ne sont pas valables pour des systèmes liés par la gravitation

Exercice !

Les équations de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

se retrouve partiellement par analogie newtonienne :
sphère de rayon variable $a(t)$ remplie de gaz de
particules sans interactions, homogène, isotrope.

Écrire la conservation de E_{tot}

Écrire la loi de Newton pour une particule de masse
 m sur le bord de la sphère

commenter le terme $+3p$

Exercice !

Les équations de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

Pas de pression car la particule test est au repos par rapport au gaz

Les équations de Friedmann

remarque :

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$$

peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho a^3) + p \frac{\partial}{\partial t} a^3 = 0$$

qui revient à : $dE + p dV = 0$

ce qui est la première loi de la thermodynamique

Les équations de Friedmann

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$$

Exercice :

calculer l'évolution de la densité en fonction du facteur d'échelle étant donnée une équation d'état du type

$$p = \omega \rho$$

Les équations de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

peut aussi être mise sous la forme :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho + \rho_{\text{courbure}} + \rho_{\text{vide}})$$

$$\rho_{\text{courbure}} = -\frac{3\kappa}{8\pi G a^2} \quad \text{et} \quad \rho_{\text{vide}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}.$$

Les paramètres cosmologiques

soit un univers plat sans constante cosmologique :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho = H^2 \frac{\rho}{\rho_c}$$

ceci définit la densité critique à un instant t :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

ayant pour valeur aujourd'hui (avec $h=0.72$) :

$$\rho_{c0} \sim 10^{-29} h^2 \text{ g.cm}^{-3}$$

ce qui correspond à environ 5 protons/m³

Les paramètres cosmologiques

et en laissant la possibilité d'une courbure :

$$\frac{k}{a^2} = H^2 \left(\frac{\rho}{\rho_c} - 1 \right)$$

donc si

$\rho = \rho_c$ l'univers est plat ($k=0$)

$\rho > \rho_c$ l'univers est fermé ($k=1$)

$\rho < \rho_c$ l'univers est ouvert ($k=-1$)

le contenu de l'univers décide de sa géométrie

Les paramètres cosmologiques

et dans le cas général avec constante cosmologique,
on peut écrire :

$$\begin{aligned} H^2 &= H^2 \frac{\rho}{\rho_c} - H^2 \frac{k}{a^2 H^2} + H^2 \frac{\Lambda}{3H^2} \\ &= H^2 (\Omega_m - \Omega_k + \Omega_\Lambda) \end{aligned}$$

$$\Omega_k = \Omega_m + \Omega_\Lambda - 1$$

avec

$$\Omega_m = \Omega^R + \Omega^{NR} = (\rho^R + \rho^{NR}) / \rho_c \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$$

$$\Omega_k = \frac{k}{a^2 H^2}$$

Les paramètres cosmologiques

$$\Omega_k = \Omega_m + \Omega_\Lambda - 1$$

La cosmologie actuelle a pour but de mesurer les paramètres cosmologiques le plus précisément possible. De leur connaissance découle la compréhension de l'évolution de l'univers, depuis sa naissance (ou presque) jusqu'à son éventuelle fin.

En effet, leur valeur numérique permet de résoudre numériquement (et parfois analytiquement comme dans les exercices qui viennent) les équations de Friedmann et donc de calculer $a(t)$, l'âge etc...

Exercice!

Dynamique de l'univers

les inconnues sont p , ρ et a

3 équations obtenues (les 2 de Friedmann et la conservation du tenseur énergie-impulsion) mais 2 sont indépendantes, il manque une contrainte
cette contrainte vient de l'équation d'état de la matière :

$$p = p(\rho)$$

muni de cette équation d'état, on peut tout résoudre en supposant que la courbure et la constante cosmologiques sont négligeables selon que :

la matière non relativiste domine $p^{\text{NR}} = 0$

la matière relativiste domine $p^{\text{R}} = \rho^{\text{R}}/3$

Dynamique de l'univers

la matière non relativiste domine $p^{\text{NR}} = 0$

$$\rho = nmc^2 + \frac{1}{2}nm \langle v^2 \rangle$$

$$p = \frac{1}{3}nm \langle v^2 \rangle \sim \frac{2}{3}\rho \langle (v/c)^2 \rangle \ll \rho$$

$$p/\rho \ll 1$$

la matière relativiste domine $p^{\text{R}} = \rho^{\text{R}}/3$

$$\rho = a_{SB}T^4$$

$$p = \frac{1}{3}a_{SB}T^4$$

Exercice !

Dynamique de l'univers

Pour l'univers d'Einstein-de Sitter : matière non relativiste, courbure nulle et sans constante cosmologique, résoudre exactement l'équation donnant l'évolution du facteur d'échelle.

En déduire l'âge de l'univers associé en supposant que $H_0 = 72 \text{ km/s/Mpc}$.

Des mesures d'âge de vieilles étoiles donnent 12.5 milliards d'années, qu'en concluez-vous ?

Dynamique de l'univers

Exercice !

Étudier le cas des univers avec courbure non nulle et sans constante cosmologique en présence de matière non-relativiste.

Quelles durées de vie ont ces univers ?

Quelles sont leurs tailles ?

Dynamique de l'univers

Exercice !

En supposant que la matière est négligeable, résoudre les équations selon que la courbure (univers ouvert donc courbure négative) ou la constante cosmologique domine.

Exercice !

Dynamique de l'univers

remarque sur la constante cosmologique

Historiquement, Einstein a ajouté la constante cosmologique à la main dans le seul but de rendre l'univers statique.

Expliquez en quoi la constante cosmologique remplit ce rôle et à quelle(s) condition(s) ; discutez la solution physique obtenue.

Étudiez l'évolution de l'univers de de Sitter (univers vide et plat).

Résumé

matière non-relativiste, relativiste

$$k = 0, \Lambda = 0$$

$$a(t) = a_0 \left(1 + \frac{3}{2} H_0 (t - t_0) \right)^{2/3} \quad a(t) = a_0 (1 + 2H_0 (t - t_0))^{1/2}$$

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \sim 9 \times 10^9 \text{ ans}$$

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} = 6.75 \times 10^9 \text{ ans}$$

$$k = \pm 1, \Lambda = 0$$

$$\dot{a}^2 = \frac{\Omega_{0,R,NR}}{|1 - \Omega_{0,R,NR}|} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-(1+3w)} - k$$

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{\Omega_{0,R,NR}}{|1 - \Omega_{0,R,NR}|} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \times \begin{matrix} \sinh^{1/\alpha} \alpha \eta, & \sin^{1/\alpha} \alpha \eta \\ \mathbf{k}=-1 & \mathbf{k}=1 \end{matrix} \quad \alpha = \frac{1+3w}{2}$$

Dynamique de l'univers

résumé des solutions des équations de Friedmann

équation d'état	domination	ρ	a	époque
$p = \rho/3$	radiation	$\propto 1/a^4$	$\propto t^{1/2}$	avant t_{eq}
$p = 0$	matière	$\propto 1/a^3$	$\propto t^{2/3}$	après t_{eq}
—	courbure κ/a^2 , $\kappa > 0$	—	$\propto t$	aujourd'hui ?
$p = -\rho$	vide	—	$\propto e^{Ht}$	

Dynamique de l'univers

résumé des solutions des équations de Friedmann

équation d'état	domination	ρ	a	époque
$p = \rho/3$	radiation	$\propto 1/a^4$	$\propto t^{1/2}$	avant t_{eq}
$p = 0$	matière	$\propto 1/a^3$	$\propto t^{2/3}$	après t_{eq}
—	courbure $\kappa/a^2, \kappa > 0$	—	$\propto t$	aujourd'hui ?
$p = -\rho$	vide	—	$\propto e^{Ht}$	

remarque :

pour la matière aussi bien que pour le rayonnement, on trouve

$$\rho \propto 1/t^2$$

commenter !

Les paramètres cosmologiques

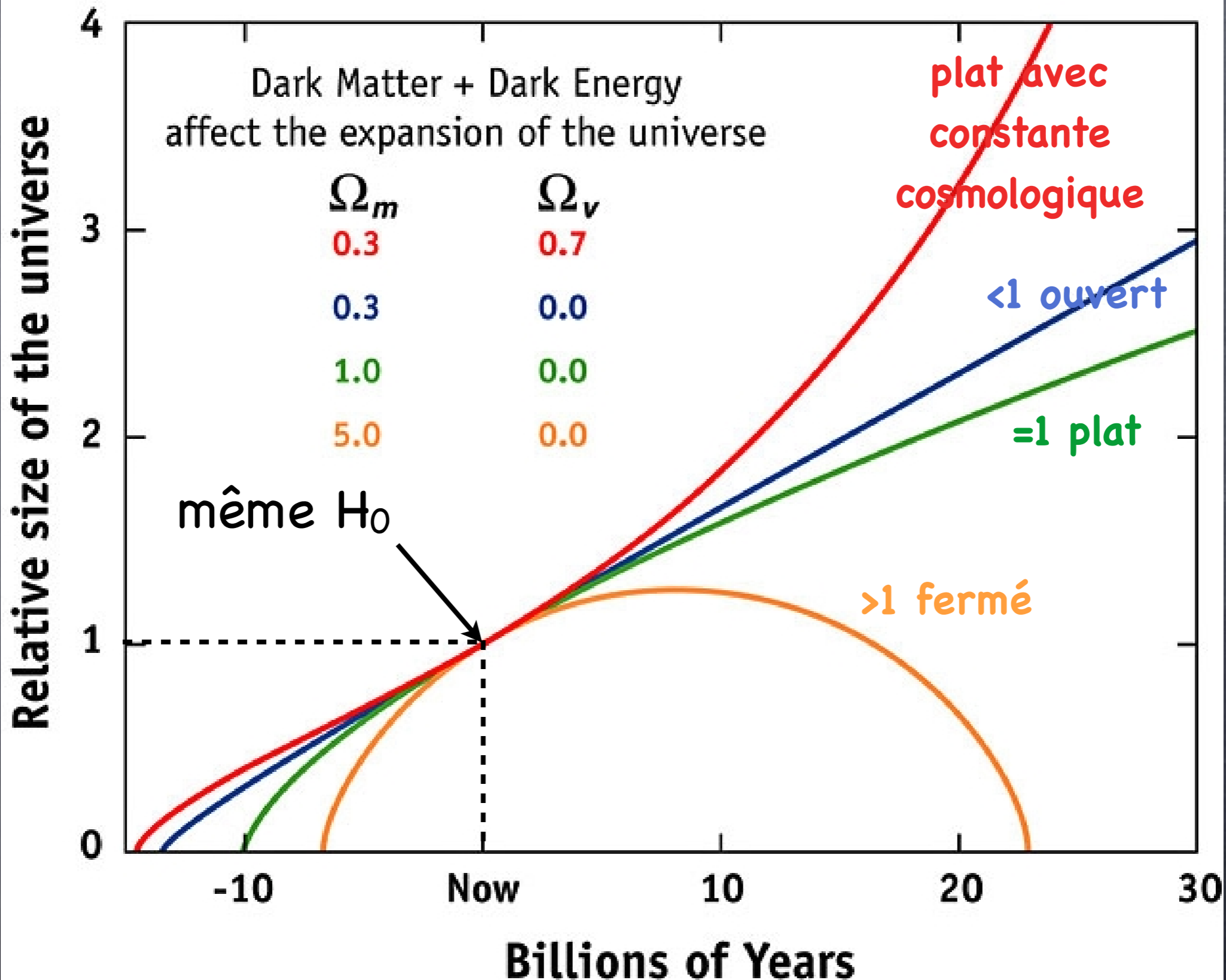
$$\Omega_k = \Omega_m + \Omega_\Lambda - 1$$

Objectif : mesurer les paramètres cosmologiques

$\Omega_m + \Omega_\Lambda > 1$	fermé	expansion éternelle ou Big-Crunch
$\Omega_m + \Omega_\Lambda < 1$	ouvert	expansion éternelle
$\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$	ouvert (et plat !)	expansion éternelle

Les paramètres cosmologiques

matière non relativiste



Les paramètres cosmologiques

traitement du cas général

pour les densités d'énergie, nous avons :

$$\rho_m^{\text{NR}} \propto a^{-3}$$

$$\rho_m^{\text{R}} \propto a^{-4}$$

soit

$$\rho_m^{\text{R}} = \rho_{0c} (1+z)^4 \Omega_0^{\text{R}}$$

$$\rho_m^{\text{NR}} = \rho_{0c} (1+z)^3 \Omega_0^{\text{NR}}$$

le terme de courbure est en $1/a^2$ $\Omega_k = \frac{k}{a^2 H^2}$

la constante cosmologique est constante $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$

Les paramètres cosmologiques

traitement du cas général

et donc les Ω varient de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_m = \Omega^R + \Omega^{NR} = \frac{H_0^2}{H^2} (\Omega_0^R (1+z)^4 + \Omega_0^{NR} (1+z)^3) \\ \Omega_\Lambda = \frac{H_0^2}{H^2} \Omega_{0\Lambda} \\ \Omega_\kappa = \frac{H_0^2}{H^2} (1+z)^2 \Omega_{0\kappa} \end{array} \right.$$

Les paramètres cosmologiques

traitement du cas général

$$\begin{aligned} H^2 &= H_0^2 \times \underbrace{(\Omega_0^R (1+z)^4 + \Omega_0^{\text{NR}} (1+z)^3 - \Omega_{0\kappa} (1+z)^2 + \Omega_{0\Lambda})}_{E(z)^2} \\ &= H_0^2 \times E(z)^2 \end{aligned}$$

intérêt de cette écriture :

pouvoir tout exprimer (les distances, les durées)
en fonctions de quantités **observables** comme le
redshift et les paramètres cosmologiques

Les paramètres cosmologiques

traitement du cas général

$$\frac{cdt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

exprimer le dt en fonction de dz pour exprimer
la distance comobile en fonction de H(z)

$$g(r) = \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}$$

remarque : $H(z) = H_0 E(z)$

Les paramètres cosmologiques

$$g(r) = \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}$$

pour des redshifts petits, on a

$$\int_0^z \frac{dz'}{E(z')} = z - \frac{4\Omega_{0R} + 3\Omega_{0NR} - 2\Omega_{0k}}{4} z^2 + o(z^2)$$

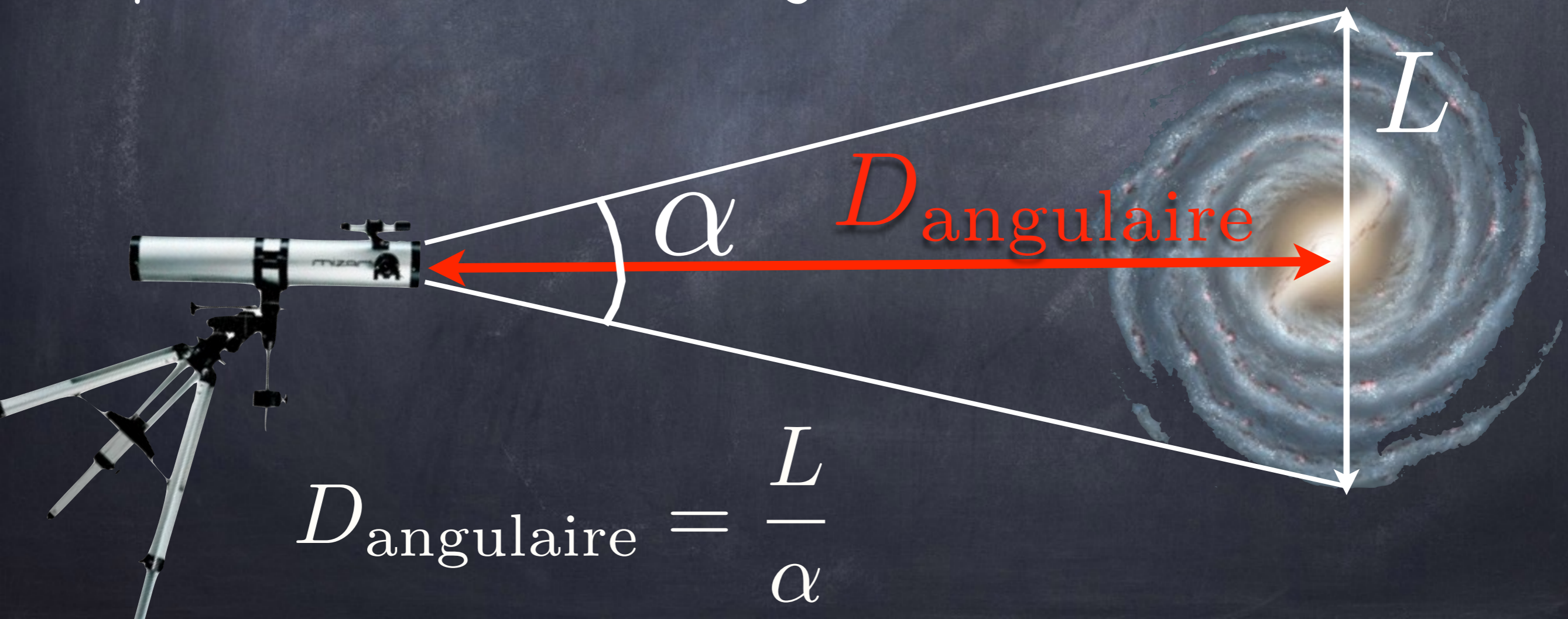
pour des objets proches, l'influence de la constante cosmologique est négligeable

