

# Cosmologie

Benoît Revenu, poste 85 07, SUBATECH

# Plan (incomplet)

- Première partie : introduction générale
  - Introduction historique
  - Principe d'inertie
  - Relativité restreinte
  - **Vers** la relativité générale
- Deuxième partie : l'univers homogène et isotrope
  - Ordres de grandeur en cosmologie et tour d'horizon
  - Le principe cosmologique
  - La métrique de FLRW
  - La dynamique de l'univers de FLRW
  - **les paramètres cosmologiques et l'énergie noire**
  - Distances, temps écoulé, horizons...
- Troisième partie : les perturbations
  - La matière noire
  - Le rayonnement fossile (I)
  - L'inflation
  - Perturbations : approches newtonienne et relativiste
  - Formation des structures
- Quatrième partie : le rayonnement fossile
  - Les anisotropies de température
  - La polarisation du rayonnement fossile

Ce plan n'est pas statique, il pourra s'adapter selon notre avancée et les sujets qu'on choisira ou non d'approfondir.

En parallèle des aspects théoriques, je parlerai aussi des expériences.

Il y aura des exercices régulièrement.

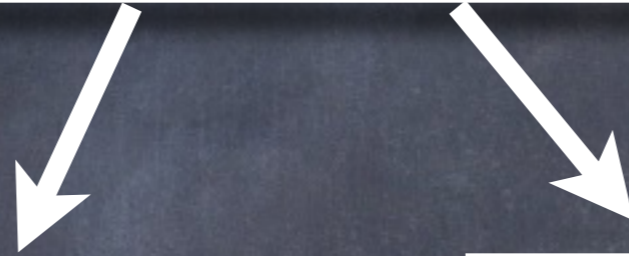
Au total : 20 heures de cosmologie, réparties comme ça vient en "cours" et en "TD".

N'hésitez JAMAIS à poser des questions ! (même si elles vous semblent trop simples)

# Précision lexicale (Larousse 2006)

## Astronomie

“Science qui étudie la position, les mouvements, la structure et l'évolution des corps célestes.”



## Astrophysique

“Partie de l'astronomie qui étudie les propriétés physiques, la formation et l'évolution des astres.”

## Cosmologie

“Science qui étudie la structure et l'évolution de l'Univers considéré dans son ensemble.”

# Aperçu historique

l'histoire de l'astronomie couvre la période allant de -600 à aujourd'hui et est marquée par 3 mouvements fondateurs :

- les philosophes grecs de l'Antiquité
- les arabes du VII<sup>ème</sup> siècle
- les penseurs européens du Moyen-Âge

# Les grecs de l'Antiquité

Pythagore : environ -580, -500



- rotondité de la Terre (élévation de l'étoile polaire, mâts des navires)
- héliocentrisme
- invente le terme "cosmos" pour désigner le ciel nocturne
- tout est nombre et harmonie (au sens musical)
- la Terre tourne sur elle-même
- lumière émise, réfléchiée, perçue par l'œil
- soupçonne l'existence d'une matière invisible en plus du soleil

# Les grecs de l'Antiquité

Platon : -427, -347, disciple de Socrate

Platon a enseigné à Aristote et Eudoxe de Cnide



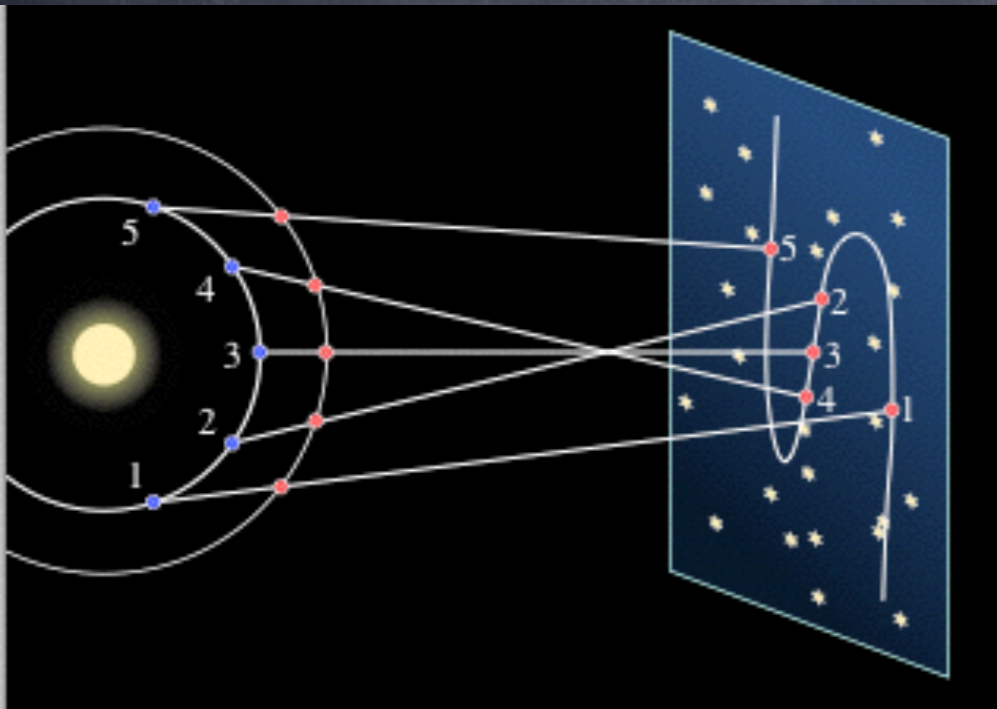
- existence d'un dieu parfait ayant créé une sphère en rotation uniforme
- géocentrisme et système des sphères (2 par astre)
- tout doit pouvoir être décrit par des trajectoires élémentaires obéissant à des lois géométriques simples : vrai pour les 2500 ans qui suivent ! (sauver les apparences en gardant à tout prix des mouvements circulaires)

# Les grecs de l'Antiquité

Eudoxe de Cnide : -406, -355

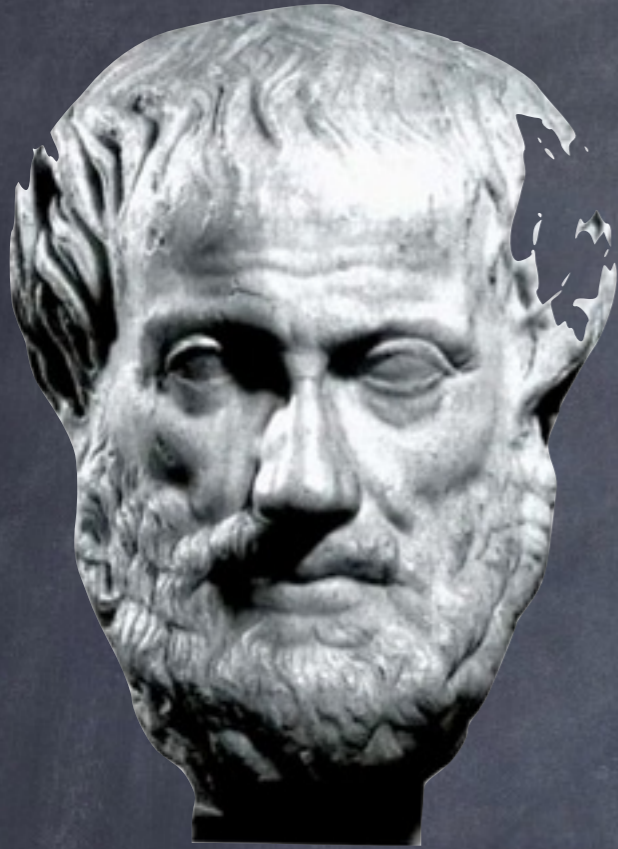


- premier modèle platonicien : à chaque astre est associé plusieurs sphères l'astre étant sur la plus interne
- chaque sphère communique son mouvement à celle du dessous jusqu'à celle portant l'astre
- un ensemble de 27 sphères est nécessaire pour décrire les mouvements du Soleil, Lune, de Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne ; il explique la rétrogradation

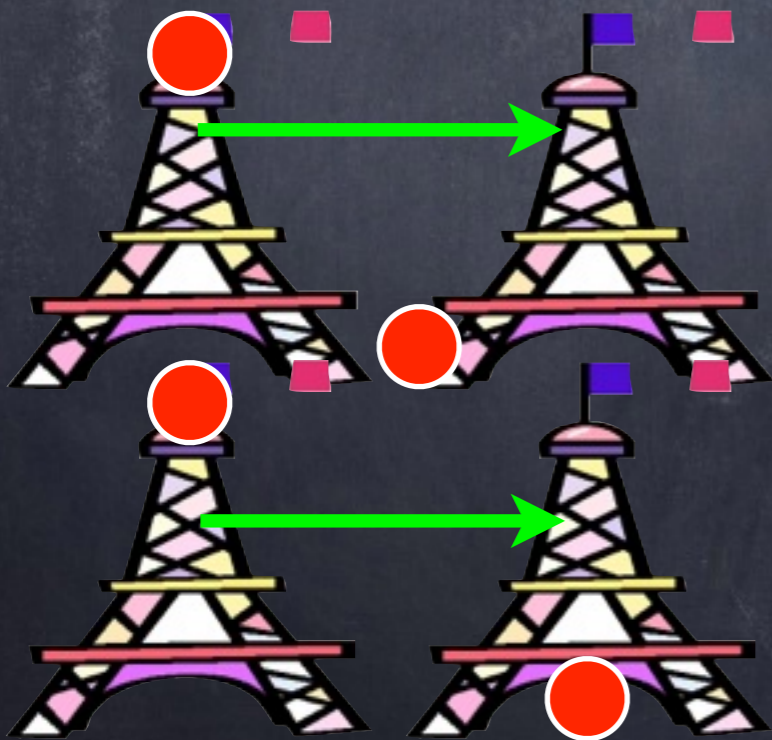


# Les grecs de l'Antiquité

Aristote : -384, -322



- le vide n'existe pas : il emboîte les sphères qui deviennent jointives et prétend qu'elles sont faites d'éther, l'univers devient plein comme un œuf
- problème : chaque sphère devrait communiquer son mouvement à celle du dessous
- ajout de sphères compensatrices pour annuler le mouvement de la sphère portant un astre la plus proche : total de 55 sphères !
- Terre immobile : chute d'un boulet au pied d'une tour





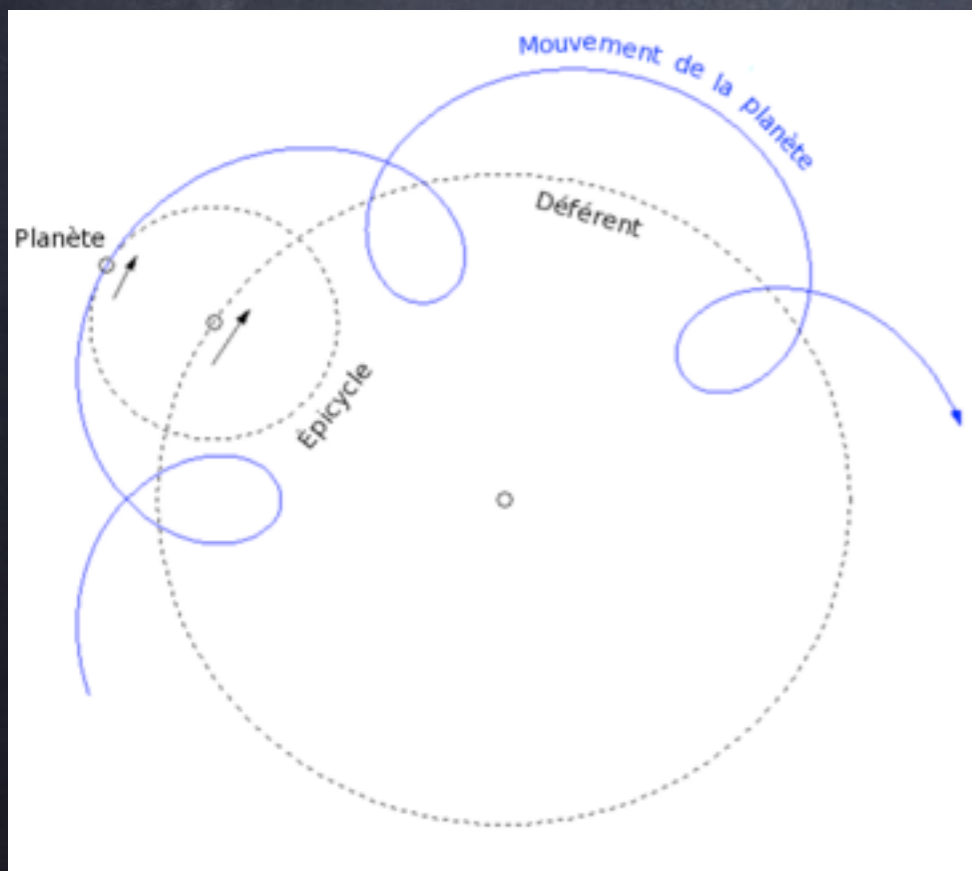
# Les grecs de l'Antiquité

Claude Ptolémée : 90, 168

Grec-Égyptien



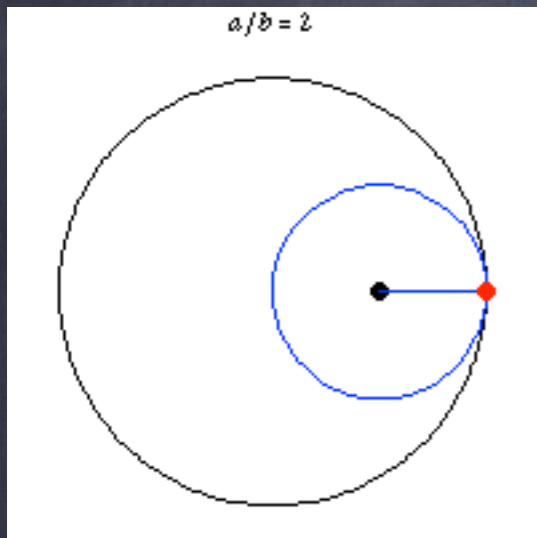
- élabore des théories pour expliquer la ronde des astres, éclipses et apparence du ciel
- son œuvre : "Syntaxe mathématique" rebaptisée plus tard "Almageste" par les arabes
- ajout des épicycles
- se base sur Aristote, calcule le premier éphéméride, il mathématise les mouvements (trigonométrie)



# Les arabes

Nasir el din Tusi : 1201, 1274

Au X<sup>ème</sup> siècle, plusieurs versions arabes de l'Almageste circulent et ses incohérences apparaissent



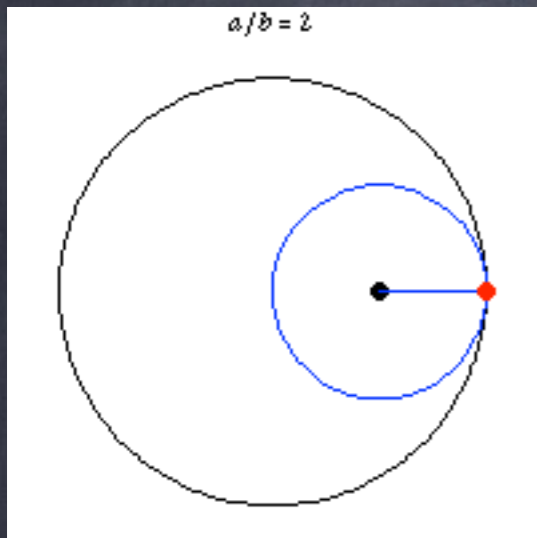
- critique des épicycles
- tables précises d'éphémérides
- calcul de la précession des équinoxes (51" au lieu de 50")
- découvre le moyen de convertir deux mouvements circulaires en une translation
- et en propose une nouvelle représentation de l'univers, toujours géocentrique mais bien plus simple que Ptolémée