Distance angulaire

Exercice!

la distance **propre** entre 2 objets n'est **pas mesurable**
(il faudrait une infinité de mesures instantanées)

on définit 2 distances à partir de notre
expérience "terrestre" (analogie Euclidienne) :



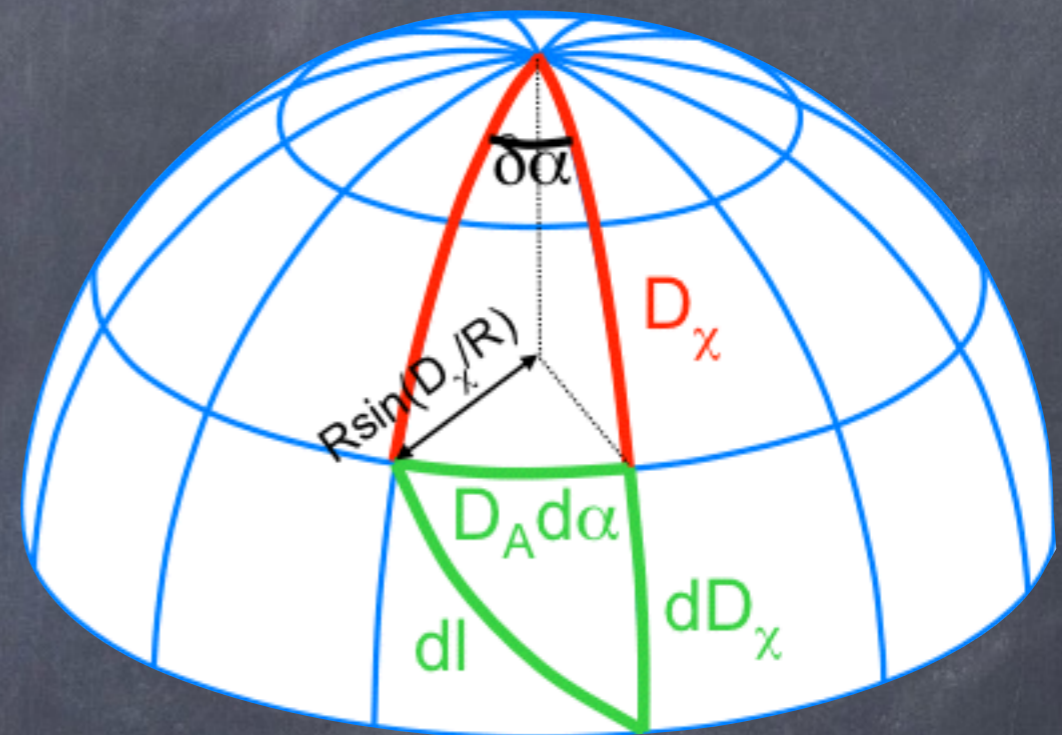
$$D_{\text{angulaire}} = \frac{L}{\alpha}$$

Distance angulaire

analogie dans un espace de courbure positive à 2D

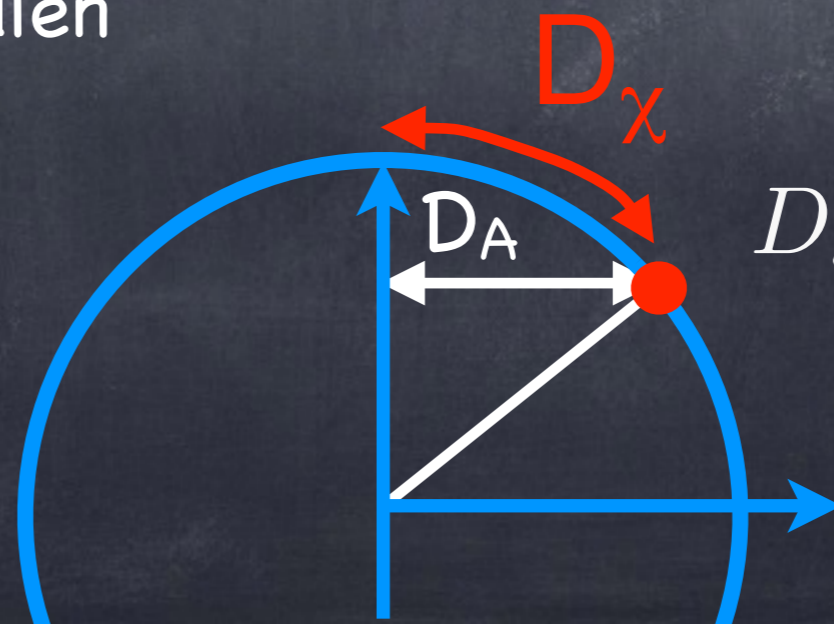
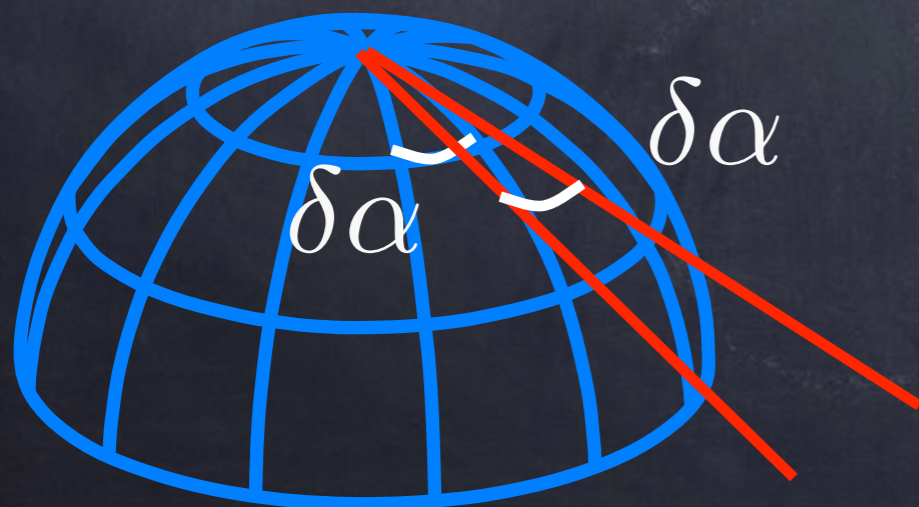
l'observateur observe un objet de taille physique connue sous un angle $\delta\alpha$ il lui associe la distance angulaire

$$D_{\text{ang}} = dl / \delta\alpha$$



D_x est la distance propre

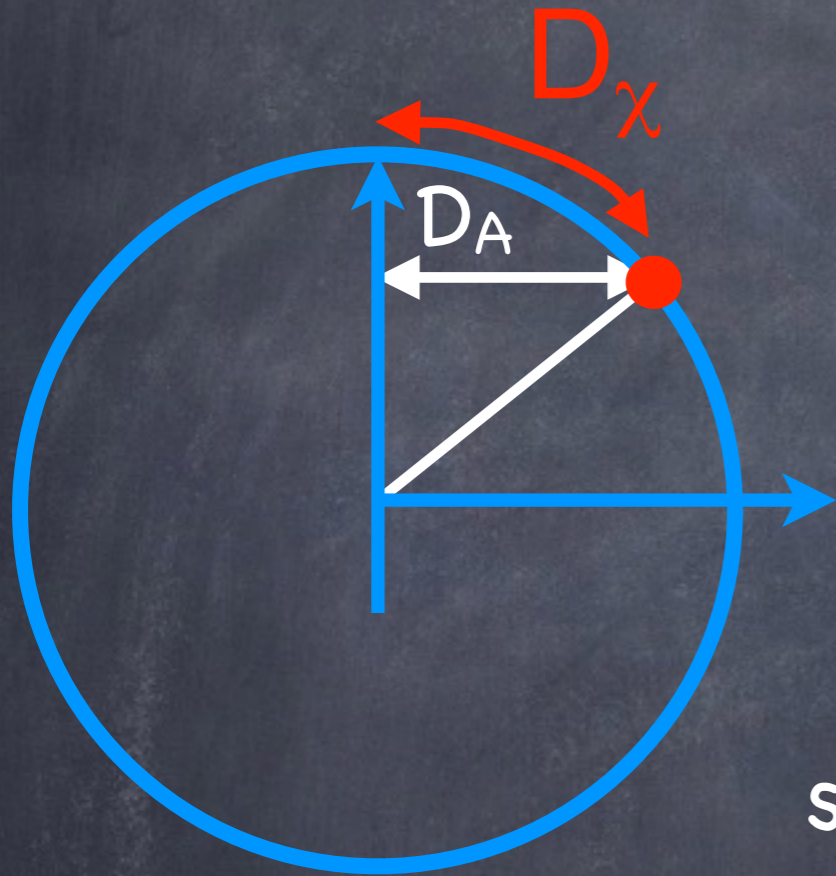
même séparation angulaire mais interprétée dans un espace euclidien



$$D_{\text{ang}} = R \sin \frac{D_x}{R}$$

Distance angulaire

analogie dans un espace à 2D



$$D_{\text{ang}} = R \sin \frac{D_{\chi}}{R}$$

si R est infini (espace plat euclien),

$$D_{\text{ang}} = D_{\chi}$$

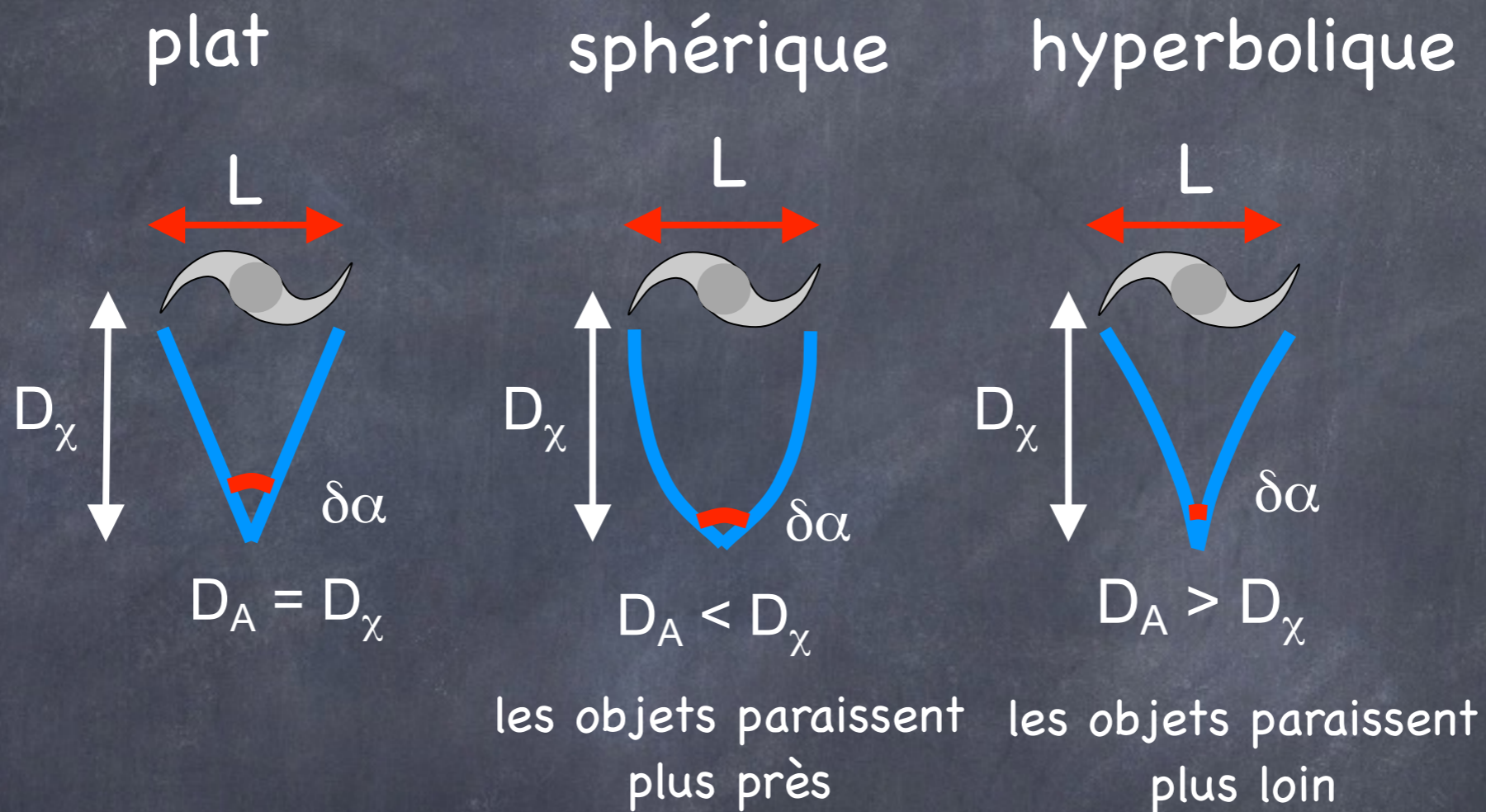
si l'univers est fermé,

$$\text{(lentille CV)} \quad D_{\text{ang}} = R \sin \frac{D_{\chi}}{R} < D_{\chi}$$

si l'univers est ouvert, $D_{\text{ang}} = R \sinh \frac{D_{\chi}}{R} > D_{\chi}$

(lentille DV)

Distance angulaire



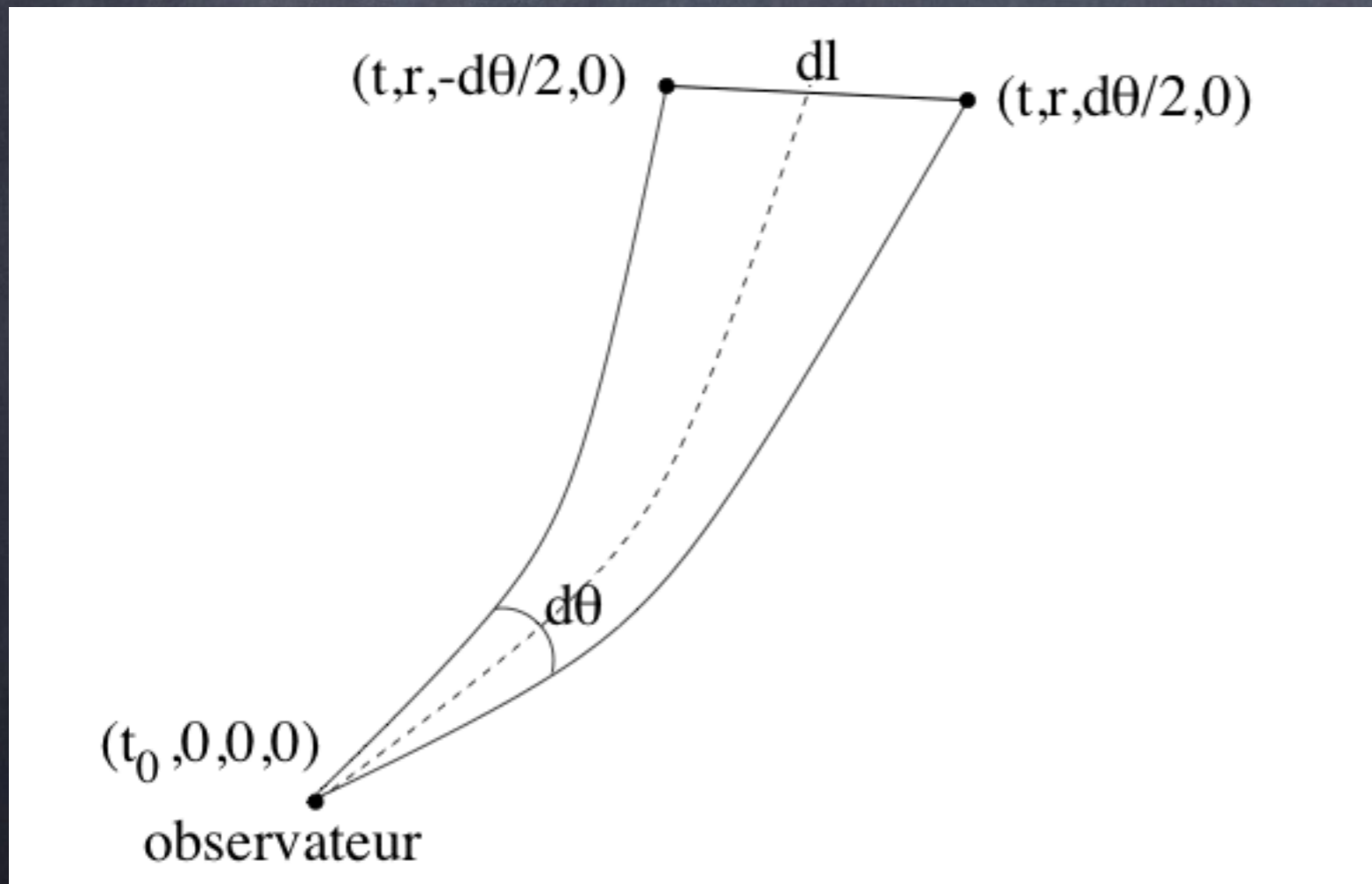
Mesurer la taille angulaire d'un objet de taille physique connue à distance comobile connue permet de mesurer la courbure de l'espace

Distance angulaire

$$D_{\text{ang}} = \frac{d\ell}{d\theta}$$

taille physique

angle sous-tendu



deux photons partent de la source au même moment

$$d\ell = a(t)r d\theta$$

$$D_{\text{ang}} = a(t)r$$

au moment de l'émission !

Distance angulaire

$$D_{\text{ang}} = a(t) r = \frac{a_0}{1+z} g^{-1}(g(r))$$

$$D_{\text{ang}} = \frac{a_0}{1+z} g^{-1} \left(\frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right)$$

pour des objets proches, on a donc :

$$D_{\text{ang}} = \frac{cz}{H_0} + o(z)$$

et pour des objets lointains :

$$D_{\text{ang}} \propto \frac{1}{1+z}$$

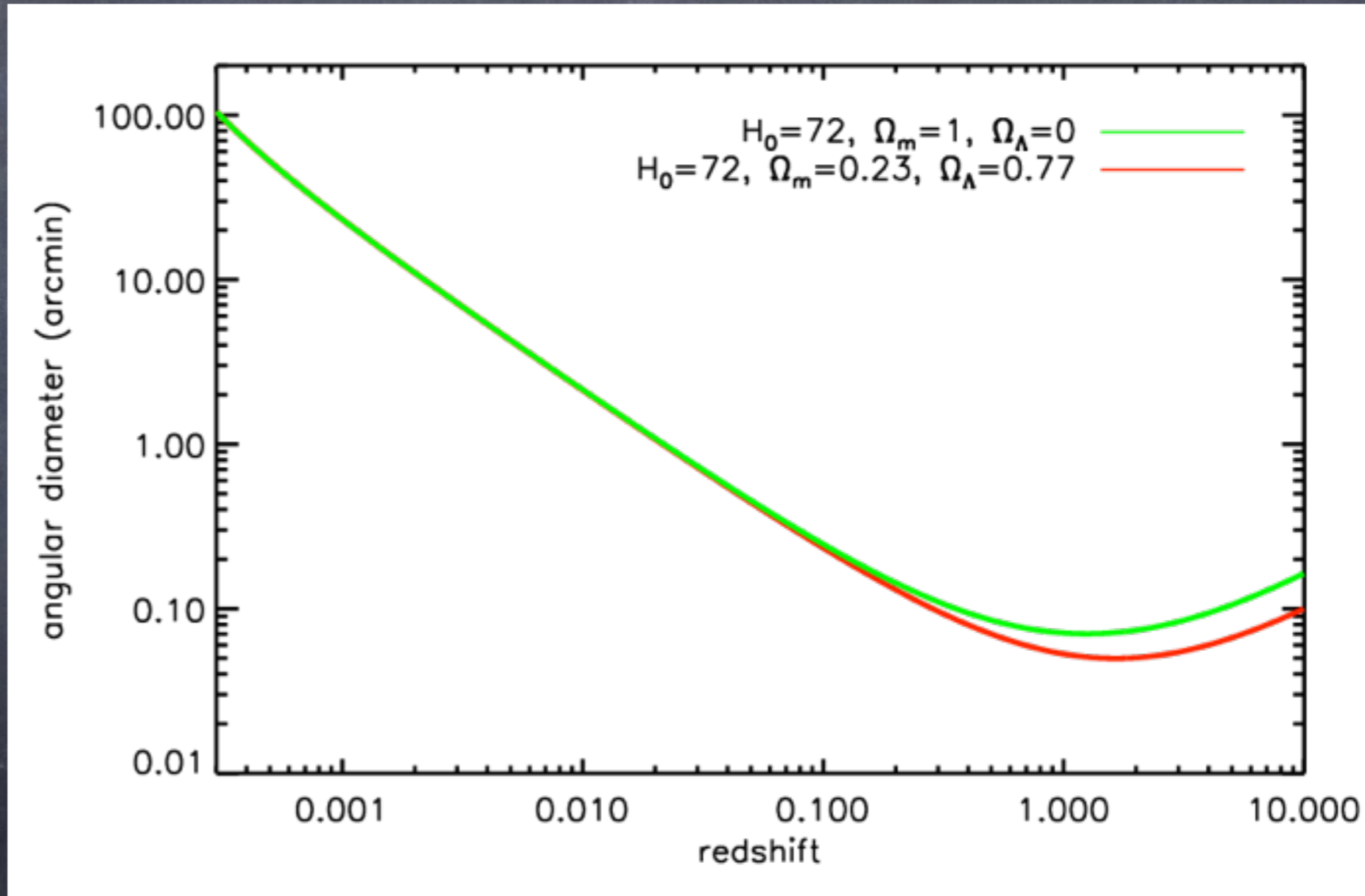
Distance angulaire

objets proches :

$$\alpha \propto 1/z$$

objets lointains :

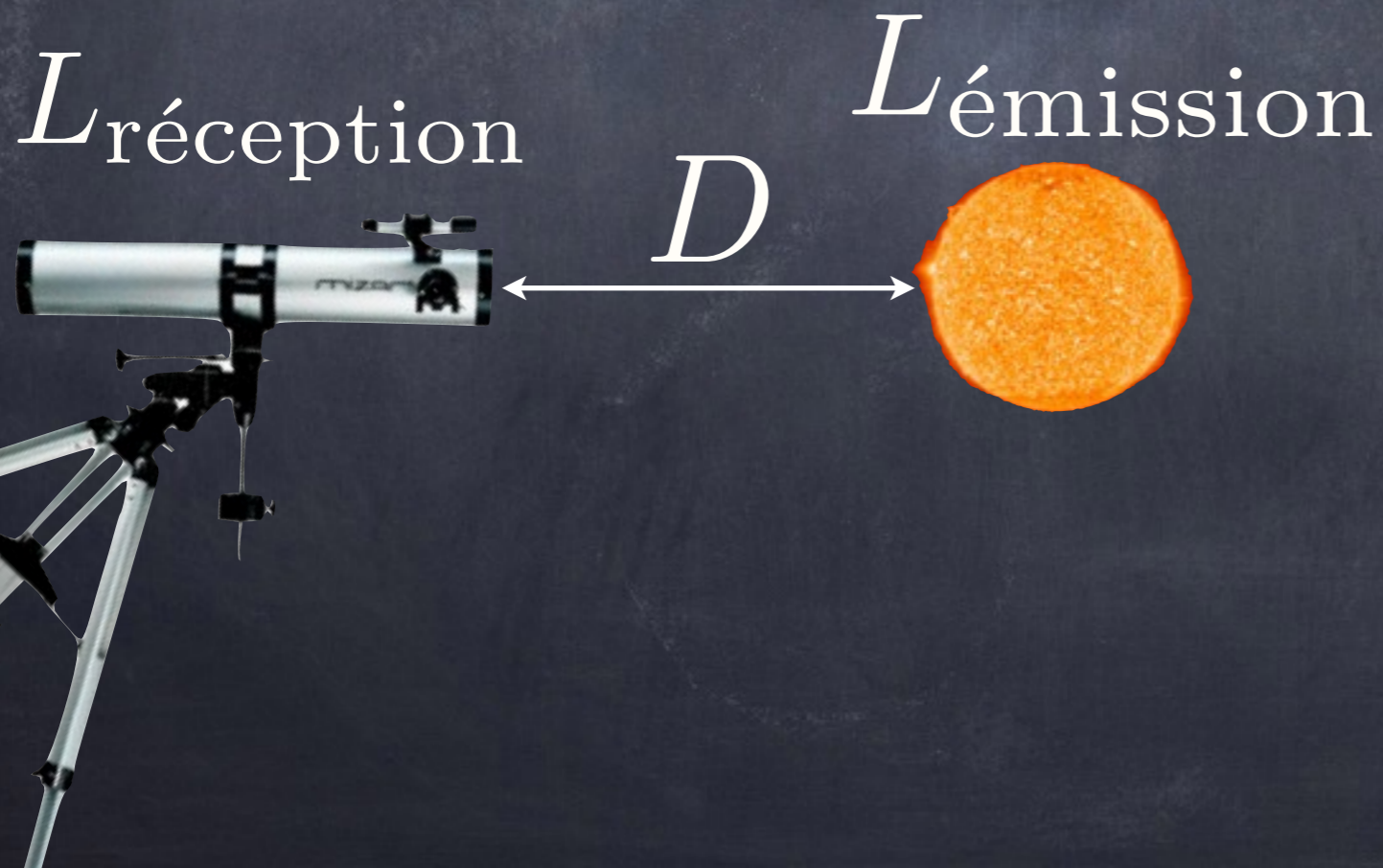
$$\alpha \propto z!$$



Distance de luminosité

On utilise également la distance de luminosité :

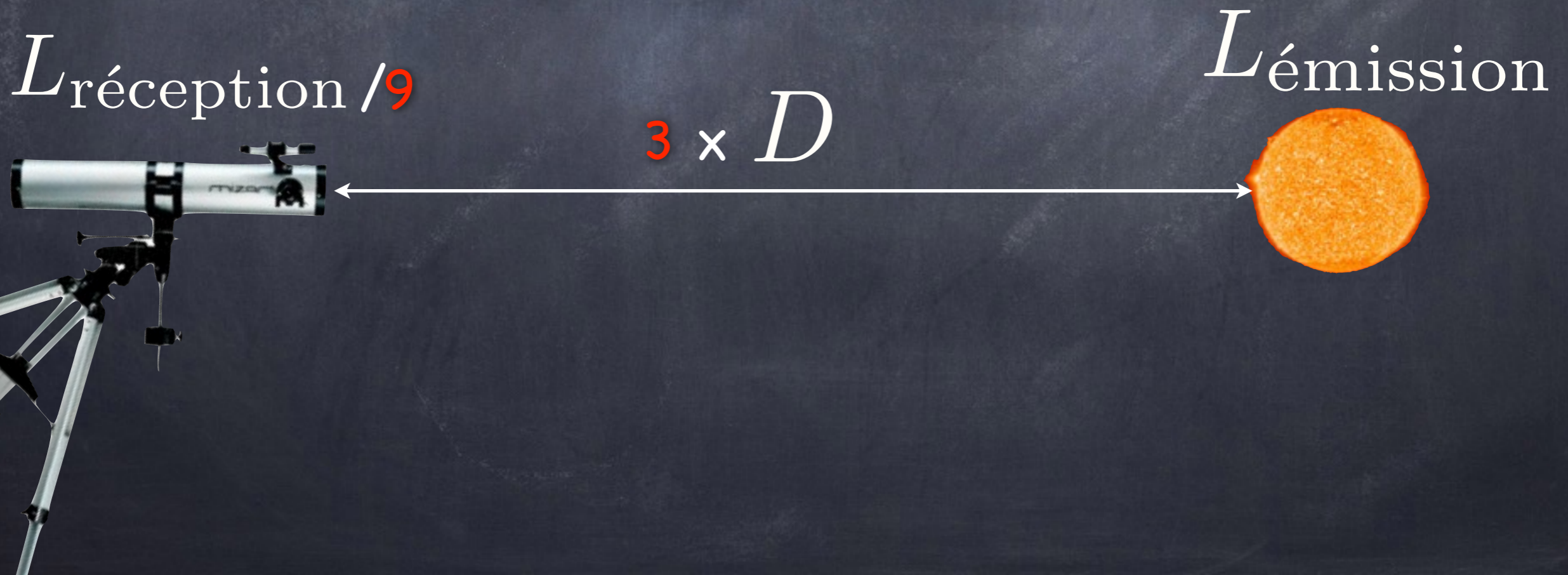
univers Euclidien : la luminosité apparente d'une source (étoile, galaxie...) diminue comme le **carré** de la distance



Distance de luminosité

On utilise également la distance de luminosité :

univers Euclidien : la luminosité apparente d'une source (étoile, galaxie...) diminue comme le **carré** de la distance



Distance de luminosité

$$\ell = \frac{L}{4\pi D_L^2}$$

flux reçu par l'observateur en $r=0$ à t_0

luminosité absolue de l'objet émettant en r_1 à t_1

distance de luminosité, par définition

$$z = \frac{\lambda_e - \lambda_0}{\lambda_e} : \text{effet de l'expansion sur 1 photon}$$

en considérant 2 photons quittant la galaxie en r_1 à 2 instants différents t_1 et t_1+dt_1 et leur détection en $r=0$ à t_0 et t_0+dt_0 on a de même :

$$\frac{dt_0}{dt_1} = \frac{a_0}{a_1} = 1 + z$$

Distance de luminosité

$$\ell = \frac{L}{4\pi D_L^2}$$

flux reçu par l'observateur en $r=0$ à t_0

luminosité absolue de l'objet émettant en r_1 à t_1

distance de luminosité, par définition

$$z = \frac{\lambda_e - \lambda_0}{\lambda_e} : \text{effet de l'expansion sur 1 photon}$$

en considérant 2 photons quittant la galaxie en r_1 à 2 instants différents t_1 et t_1+dt_1 et leur détection en $r=0$ à t_0 et t_0+dt_0 on a de même :

$$\frac{dt_0}{dt_1} = \frac{a_0}{a_1} = 1 + z$$

l'énergie et le flux décroissent en $1/(1+z)$

Distance de luminosité

Exercice!

une source en r_1 et de luminosité L émet N photons d'énergie E_1 pendant dt_1 soit $L = \frac{N E_1}{dt_1}$

à t_0 , quelle distance ont parcouru les photons ? Sur quelle surface sont-ils distribués ? a_0

$g(r_1)$

ces photons ont une énergie $E_0 = E_1 a_1/a_0$ et leur flux est $1/dt_0 = (a_1/a_0) (1/dt_1)$

le flux d'énergie détecté est donc :

$$\phi = \frac{N E_0}{4\pi a_0^2 r_1^2} \frac{1}{dt_0} = \frac{N E_1}{4\pi a_0^2 r_1^2} \frac{1}{dt_1} \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{L}{4\pi D_L^2}$$

Distance de luminosité

Exercice!

une source en r_1 et de luminosité L émet N photons d'énergie E_1 pendant dt_1 soit $L = \frac{N E_1}{dt_1}$

à t_0 , quelle distance ont parcouru les photons ? Sur quelle surface sont-ils distribués ? a_0

$g(r_1)$ et de surface $4\pi a_0^2 r_1^2$

ces photons ont une énergie $E_0 = E_1 a_1/a_0$ et leur flux est $1/dt_0 = (a_1/a_0) (1/dt_1)$

le flux d'énergie détecté est donc :

$$\phi = \frac{N E_0}{4\pi a_0^2 r_1^2} \frac{1}{dt_0} = \frac{N E_1}{4\pi a_0^2 r_1^2} \frac{1}{dt_1} \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{L}{4\pi D_L^2}$$

Distance de luminosité

et finalement :

$$D_L = a_0 r_1 (1 + z)$$

Dans un univers en expansion, on trouve :

$$D_L = D_{\text{ang}} (1 + z)^2$$

Temps écoulé

Exercice !

il est primordial de pouvoir associer un âge à un objet de redshift z donné, déjà pour calculer l'âge de l'univers

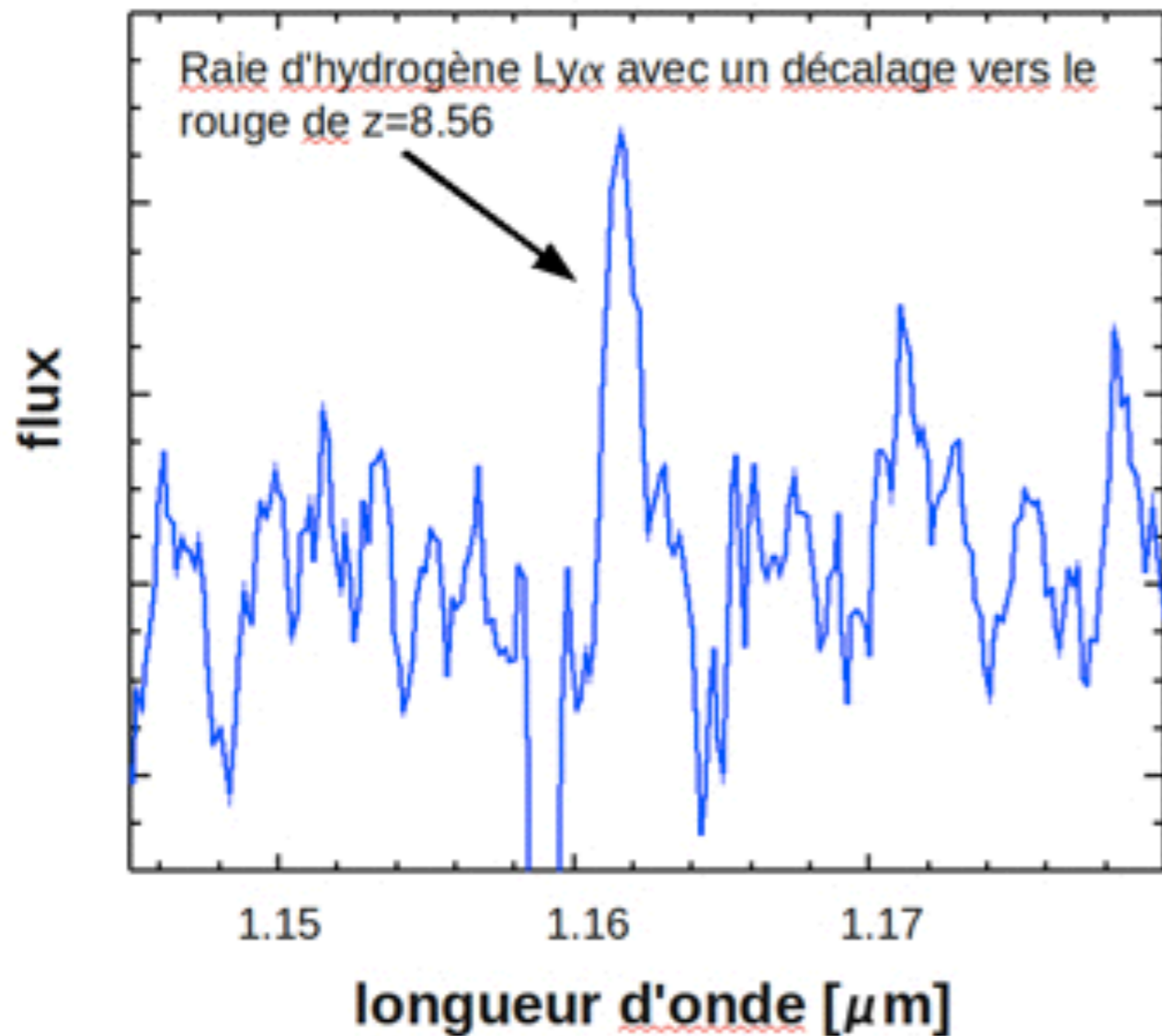
Partir de $H(z) = H_0 E(z)$, séparer les variables, exprimer da en dz et conclure l'expression de l'intervalle de temps cosmique

$$t(z_1) - t(z_2)$$

comment se calcule l'âge de l'univers ?