# Les arabes

Nasir el din Tusi : 1201, 1274

Au X<sup>ème</sup> siècle, plusieurs versions arabes de l'Almageste circulent et ses incohérences apparaissent



- critique des épicycles
- tables précises d'éphémérides
- calcul de la précession des équinoxes (51" au lieu de 50")
- découvre le moyen de convertir deux mouvements circulaires en une translation
- et en propose une nouvelle représentation de l'univers, toujours géocentrique mais bien plus simple que Ptolémée



# Les philosophes du XV<sup>ème</sup>

Nicolas de Cues : 1401, 1464

Un des précurseurs de la renaissance scientifique européenne (il était vicaire général de Rome)

Fonder une cosmologie où Dieu ne réside pas autrement que de façon spirituelle

- but : améliorer le calendrier, comprendre l'ordre du monde
- modèle cosmologique d'alors : toujours l'Almageste (venu d'Espagne)
- en 1440, de Cues avance deux idées nouvelles : la Terre n'est pas le centre du monde, est en mouvement et n'est pas ronde ; le monde n'a ni centre ni circonférence
- existence de vie extraterrestre
- chaque partie du monde est en mouvement, il n'existe pas de point fixe et constant permettant une observation exacte des mouvements dans l'espace... mais pas de conception relativiste

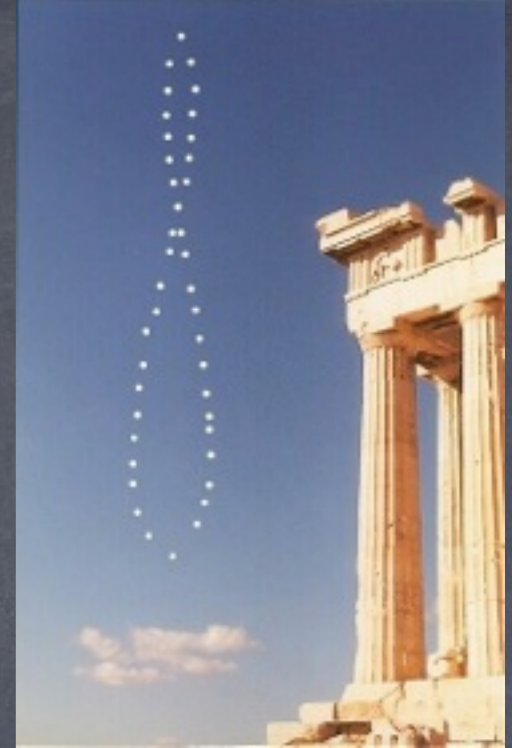




# Les philosophes du XV<sup>ème</sup>

Nicolas Copernic : 1473, 1543

## Révolution copernicienne



- change l'origine (Soleil) du modèle d'Ibn Al Shatir qui était alors l'aboutissement du programme de Ptolémée, en s'inspirant de l'héliocentrisme d'Aristarque de Samos (-300)
- il conserve la notion de sphère des fixes
- explique le mouvement apparent des étoiles et du Soleil
- il explique le mouvement rétrograde des planètes externes bien plus simplement qu'Eudoxe de Cnide
- pense que l'axe de la Terre oscille comme celui d'une toupie
- il a été condamné à titre posthume par l'Église
- objections faites à son modèle : pas de parallaxe des étoiles et encore le fameux boulet au pied de la tour...



# Les philosophes du XVI<sup>ème</sup>

Giordano Bruno : 1548, 1600

intuition sans mathématiques

- pense que de Cues n'est pas allé aussi loin qu'il voulait à cause de sa fonction ecclésiastique
- il prolonge les idées de de Cues à une conception relativiste et rejette l'existence des sphères célestes
- « Toutes choses qui se trouvent sur la Terre se meuvent avec la Terre. La pierre jetée du haut du mât reviendra en bas, de quelque façon que le navire se meuve. » (Le banquet des cendres), il contredit Aristote et ouvre la voie à Galilée pour la relativité





# Les philosophes du XVI<sup>ème</sup>

Giordano Bruno : 1548, 1600

intuition sans mathématiques



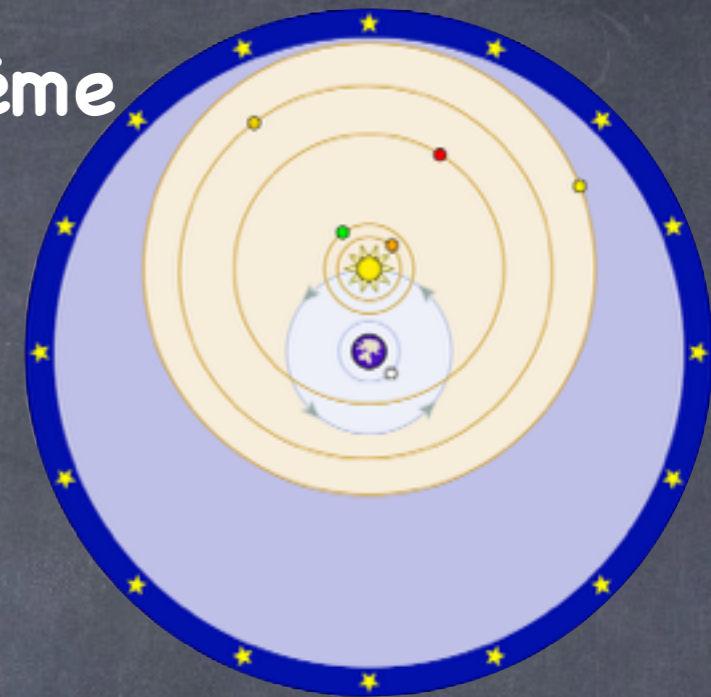
- « Il n'y a aucun astre au milieu de l'univers, parce que celui-ci s'étend également dans toutes ses directions. »
- « Il est donc d'innombrables soleils et un nombre infini de terres tournant autour de ces soleils, à l'instar des sept "terres" que nous voyons tourner autour du Soleil qui nous est proche. » (L'Infini, l'Univers et les Mondes, 1584).
- abolition de la sphère des étoiles fixes
- pluralité des mondes habités
- brûlé en 1600 par l'Inquisition après 8 ans de procès et prison (art divinatoire, cosmologie, magie, hérésie...)