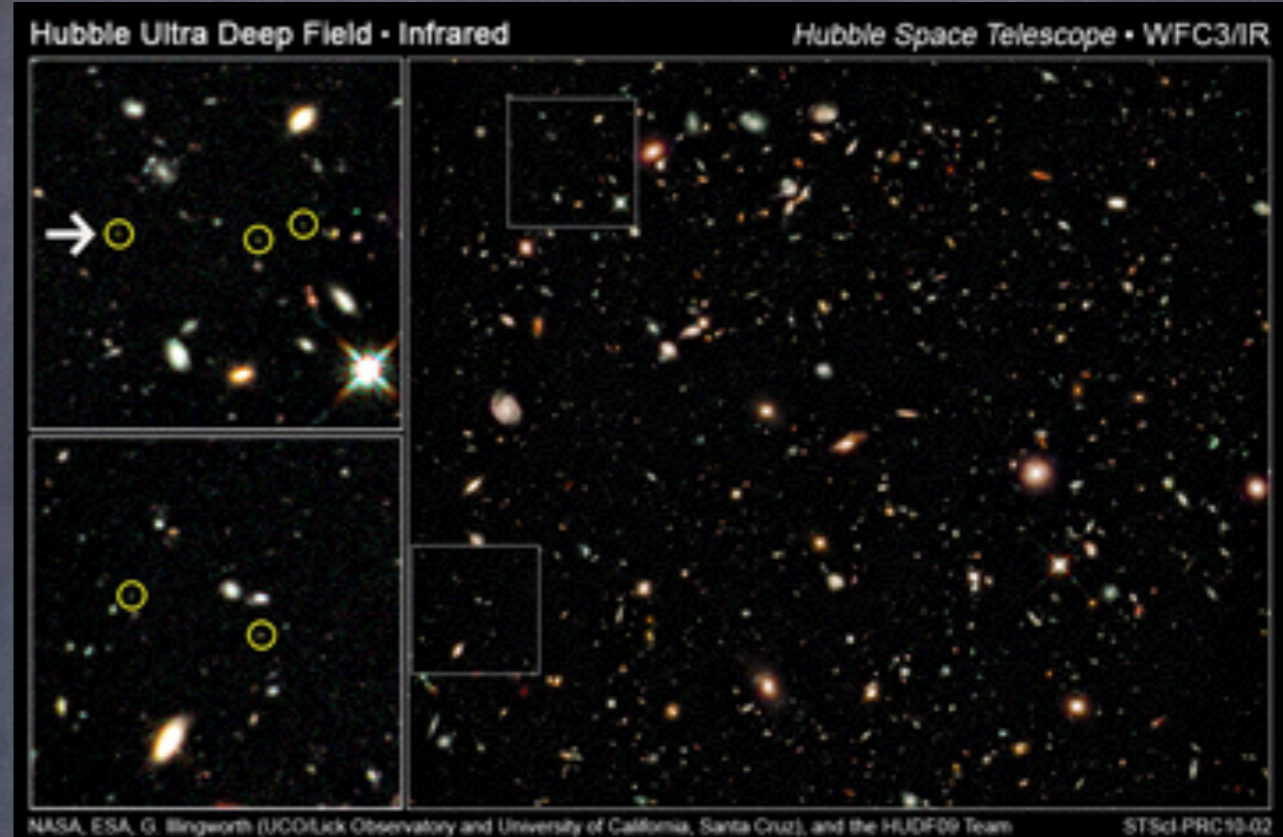


21/10/2010



© ESO. / N.P.H. Nesvadba (Université Paris-Sud 11 / CNRS) et al.

Signal de la raie d'hydrogène ionisé Ly-alpha qui a été détecté grâce au VLT après 16 heures de pose. Cette raie a été émise dans l'ultraviolet. Son décalage dans l'infrarouge proche est due à l'éloignement de la galaxie.



© NASA/courtesy of nasaimages.org

Sur cette image infrarouge prise avec Hubble (NASA-ESA), figure la galaxie UDFy-38135539 dont le décalage vers le rouge vient d'être mesuré par Matt Lehnert et collaborateurs. Cette galaxie est signalée par une flèche blanche.

less than 600million years after the Big Bang UDFy-38135539 (ref. 5) is at a redshift of $z = 8.5549 \pm 0.0002$, which is greater than those of the previously known most distant objects, at $z = 8.2$ (refs 6 and 7) and $z = 6.96$

Temps écoulé

Exercice !

en déduire la distance parcourue par la lumière depuis le Big-Bang

Pour un objet observé de redshift z faible, donner le temps écoulé à l'ordre 2 en z entre l'émission de lumière par cet objet et la reception aujourd'hui.

Exercice !

Paramètre de décélération

en développant le facteur d'échelle à l'ordre 2 autour de t_0 , on obtient :

$$a(t) = a_0 \left(1 + H_0 \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \right)$$

q_0 étant le paramètre de décélération

exprimer q_0 en fonction de a_0 , \dot{a}_0 , \ddot{a}_0

quelle est la dynamique du facteur d'échelle selon le signe de q_0 ?

Exercice ! Paramètre de décélération

en regroupant les résultats des 2 exercices précédents, en déduire l'expression de q_0 en fonction des paramètres cosmologiques

Exercice ! Paramètre de décélération

en regroupant les résultats des 2 exercices précédents, en déduire l'expression de q_0 en fonction des paramètres cosmologiques

$$q_0 = \Omega_{0R} + \frac{1}{2}\Omega_{0NR} - \Omega_{0\Lambda}$$

Distances

bilan

$$r = g^{-1} \left(\frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) \quad g^{-1} = \sin, \mathbb{1}, \sinh$$

$$D_{\text{ang}} = \frac{a_0 r}{1+z} \quad D_{\text{L}} = a_0 r (1+z) \quad D_{\text{propre}} = a_0 r$$

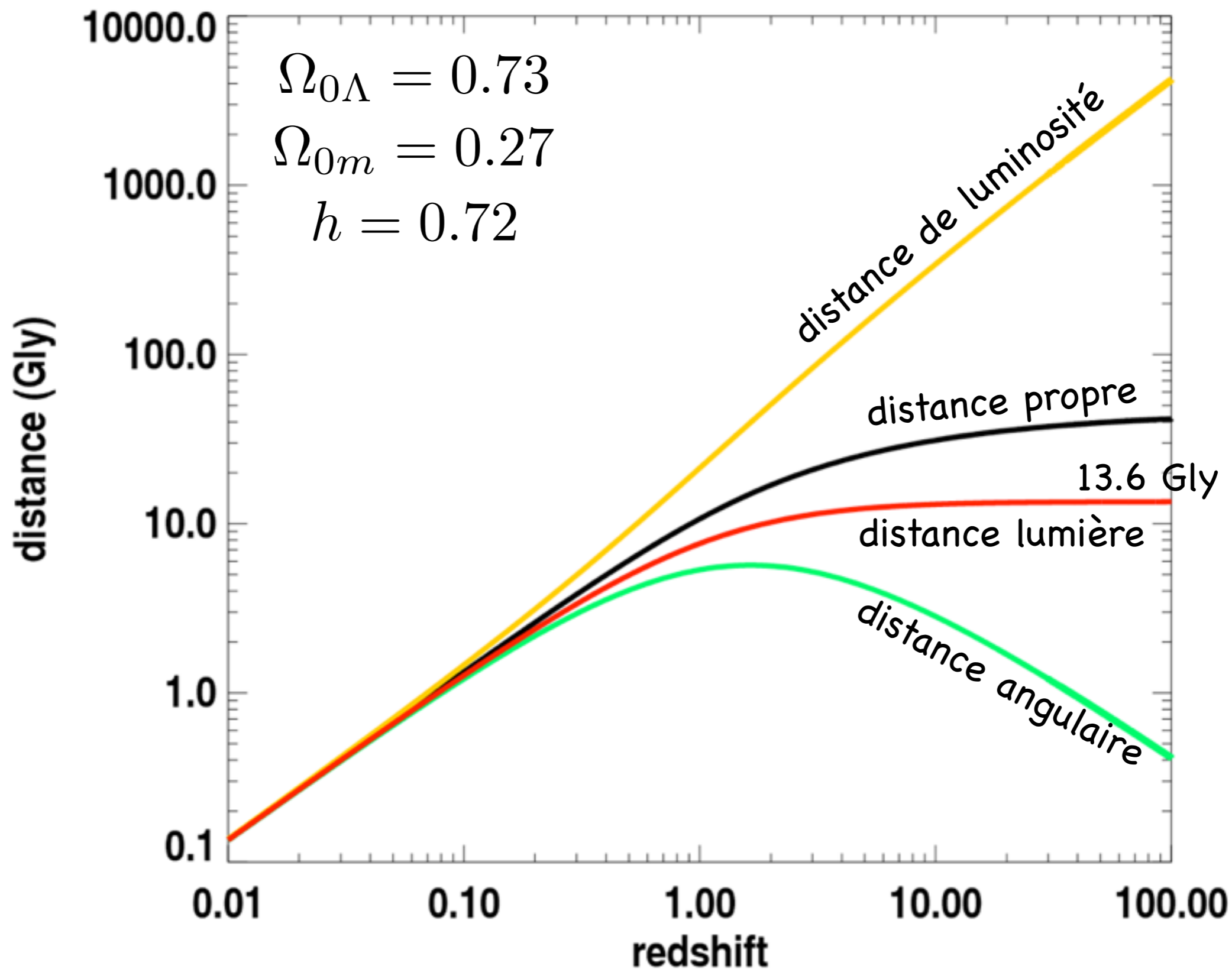
sous-estime la
distance à grand z

sur-estime la
distance à grand z

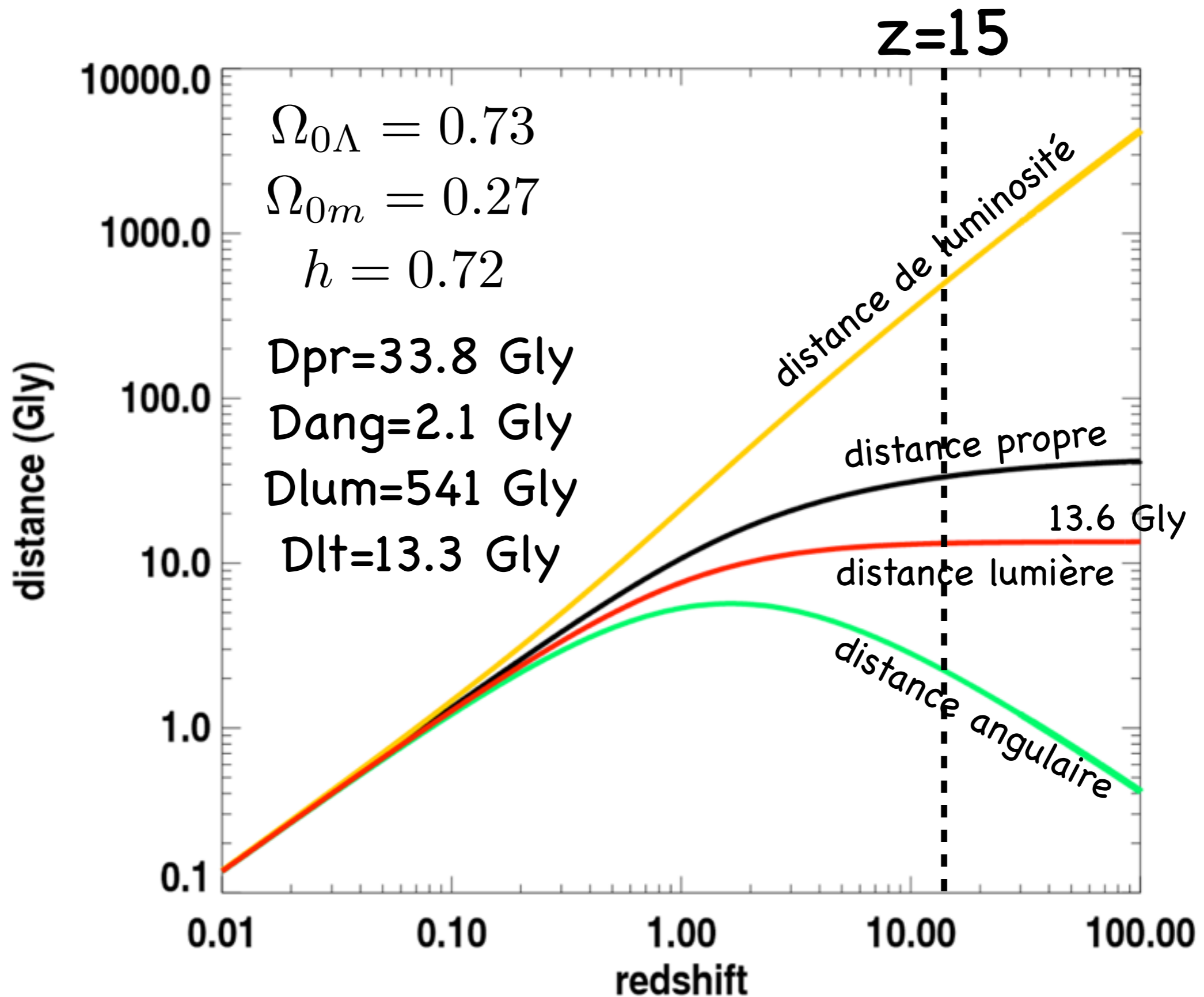
$$D_{\text{LT}} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')E(z')}$$

Sans expansion, toutes les distances sont identiques !