# Les scientifiques du XVI<sup>ème</sup>

Tycho Brahe : 1546, 1601

début de la démarche scientifique basée sur l'observation



- catalogue de 1004 étoiles relativement précis
- premier astronome à corriger de l'effet de réfraction de la lumière sur les observations
- auteur du modèle géo-héliocentrique
- ne croit plus à Aristote depuis la SN de 1572 et la comète de 1577 mais refuse Copernic à cause de l'absence de parallaxe et du paradoxe du boulet
- il est le dernier astronome avant l'arrivée de la lunette et du télescope
- détecte une "anomalie" dans la trajectoire de Mars et fait venir Johannes Kepler travailler sur ce point avec lui





# Les scientifiques du XVI<sup>ème</sup>

Johannes Kepler : 1571, 1630

base de travail pour Newton



- étudie l'hypothèse héliocentrique de Copernic et la modifie : le centre est le Soleil et non à côté pour coller aux mesures
- lois de Kepler (lois des aires, ellipses avec le Soleil au foyer et  $a^3/T^2 = \text{constante}$ )
- il publie "Le secret du monde" en 1595 ; Dieu a créé le monde selon un modèle basé sur 5 volumes (5 planètes) : cube, tétraèdre, octaèdre, icosaèdre et dodécaèdre, la sphère étant le paradis
- mouvement des planètes expliqué par le magnétisme (pas de gravitation avant Newton)
- féru d'astrologie (auteur d'horoscopes etc)



# Les scientifiques du XVI<sup>ème</sup>

Galilée : 1564, 1642



- copernicien convaincu, trouve une explication aux marées mais cela nécessite un mouvement de la Terre
- croit que la Nature "pense" comme un ingénieur et choisit les solutions les plus simples
- inventeur de la lunette astronomique (mais il est myope, pas de confirmation par ses collègues)
- découvre les satellites de Jupiter
- subit les attaques des géocentriques, des aristotéliens (sur la théorie des corps flottants, physique qualitative vs quantitative) et des religieux
- en 1616 l'Église lui demande de travailler sur autre chose (censure de la thèse copernicienne)



# Les scientifiques du XVI<sup>ème</sup>

Galilée : 1564, 1642



- entre 1616 et 1632, l'activité de Galilée ralentit (soucis de santé et pression extérieure pour abandonner Copernic)
- en 1620, le pape Urbain VIII demande à Galilée de rédiger un ouvrage impartial sur les systèmes copernicien et aristotélicien "Dialogue sur les deux grands systèmes du monde" mais il n'est pas impartial et perd la protection du pape (il bafoue l'interdit de 1616 en étant pro-copernicien)
- en 1633, Galilée est condamné à résidence à vie et abjuration

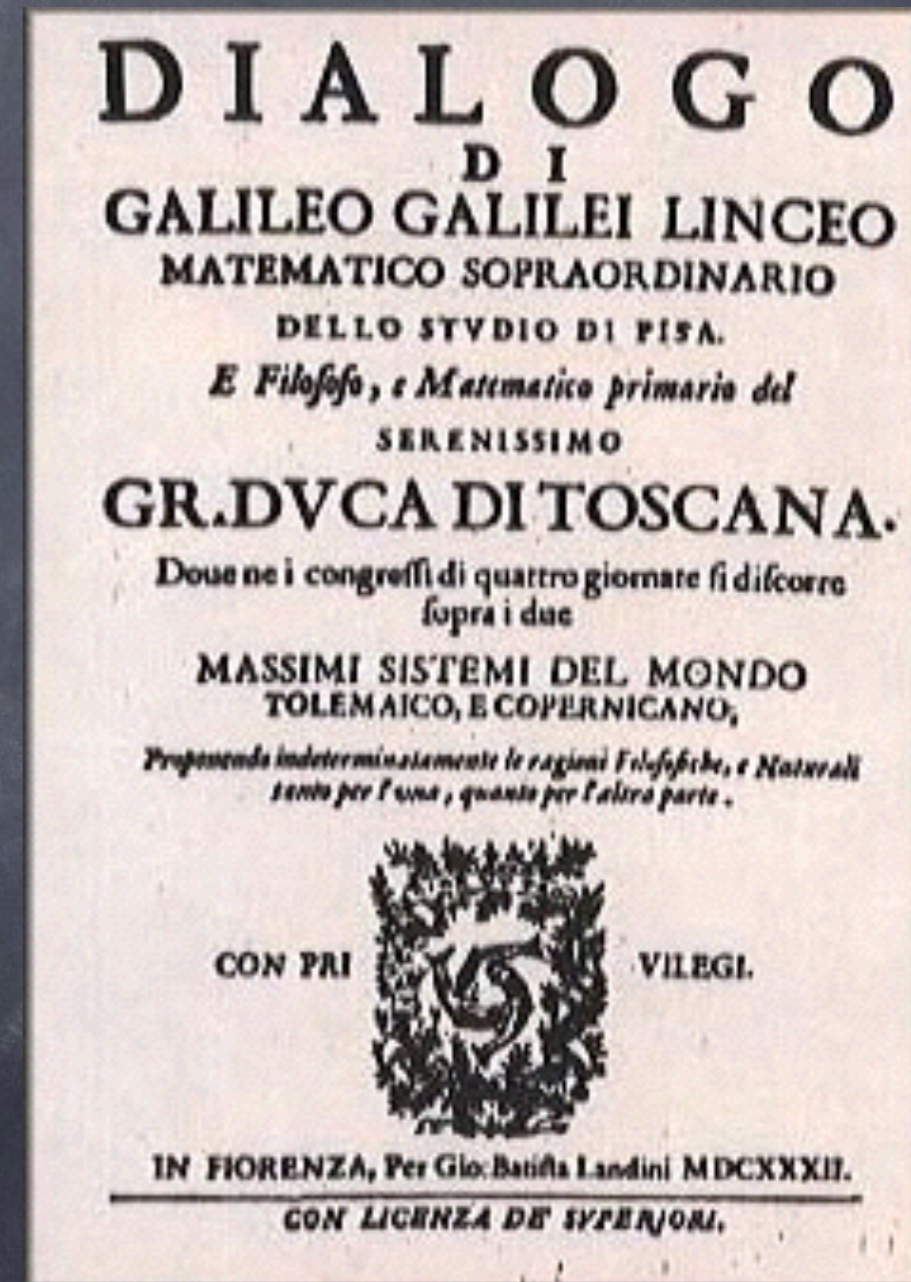
du point de vue scientifique...



# Les scientifiques du XVI<sup>ème</sup>

Galilée : 1564, 1642

- étude sur la chute des corps : la vitesse de chute est indépendante de la nature et de la masse des corps (corps découpé et tenu par une ficelle)
- le principe d'inertie selon Galilée : les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie
- le temps et l'espace sont absolus (les intervalles de temps et d'espace sont les mêmes pour tous les observateurs et la simultanéité est absolue)

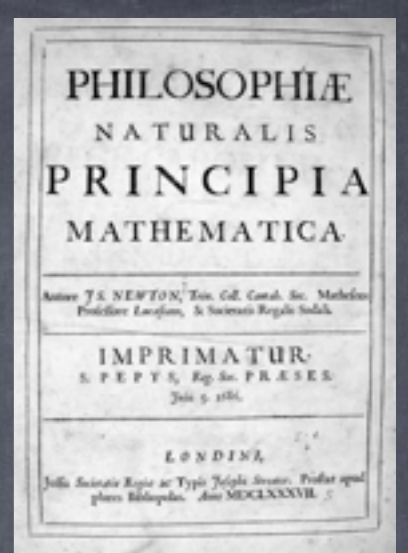




# Les scientifiques du XVII<sup>ème</sup>

Newton : 1643, 1727

(mécanique et gravitation seulement)



les 3 lois fondamentales de la dynamique, avec l'héritage de Galilée

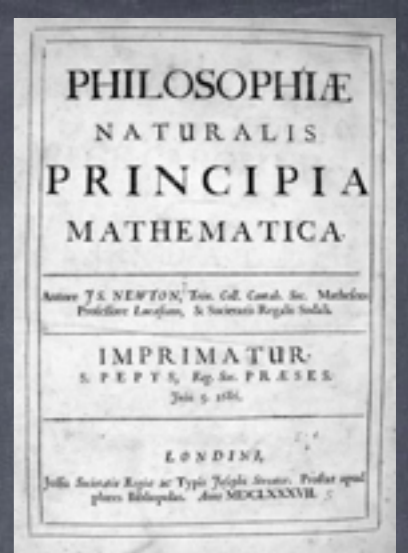
- principe d'inertie : "tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état"
- principe fondamental de la dynamique : "dans un référentiel d'inertie, la vitesse d'un point matériel varie à un rythme proportionnel à la force qui lui est appliquée et inversement proportionnel à sa masse"  $\vec{F} = m_I \vec{a}$
- principe de l'action et de la réaction : "lorsque deux points matériels forment un système isolé, ils exercent l'un sur l'autre des forces opposées"