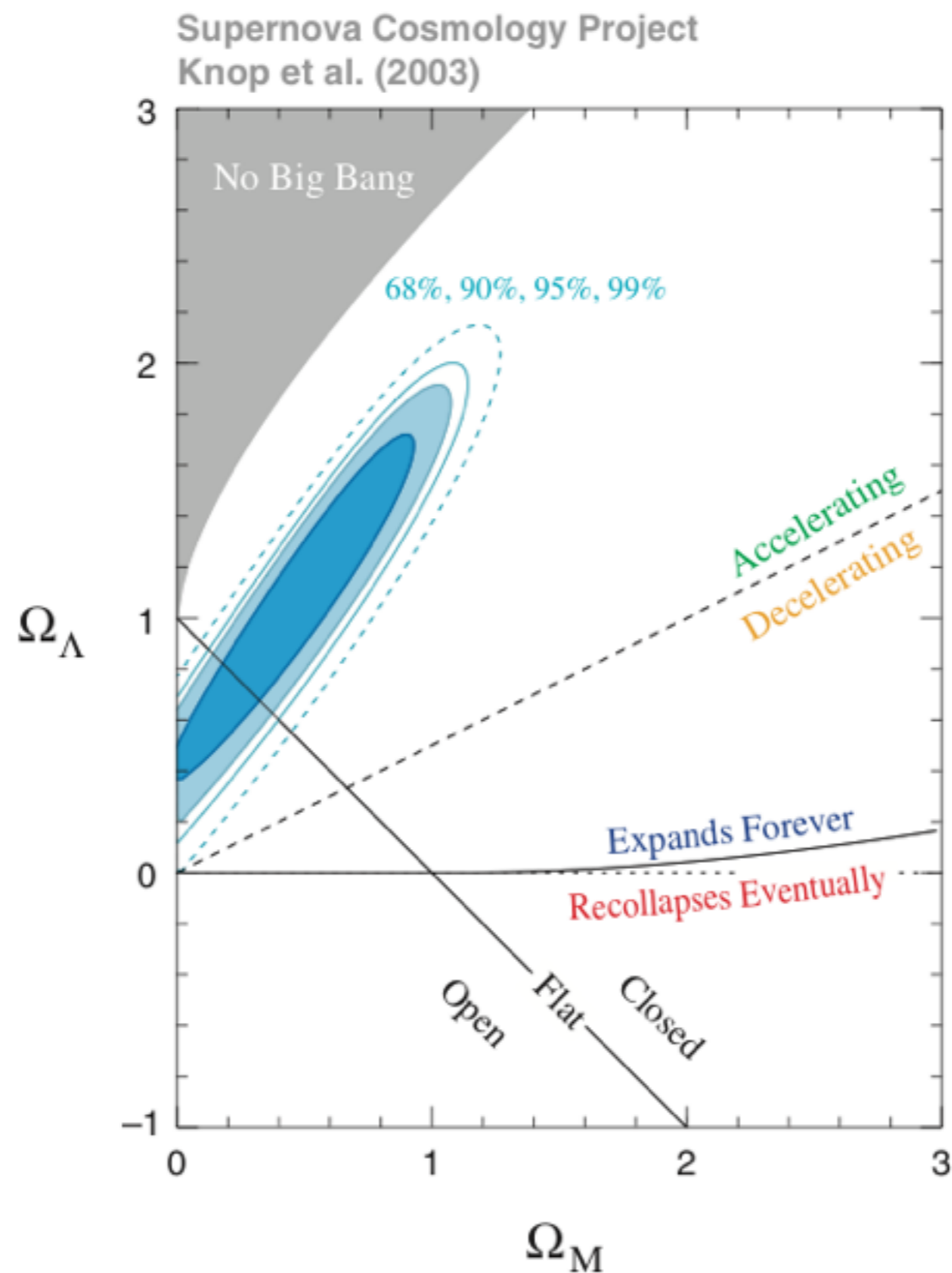
Distances



Distances



Le plan Ω_m, Ω_Λ



Égalité matière-rayonnement

- 1) montrer (conservation de l'énergie) que dans un univers en expansion et rempli d'un fluide relativiste, la densité d'énergie de ce fluide est en $1/a^4$
- 2) montrer que le terme de courbure est négligeable pour des valeurs "petites" du facteur d'échelle ; intégrer l'équation de Friedmann pour trouver t en fonction de la densité d'énergie
- 3) on mesure aujourd'hui un rayonnement de fond d'une température de 2.73 K ; à quel niveau cette radiation contribue-t-elle à Ω_m ?
- 4) en déduire le redshift de l'égalité matière-rayonnement et commenter ; calculer l'âge et la taille de l'horizon correspondants

Limite de validité

effets quantiques pour la gravitation (théorie des cordes)

$$\ell_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}$$

temps mis pour parcourir la longueur de Planck

$$t_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.4 \times 10^{-44} \text{ s}$$

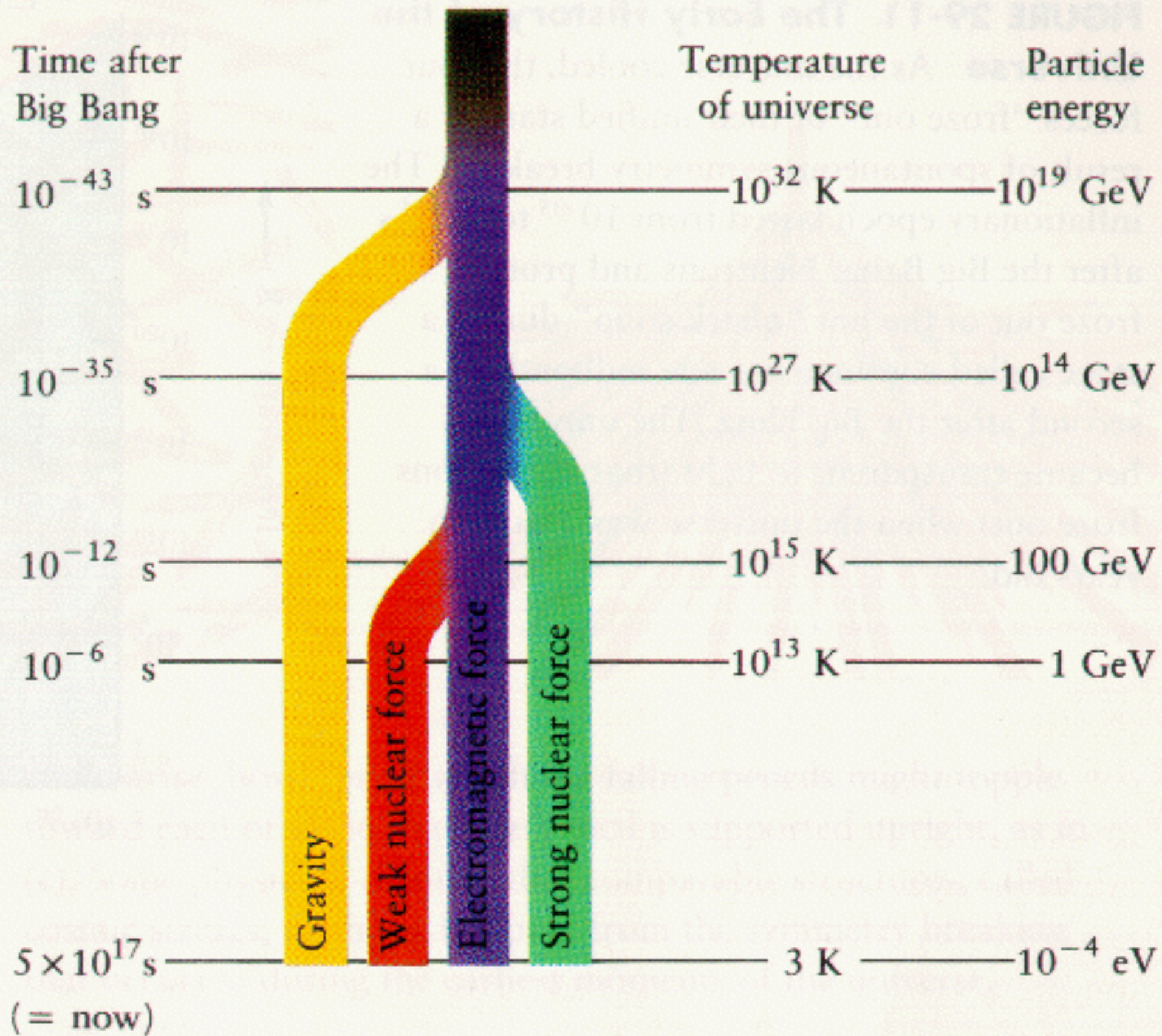
masse de Planck

$$m_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.1 \times 10^{-8} \text{ kg}$$

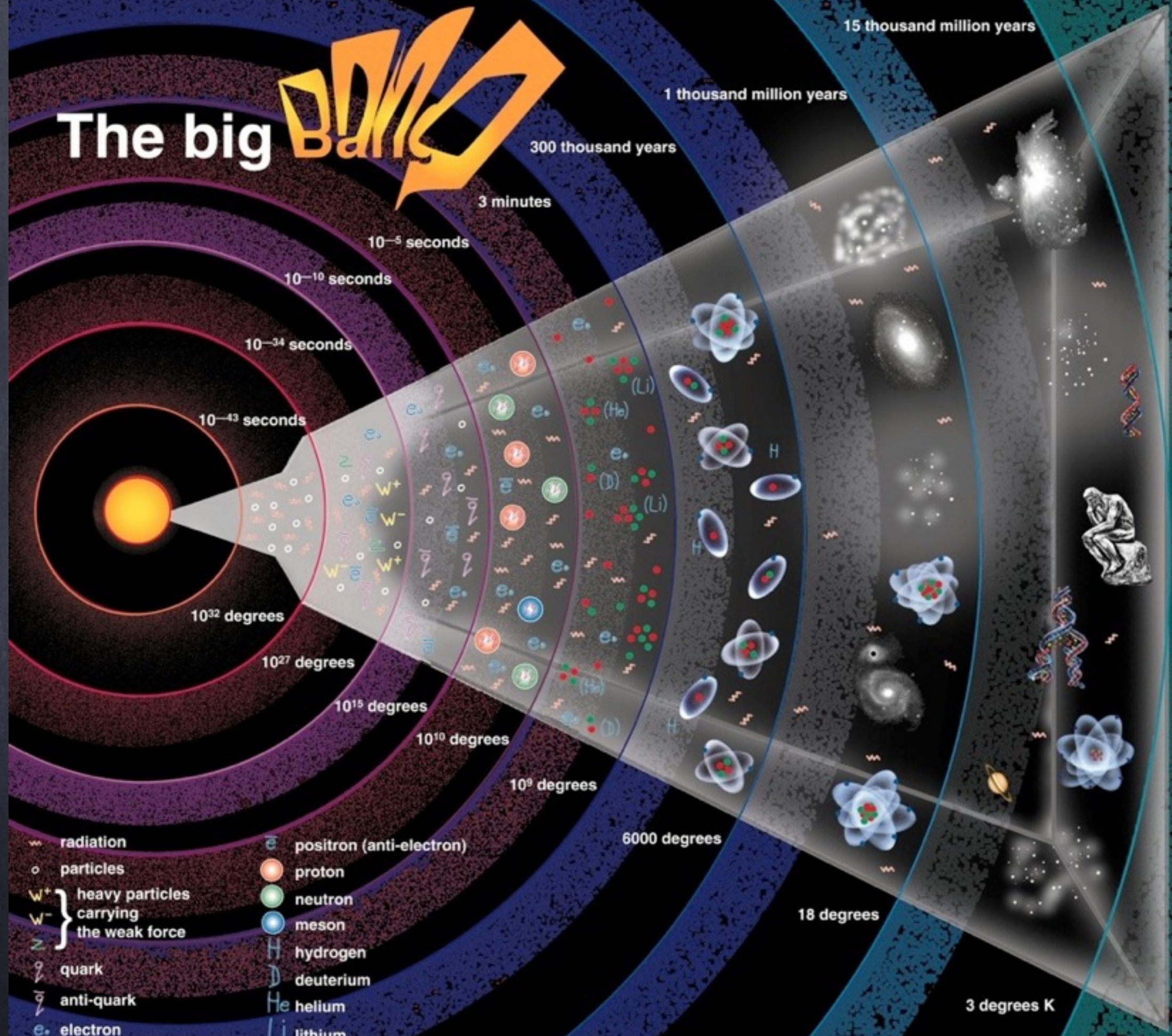
température de Planck

$$T_{\text{Pl}} = \frac{m_{\text{Pl}} c^2}{k} = 1.4 \times 10^{32} \text{ K}$$

Histoire thermique



The big Bang



- radiation
- particles
- W^+ } heavy particles carrying the weak force
- W^- }
- q quark
- \bar{q} anti-quark
- e^- electron
- e^+ positron (anti-electron)
- proton
- neutron
- meson
- H hydrogen
- D deuterium
- He helium
- Li lithium

Event	T	kT	g_*	redshift	time
Now	2.73 K	0.0002 eV	3.3	0	13 Gyr
Distant galaxy	16 K	0.001 eV	3.3	5	1 Gyr
Structure formation	1500 K	0.1 eV	3.3	1000	10^6 years
Recombination	3000 K	0.3 eV	3.3	1100	$10^{5.6}$ years
Radiation domination	9500 K	0.8 eV	3.3	3500	$10^{4.7}$ years
Electron pair threshold	$10^{9.7}$ K	0.5 MeV	11	$10^{9.5}$	3 s
Nucleosynthesis	10^{10} K	1 MeV	11	10^{10}	1 s
Nucleon pair threshold	10^{13} K	1 GeV	70	10^{13}	$10^{-6.6}$ s
Quark-Hadron	$10^{13.5}$ K	1.2 GeV	70	$10^{13.5}$	10^{-7} s
Electroweak unification	$10^{15.5}$ K	250 GeV	100	10^{15}	10^{-12} s
Desert ?					
Grand unification	10^{28} K	10^{15} GeV	100(?)	10^{28}	10^{-36} s
Inflation ?	10^{28-32} K	10^{15-19} GeV	100(?)	10^{28-32}	$10^{-36, -43}$ s
Quantum gravity	10^{32} K	10^{19} GeV	100(?)	10^{32}	10^{-43} s

Degrés de liberté

Table 4.5 Particle content of the Universe as a function of the temperature in the context of the standard model of particle physics. $T_c^{\text{qh}} \approx 150\text{--}400$ MeV characterizes the quark–hadron phase transition, which is assumed to be adiabatic. The thermodynamic history of this transition is not yet well understood. This table also assumes that the Higgs boson has a mass larger than the mass of the W^\pm, Z^0 bosons and of the top quark (t). The last three lines of this table are not certain since the Higgs sector and the electroweak transition are not well understood. At larger temperatures, g_* depends greatly on the theoretical model for the fundamental interactions. For instance, for a minimal SU(5) grand unification model, $g_*(T > T_{\text{GUT}}) = 647/4$ and in the case of the minimal supersymmetric model, $g_*(T < T_{\text{SUSY}}) = 915/4$ since the number of degrees of freedom is almost doubled.

T	Threshold (GeV)	Relativistic particles	g_*
$< m_e$	0.511×10^{-3}	γ (+ 3 decoupled ν)	2
$m_e - T_{\text{D}}(\nu)$	$(2 - 4) \times 10^{-3}$	+ e^\pm	11/2
$T_{\text{D}}(\nu) - m_\mu$	0.106	ν start to interact	43/4
$m_\mu - m_\pi$	0.135	+ μ^\pm	57/4
$m_\pi - T_c^{\text{qh}}$		+ π^\pm, π^0	69/4
$T_c^{\text{qh}} - m_s$	0.194	$\gamma, 3\nu$'s, e^\pm, μ^\pm $u, \bar{u}, d, \bar{d}, 8 g$'s	205/4
$m_s - m_c$	1.27 ± 0.05	+ s, \bar{s}	247/4
$m_c - m_\tau$	1.78	+ c, \bar{c}	289/4
$m_\tau - m_b$	4.25 ± 0.10	+ τ^\pm	303/4
$m_b - m_W$	80.3 ± 0.3	+ b, \bar{b}	345/4
$m_W - m_t$	180 ± 12	+ W^\pm, Z^0	381/4
$m_t - m_{H^0}$		+ t, \bar{t}	423/4
$m_{H^0} - T_c^{\text{EW}}$	300 (?)	+ H^0	427/4

Degrés de liberté

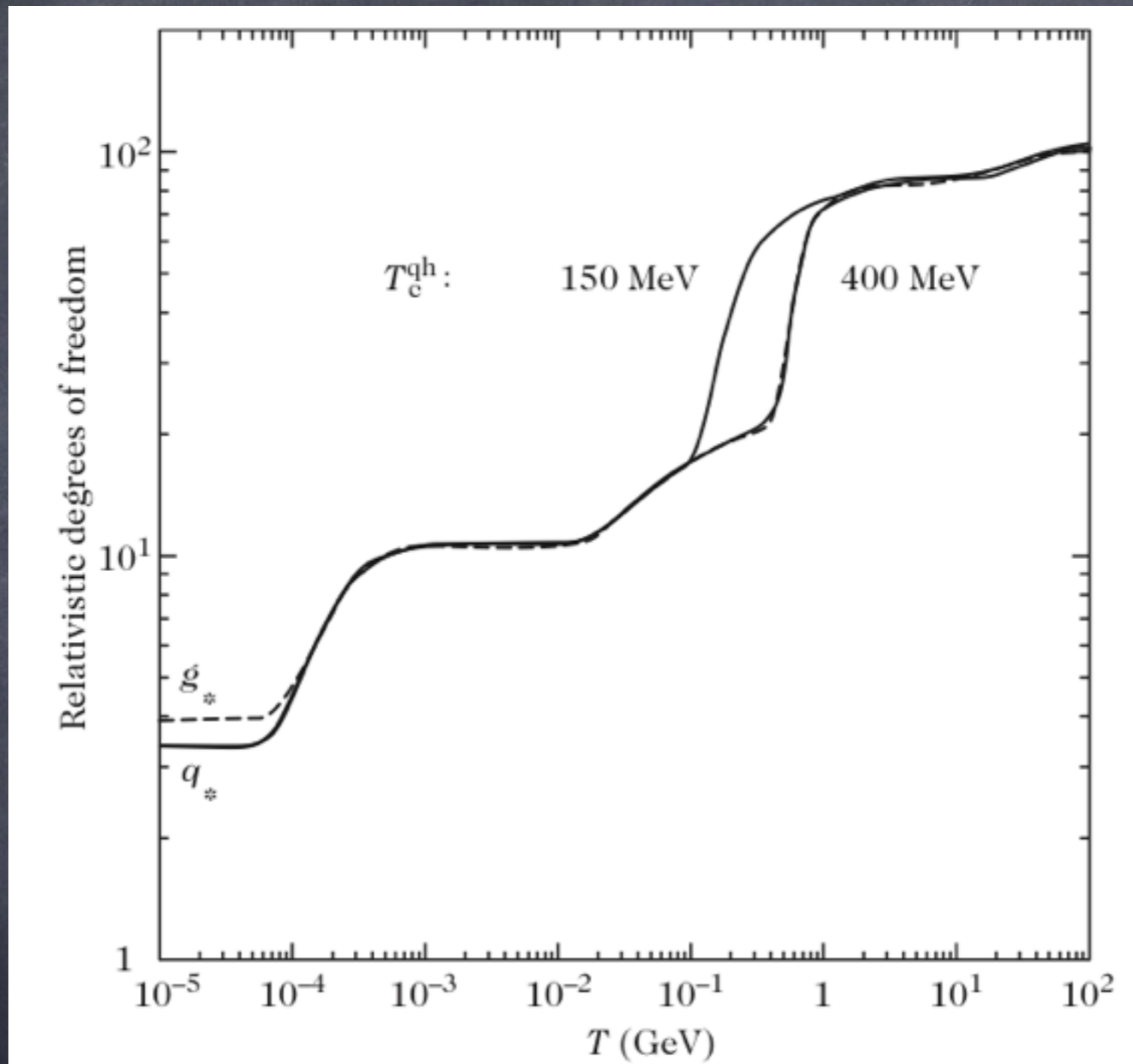


Fig. 4.7 Evolution of the functions g_* and q_* as a function of the temperature in the standard model of particle physics $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ with two hypotheses concerning the critical temperature of the quark-hadron transition, T_c^{qh} .