# Les scientifiques du XVII<sup>ème</sup>

Newton : 1643, 1727

et la loi sur la gravitation universelle



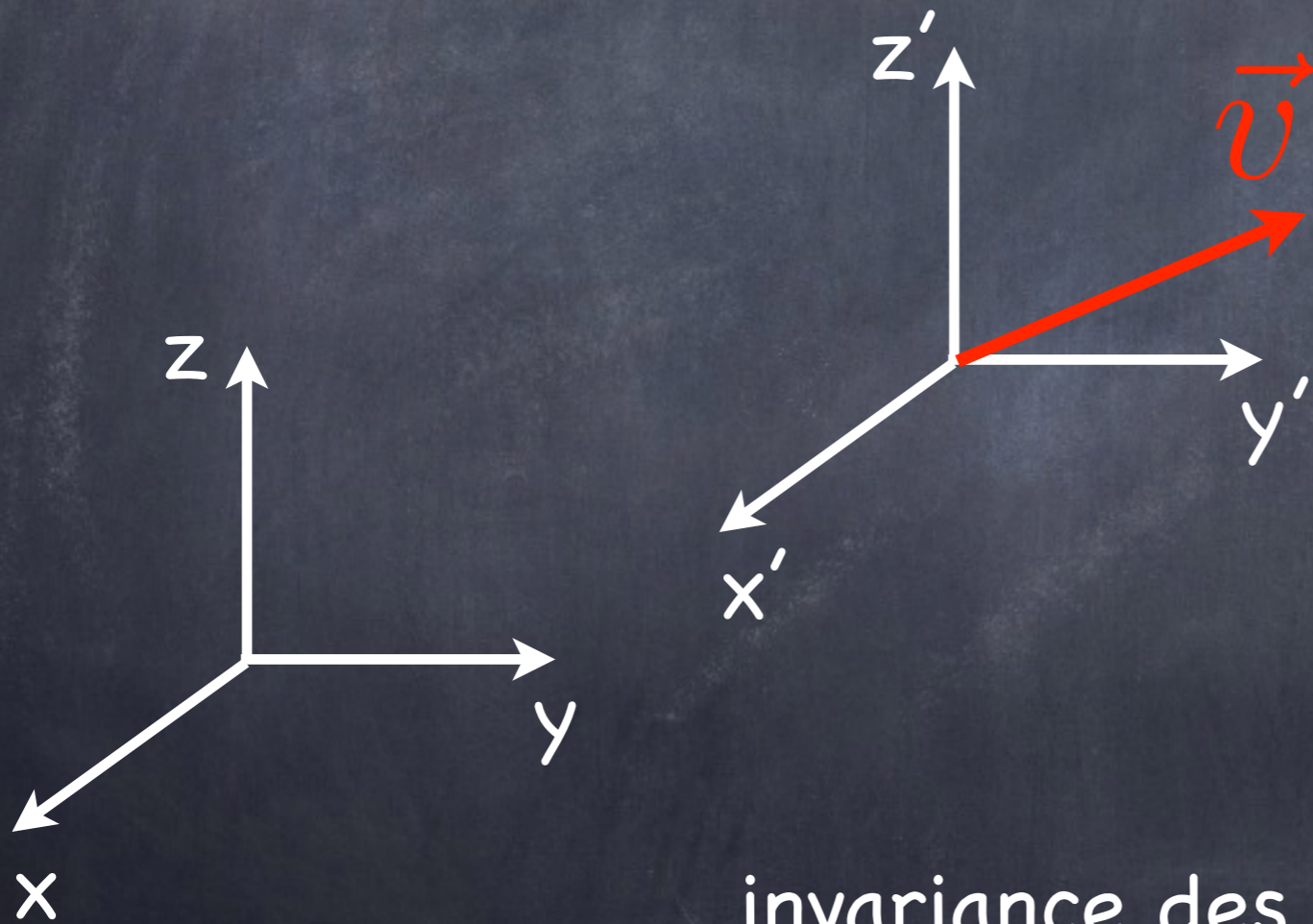
$$\vec{F} = -G \frac{m m'}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{F} = m_G \vec{g}$$

- démontre les lois de Képler
- l'héliocentrisme est peu à peu la représentation du monde adoptée en occident
- les observations confirment la théorie de Newton : la Terre est aplatie aux pôles et renflée à l'équateur (confirmation en 1736)

# La relativité

jusqu'au début du XXème siècle, la relativité galiléenne associée aux lois de Newton décrivent de façon très satisfaisante les phénomènes observés



$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v} t$$

$$t' = t$$

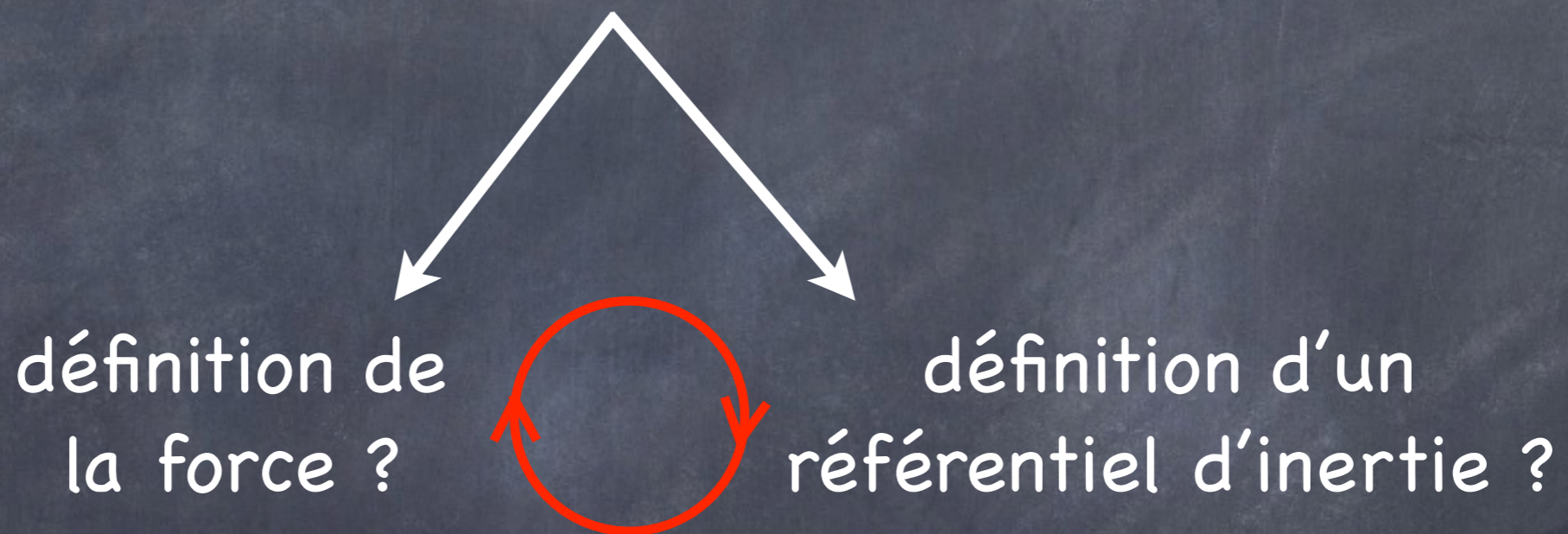
$$\frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{v}' = \vec{u} + \vec{v}$$

invariance des lois lors d'un changement de référentiel d'inertie à un autre

# La relativité

dans un référentiel d'inertie, un point matériel est en mouvement rectiligne uniforme quand aucune force n'agit sur lui



ambigüité importante de la théorie mais Newton croyait à l'existence d'un référentiel absolu inertiel (puisqu'il croit à un espace absolu), contrairement à Leibniz qui pense que le principe de relativité implique le rejet de la notion d'espace absolu

(poussière mise sous le tapis jusqu'à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle vu les succès rencontrés)



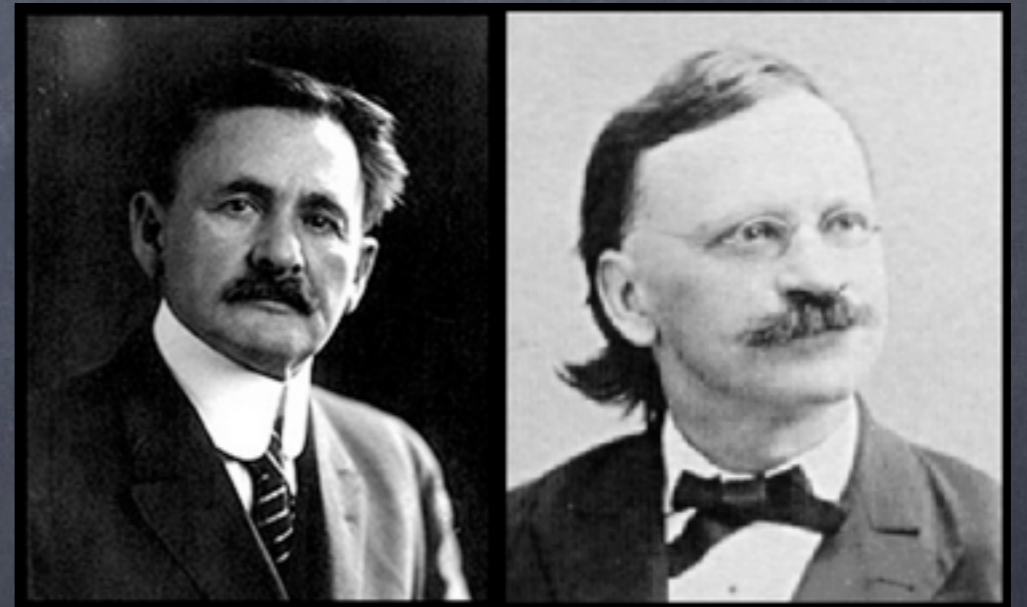
# La relativité



Maxwell

150 ans après Newton et Leibniz : les lois de l'électromagnétisme ne sont pas invariantes par transformation de Galilée : la loi de composition des vitesses ne fonctionne pas dans ce cas !

expérience de Michelson et Morley (1881-1887) : la lumière se propage dans l'éther (il fallait un milieu à cette époque)



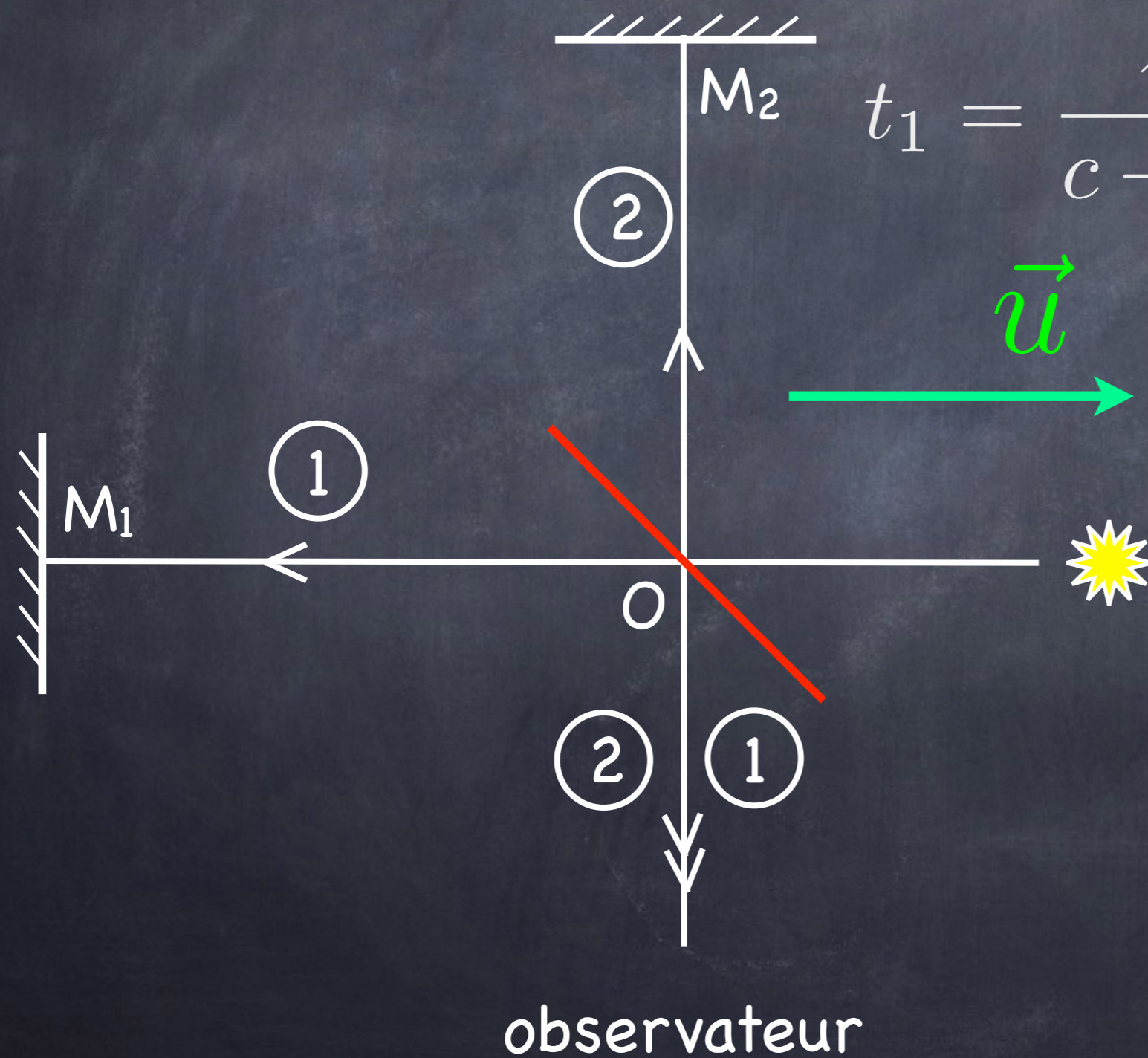
principe : utiliser un interféromètre de Michelson avec un des bras dans le sens de la marche de la Terre (à 30 km/s) ;  
hypothèse :  $c$  est constante et isotrope dans le référentiel de l'éther

# La relativité

Exercice!

référentiel : le référentiel galiléen lié à l'éther

$$OM_1 = OM_2 = \ell$$



trajet  $OM_1O$

$$t_1 = \frac{\ell}{c+u} + \frac{\ell}{c-u} = \frac{2\ell c}{c^2 - u^2}$$

trajet  $OM_2O$

$$t_2 = 2t_{OM_2}$$

$$l_2 = 2 \sqrt{\ell^2 + (ut_{OM_2})^2}$$

soit

$$t_2 = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

# La relativité

référentiel : le référentiel galiléen lié à l'éther

$$t_1 \neq t_2 \quad \Delta t \sim \frac{\ell u^2}{c^3}$$

différence de marche :  $\delta = c\Delta t$      $p = \delta/\lambda$

dans l'expérience, l'interféromètre flottait sur un bain de mercure : en faisant pivoter l'ensemble de  $90^\circ$ , on doit donc observer un déplacement de la figure d'interférence de :

$$\Delta p = 2\delta/\lambda = 0.4 \quad \text{avec} \quad \ell = 10 \text{ m}, \quad \lambda = 0.5 \mu\text{m}$$

pour un appareil sensible à  $\Delta p \sim 0.01$

aucune modification de la figure d'interférence n'a été observée  
: Terre immobile dans l'éther ?