Petite Histoire de l'Univers

temps



Fig: Martin Lemoine

Petite Histoire de l'Univers

temps

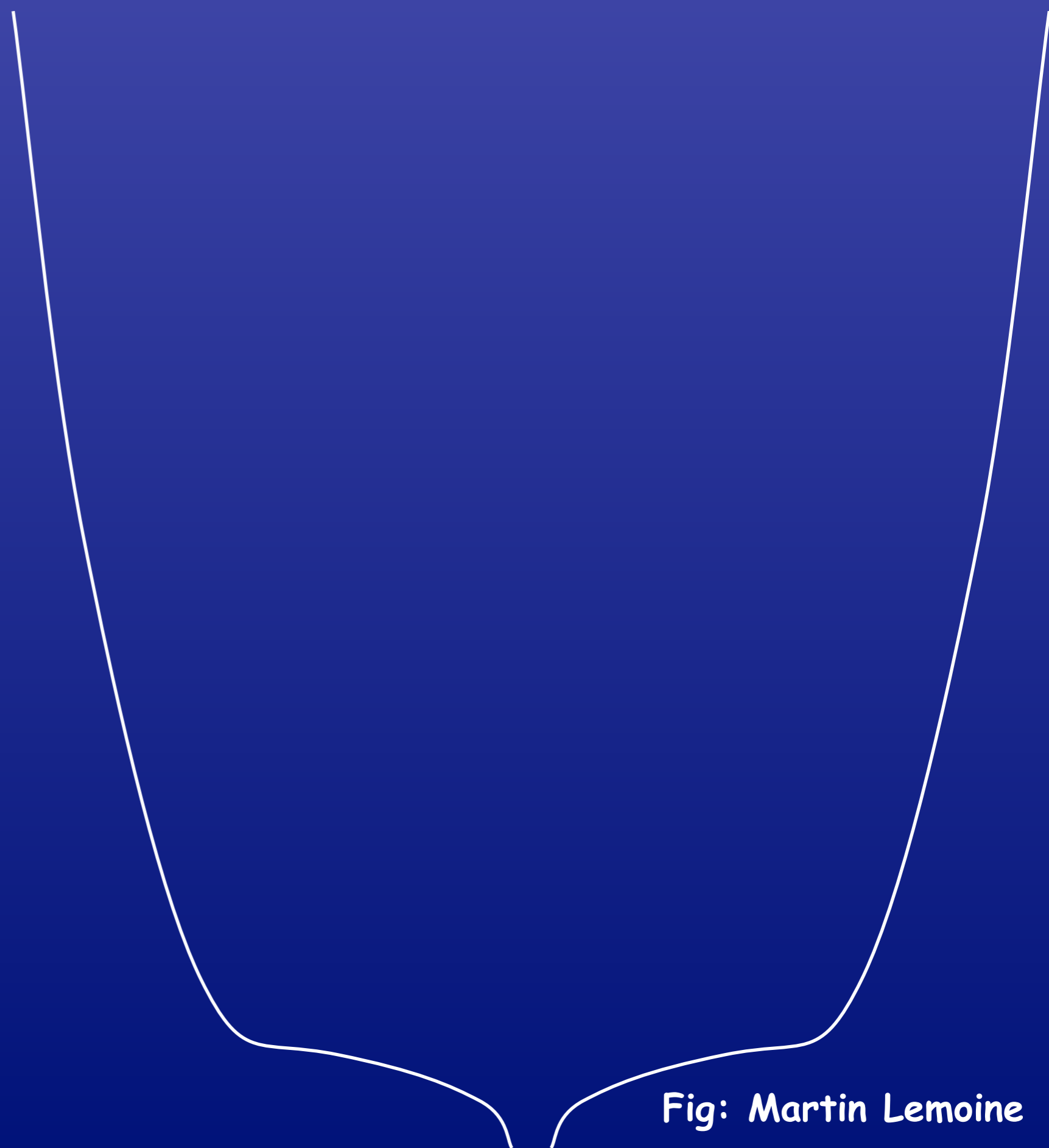
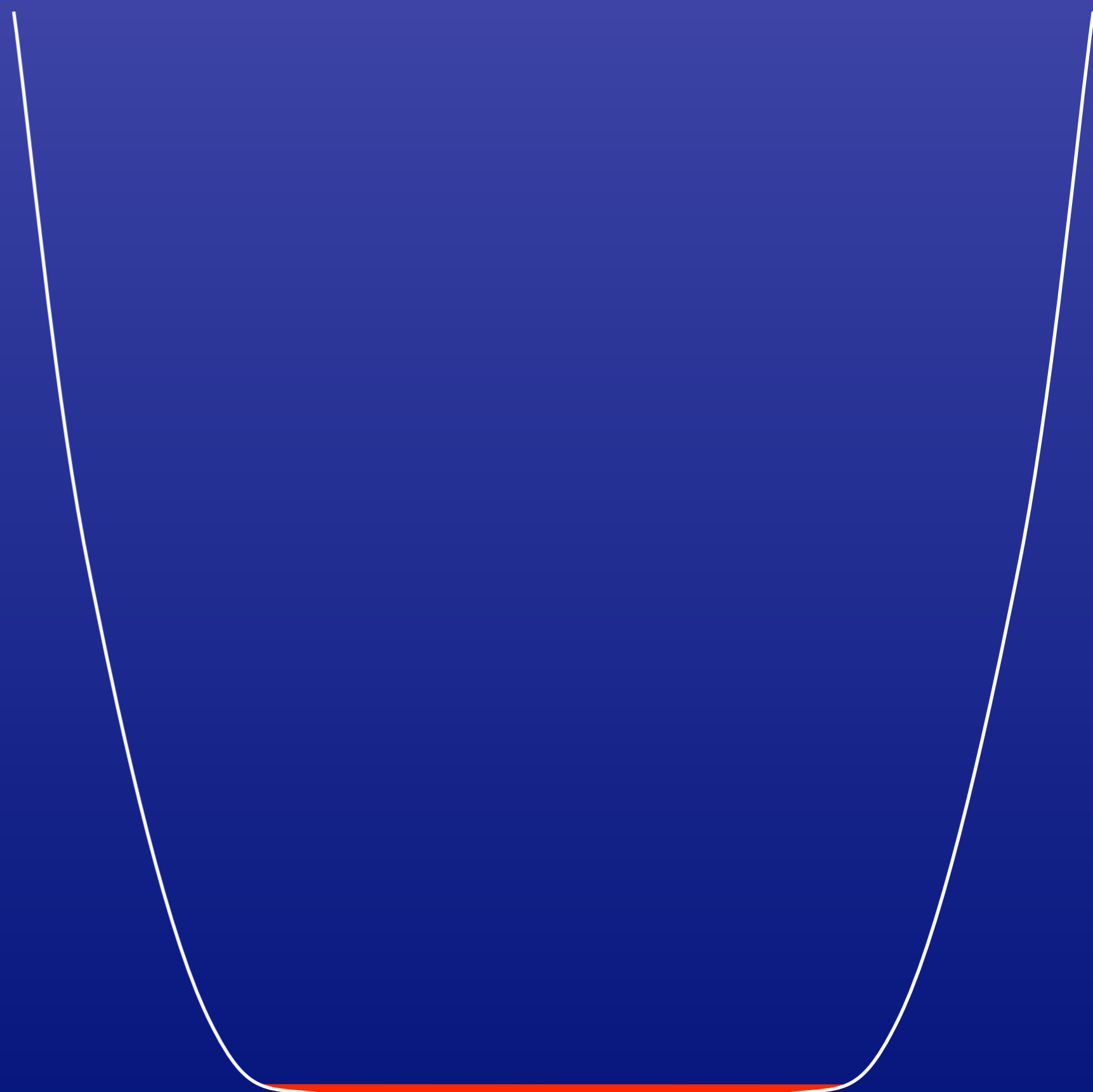