# La relativité

État des lieux en 1904 : équations de Maxwell non invariantes par transformation de Galilée et qu'on pense être valables dans le référentiel lié à l'éther qui devient un référentiel absolu. Bonne confiance en Maxwell, d'autant que Hertz vient de découvrir les ondes prédites par la théorie.

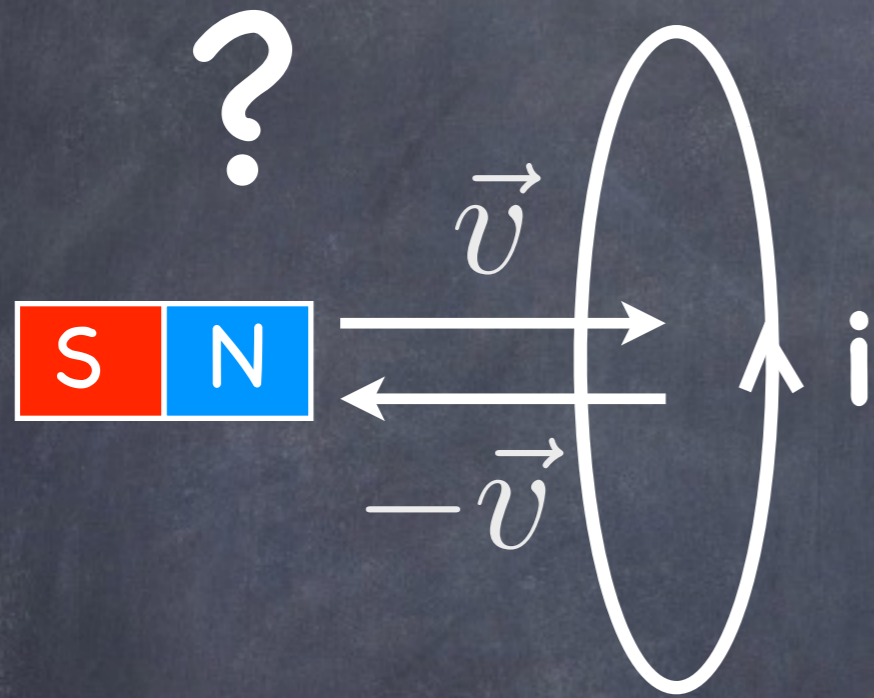
Il faut donc :

conserver la forme des équations de Maxwell dans un changement de référentiel passant d'un référentiel au repos par rapport à l'éther à un autre en translation rectiligne uniforme par rapport à lui.

En 1898 la forme mathématique de la transformation a été découverte par Larmor. En 1899 Poincaré parlait déjà du principe de relativité. La transformation s'appelle la transformation de Lorentz : travail commencé par Larmor, fait en grande partie par Lorentz, achevé par Poincaré et dont le sens physique ne sera donné que par Einstein en 1905.

# Vers la relativité restreinte

Expérience de l'aimant et de la spire



spire au repos dans un champ dépendant du temps ou spire en mouvement dans un champ indépendant du temps ?

Einstein était convaincu que les équations de Maxwell devaient avoir la même forme dans tous les référentiels galiléens en translation rectiligne uniforme et que le repos absolu était indétectable : la vitesse de la lumière doit être la même dans tous les référentiels galiléens.

# La relativité restreinte

**Postulat 1** : il existe des référentiels galiléens (ou inertiels) où le temps est uniforme, l'espace homogène et isotrope, tels que, par rapport à ces référentiels, toute particule libre, soumise à aucune action extérieure, est soit au repos soit animée d'un mouvement rectiligne et uniforme. Tous ces référentiels galiléens sont équivalents pour décrire les lois fondamentales de la nature. Dans ces référentiels toutes les lois fondamentales de la physique (et donc pas seulement l'électromagnétisme) prennent la même forme et se traduisent par des équations invariantes par changement de référentiel galiléen.

Dès lors, quelles sont les équations qui traduisent les lois fondamentales ?

Si  $F=ma$  est OK avec relativité Galiléenne, alors Maxwell ne satisfait pas au principe de relativité.

Si Maxwell est OK relativité Lorentzienne, alors  $F=ma$  est fausse.

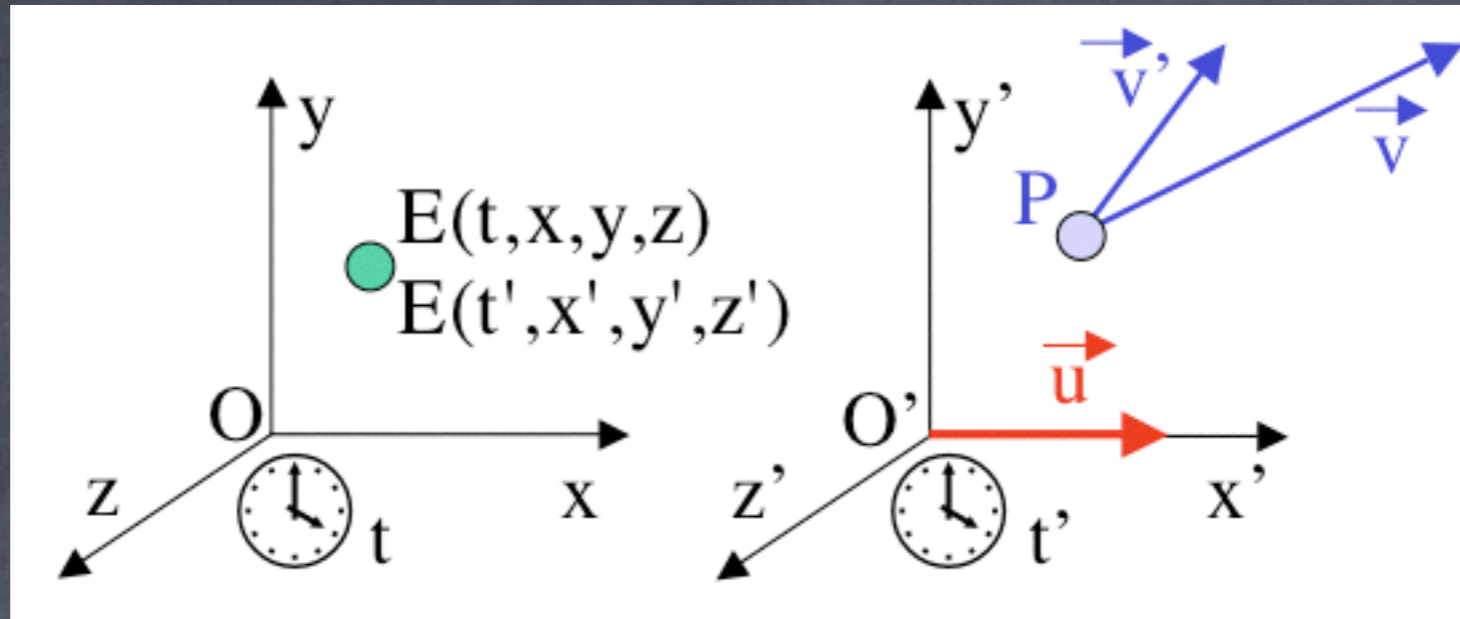
# La relativité restreinte

**Postulat 2** : il existe une vitesse limite pour toute propagation des interactions ou signaux, cette vitesse limite est une constante universelle, elle correspond également à la vitesse de propagation de la lumière dans l'espace vide de charges et de courants. La vitesse de propagation dans le vide a donc même valeur  $c$  par rapport à tout référentiel galiléen et ne dépend donc pas, en particulier, du mouvement de la source qui l'émet.