Fig: Martin Lemoine

Petite Histoire de l'Univers

temps



fin inflation
début ère
rayonnement

10^{-33} sec

inflation

Fig: Martin Lemoine

Petite Histoire de l'Univers

temps

confinement
quarks — 10^{-6} sec

fin inflation — 10^{-33} sec
début ère
rayonnement



Fig: Martin Lemoine

Petite Histoire de l'Univers

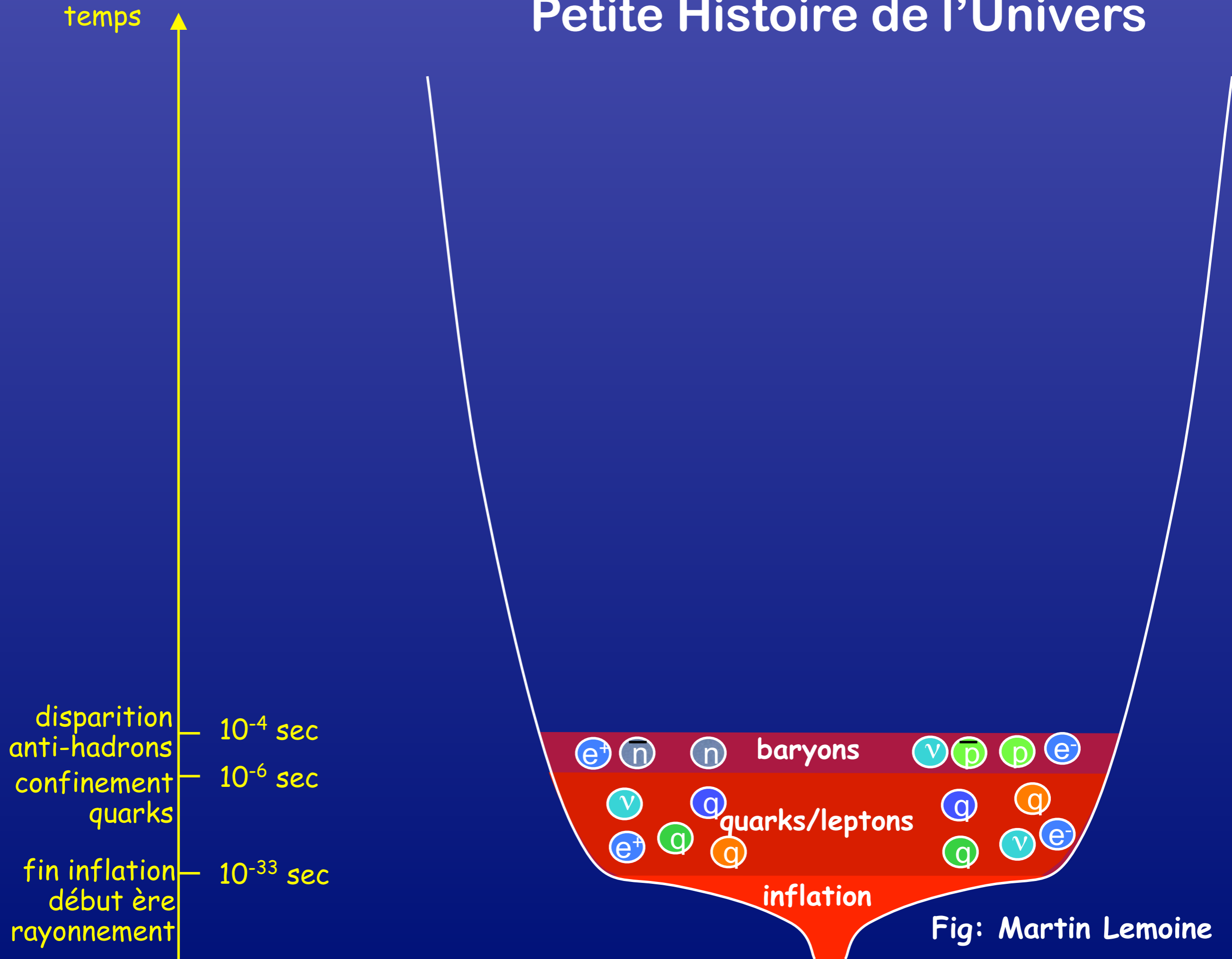


Fig: Martin Lemoine

Petite Histoire de l'Univers

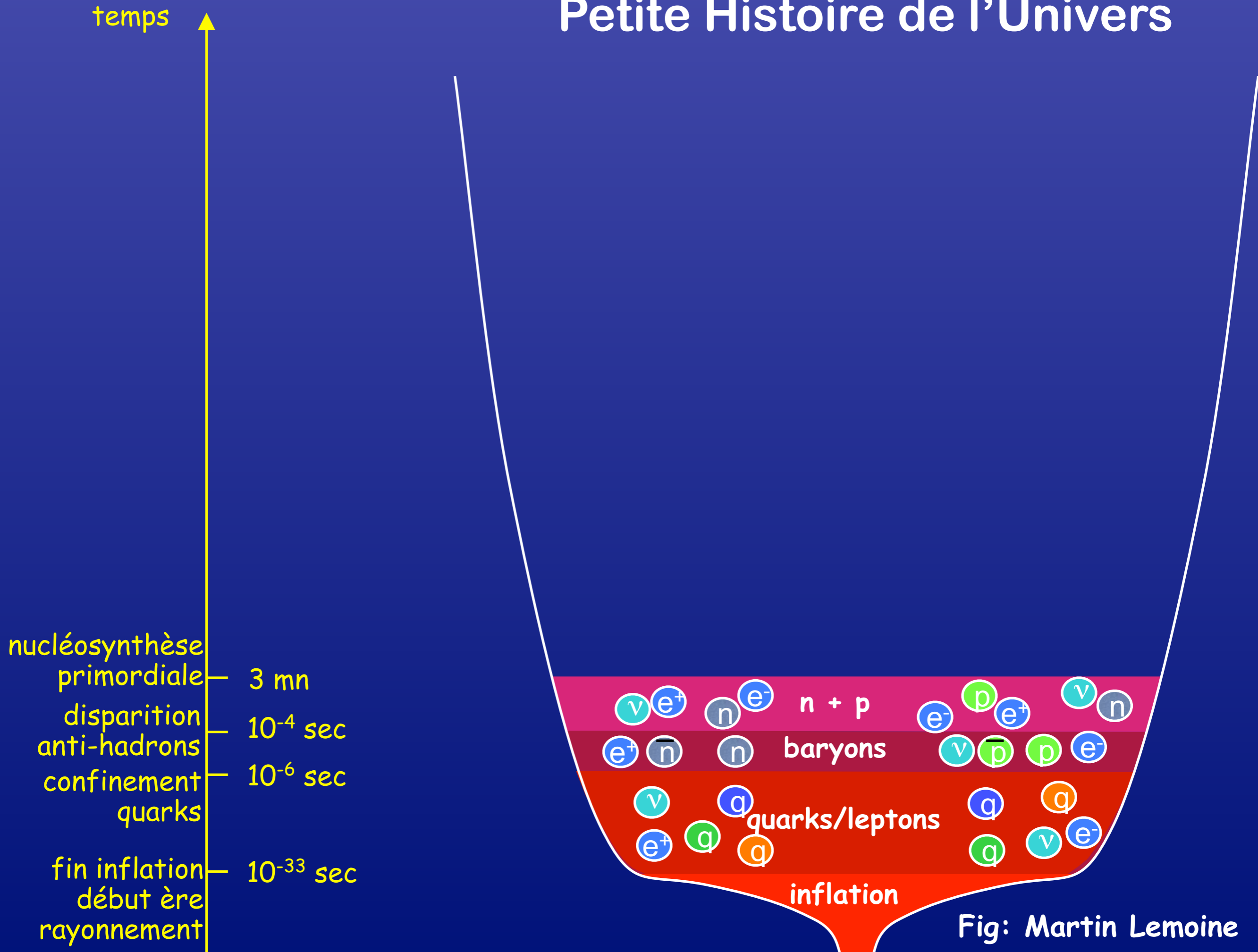


Fig: Martin Lemoine

Petite Histoire de l'Univers

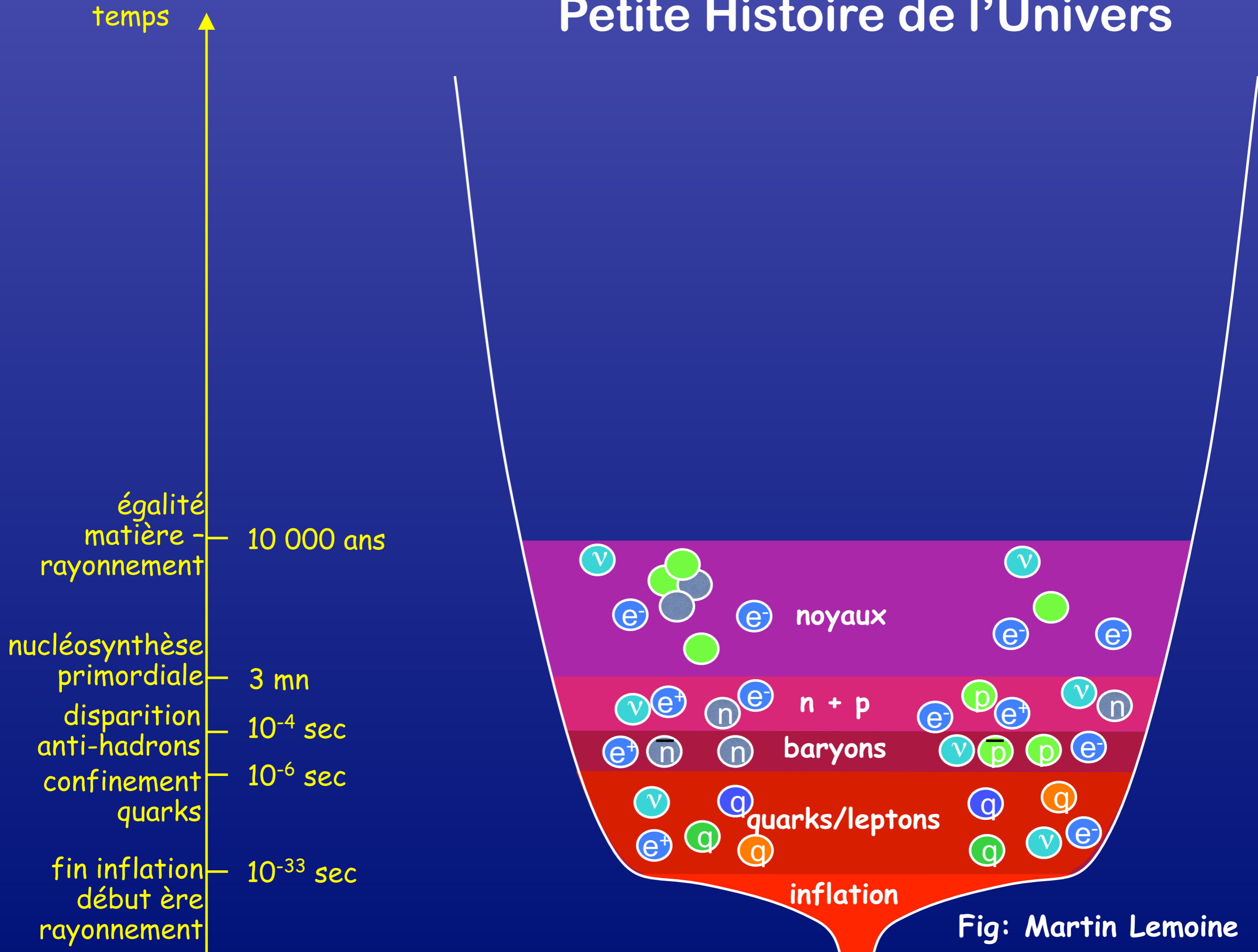
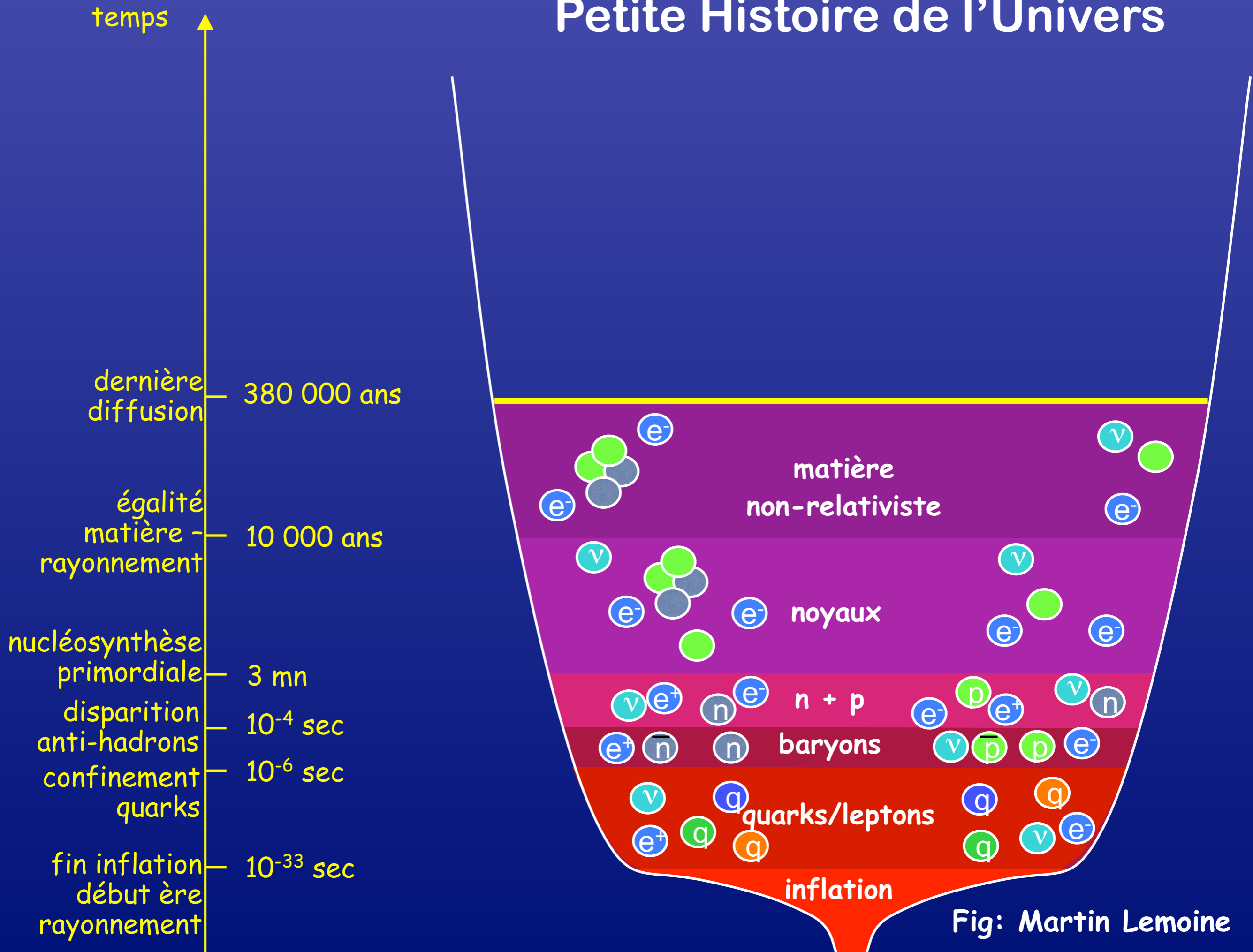


Fig: Martin Lemoine

Petite Histoire de l'Univers



Petite Histoire de l'Univers

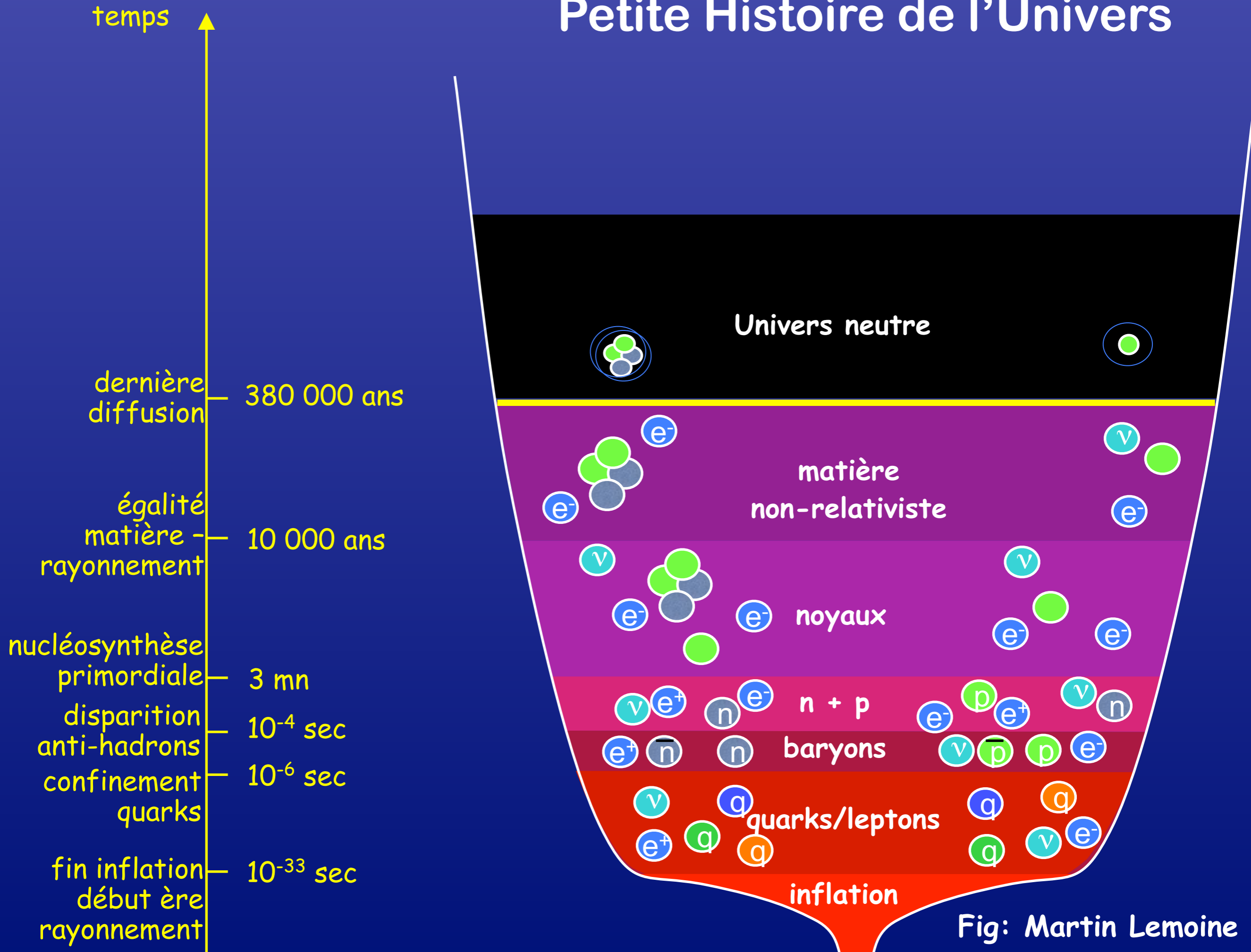
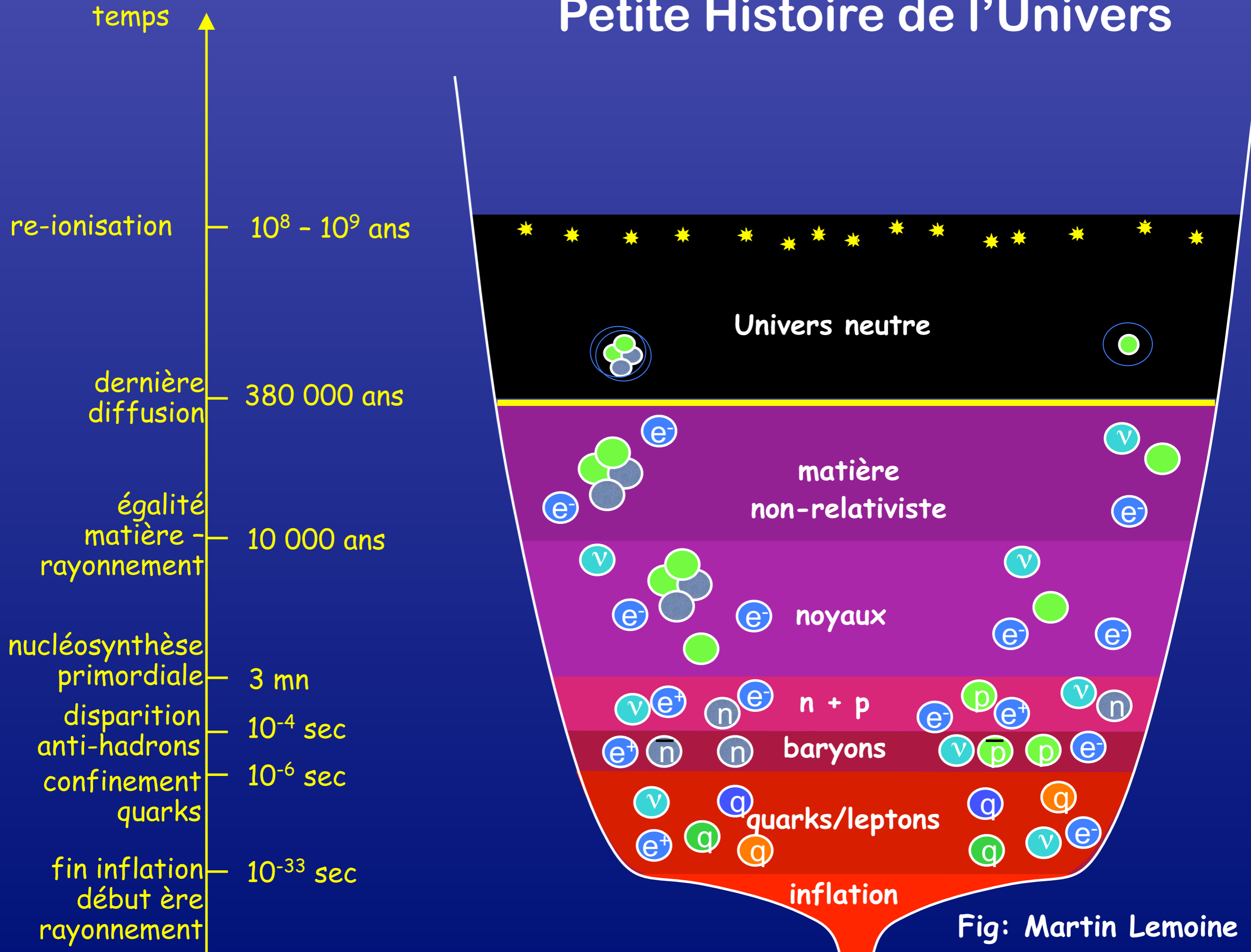
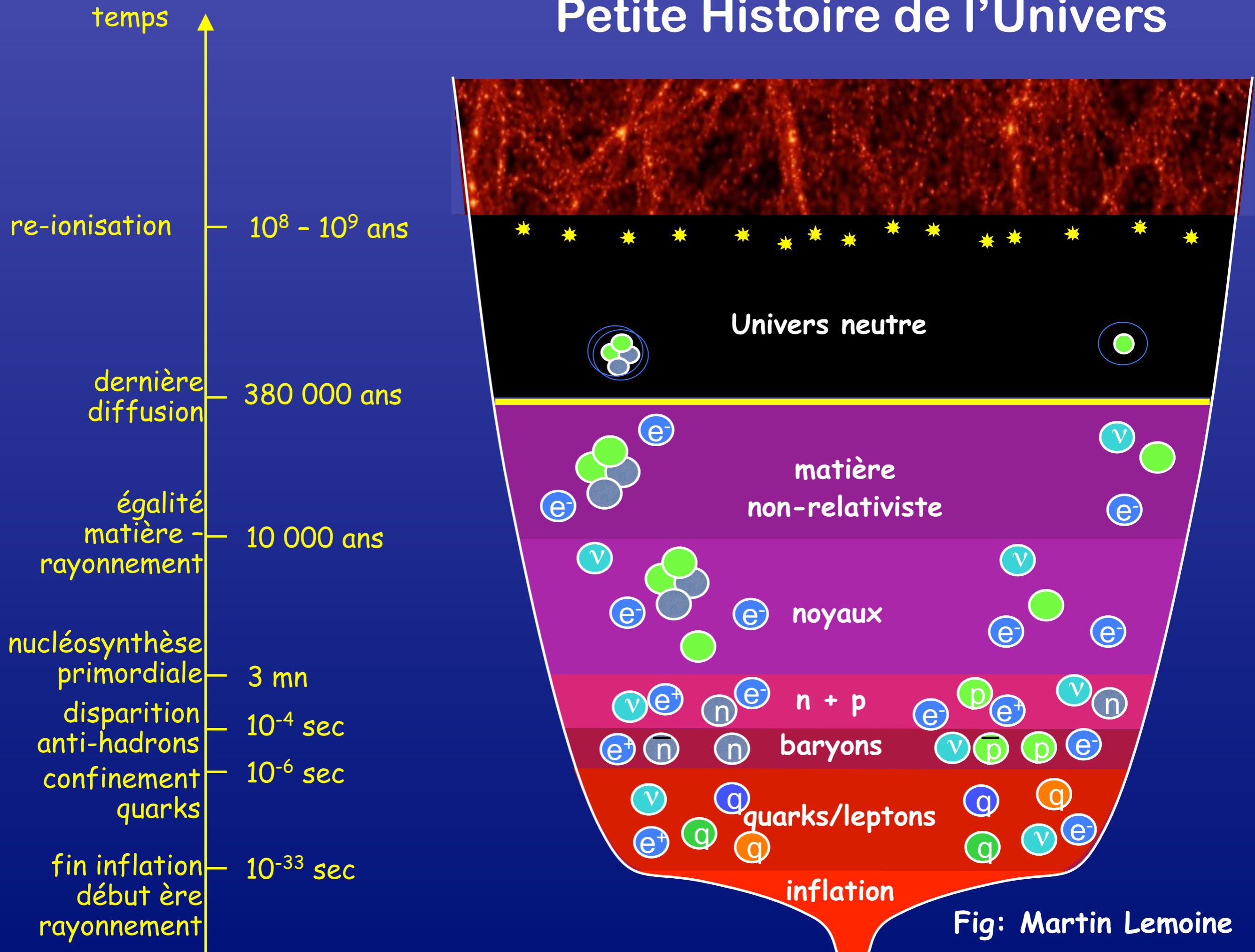


Fig: Martin Lemoine

Petite Histoire de l'Univers



Petite Histoire de l'Univers



Petite Histoire de l'Univers

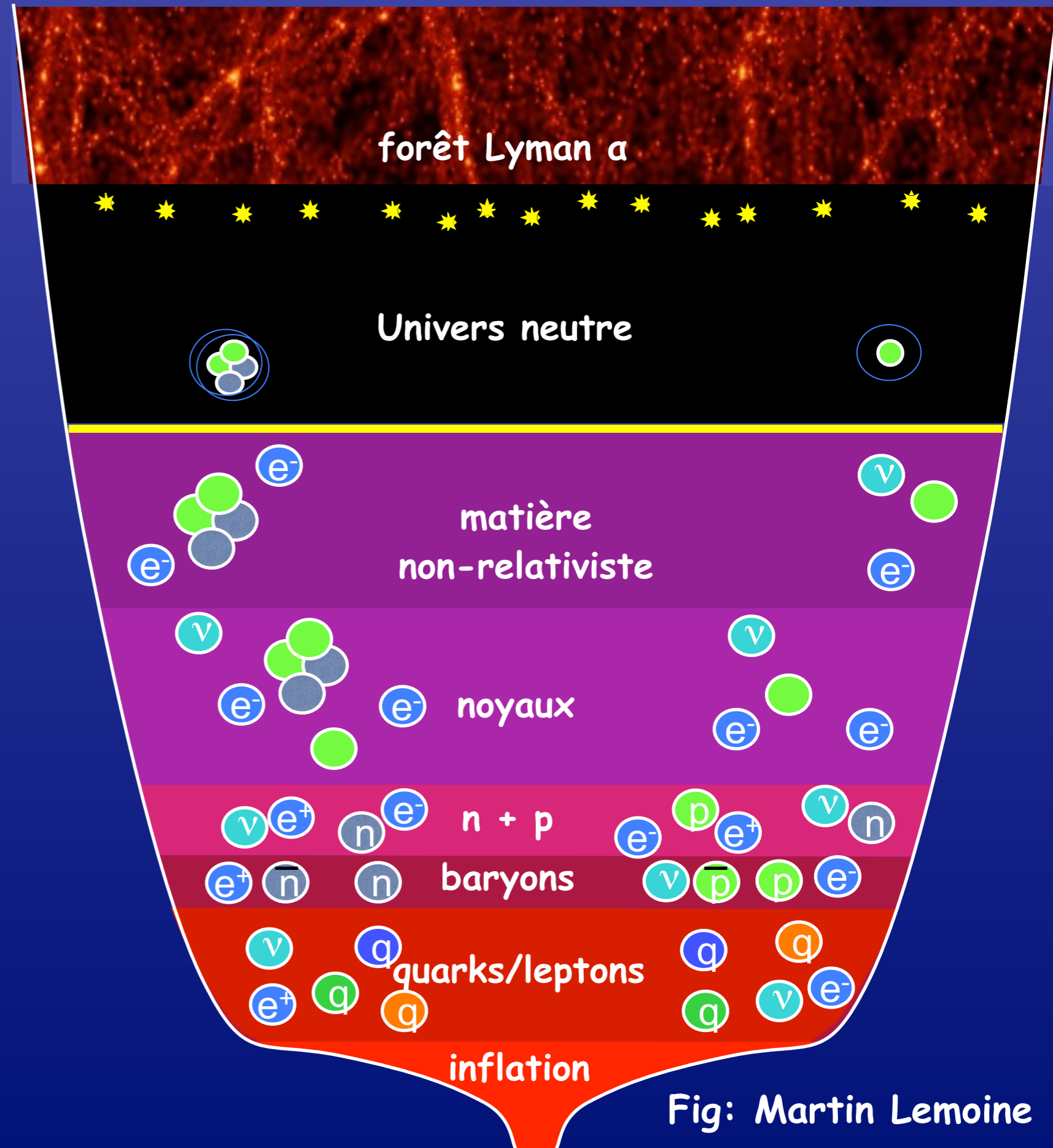
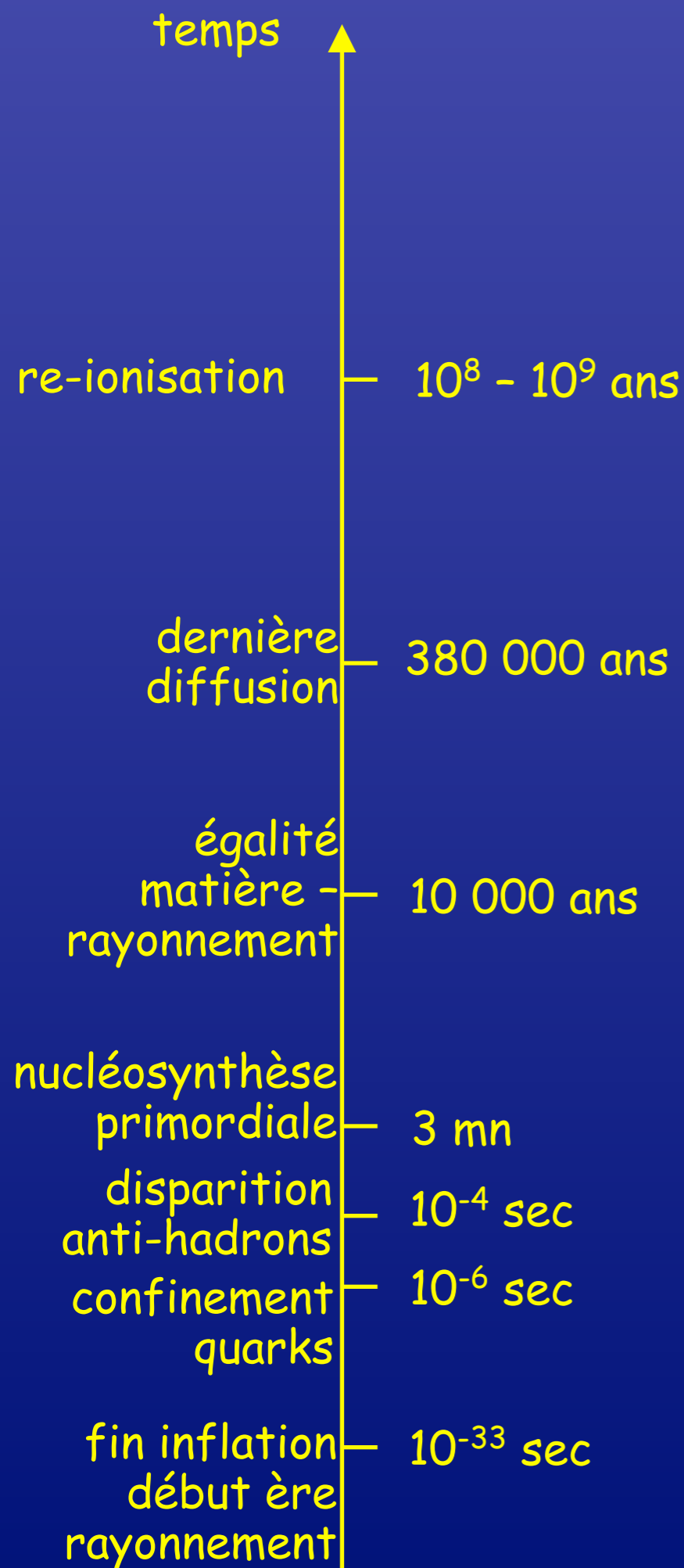
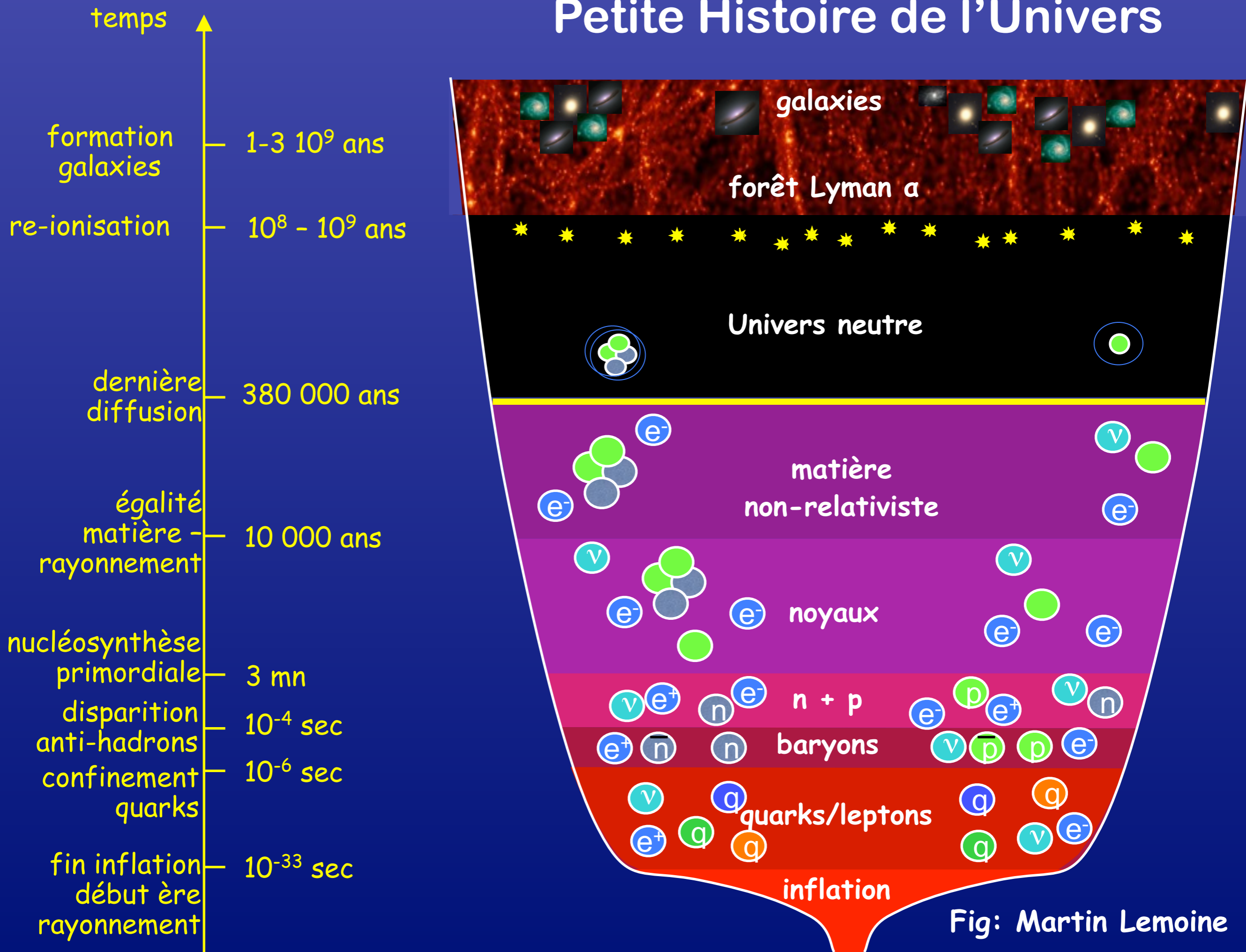


Fig: Martin Lemoine

Petite Histoire de l'Univers



Petite Histoire de l'Univers

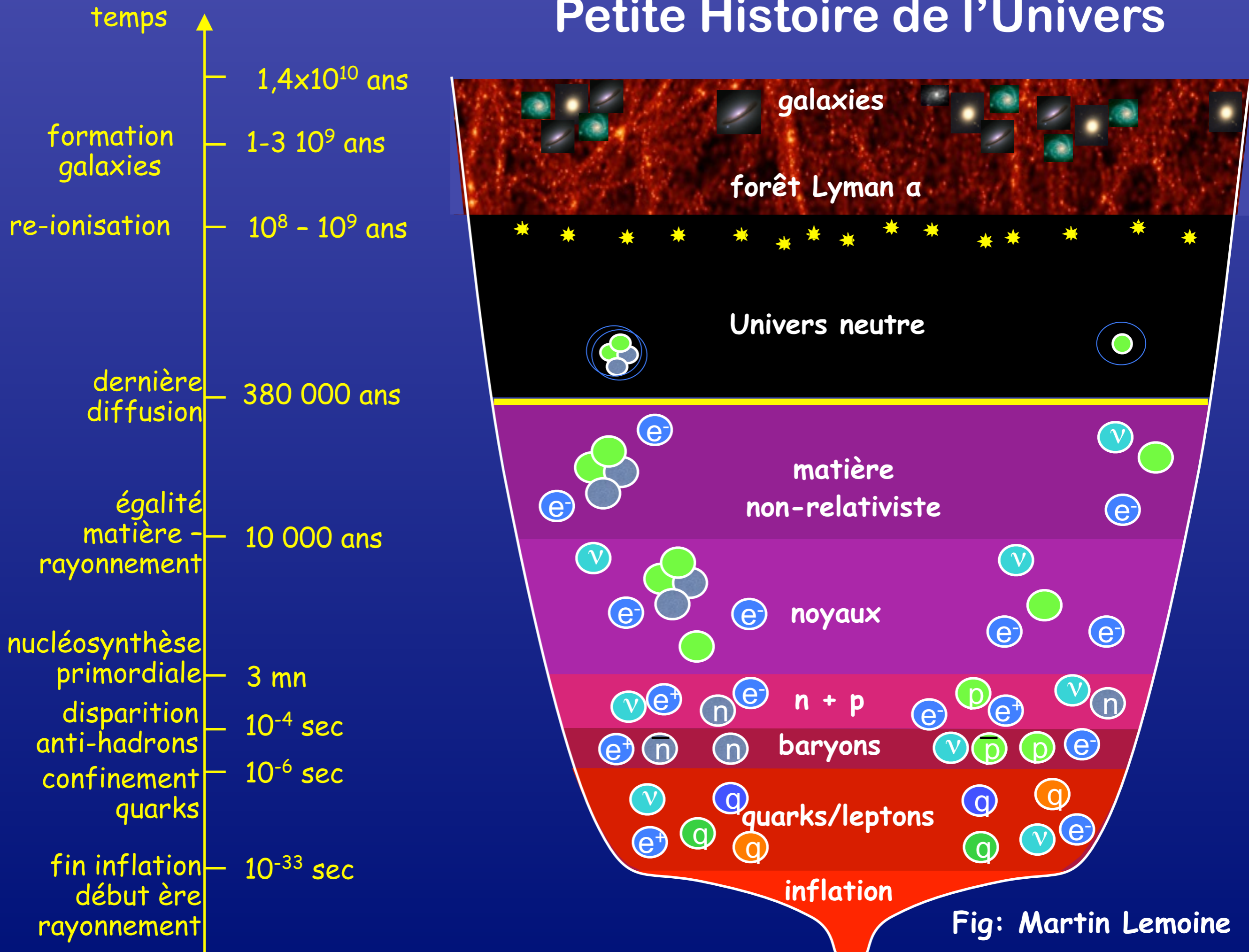


Fig: Martin Lemoine