Les deux postulats sont inconciliables en apparence, à cause de la loi d'addition des vitesses à moins de revoir les concepts d'espace et de temps : très audacieux ! Ceci explique qu'Einstein n'a eu son prix Nobel qu'en 1922 (17 ans après la relativité restreinte).

rejet des transformations de Galilée pour la **transformation de Lorentz**

# La relativité restreinte



R et R' sont deux référentiels d'inertie, R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R selon Ox.

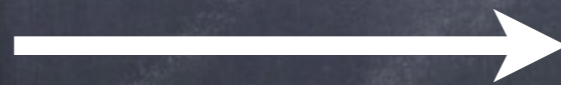
$$t' = t$$

$$x' = x - ut$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$



$$t' = \gamma(t - ux/c^2)$$

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

exercice : vérifier que le résultat de l'expérience de Michelson et Morley est correctement décrit dans le cadre de ces deux postulats.



# La relativité restreinte

écriture tensorielle (ici matricielle avec convention d'Einstein)

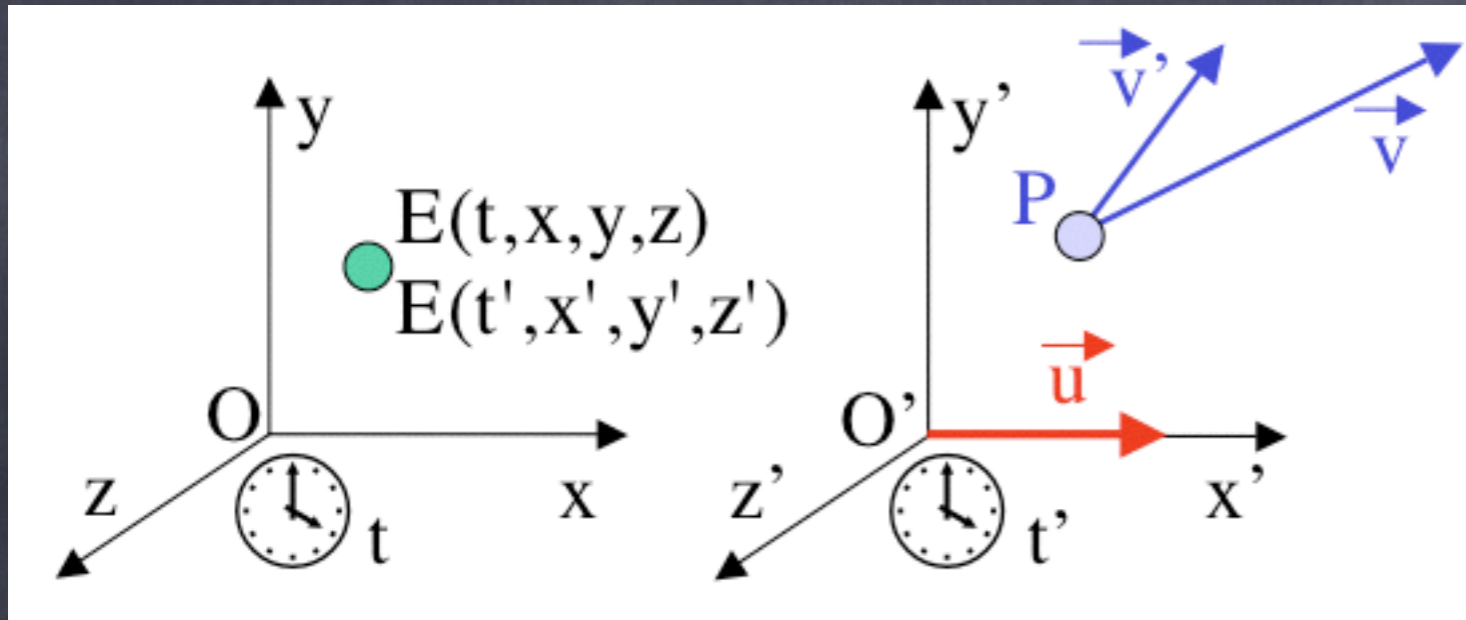
$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

La transformation de Lorentz rend les équations de l'électromagnétisme invariante par changement de référentiel galiléen. Les équations de la mécanique ne le sont plus !



besoin de modifier la forme des lois de Newton, l'espace, le temps, la notion de simultanéité, la masse... tout devient relatif !

# La relativité restreinte



composition des vitesses :

$$v' = \frac{v - u}{1 - uv/c^2}$$
$$v = \frac{v' + u}{1 + uv/c^2}$$

et si  $v' = c$ , on trouve  $v = c$

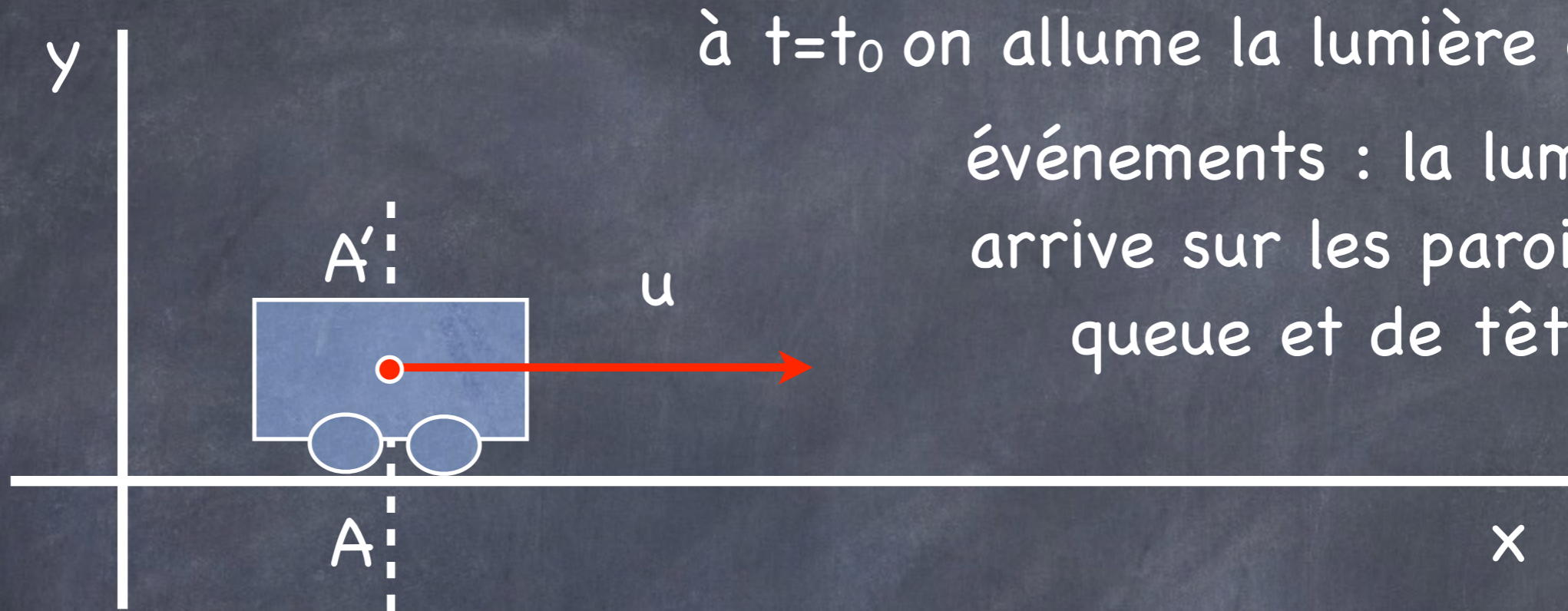
la simultanéité n'est plus absolue :

$$E_1(x'_1, y'_1, z'_1, t'), E_2(x'_2, y'_2, z'_2, t') \quad \Delta t' = 0$$

dans R :  $\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(\Delta t' + u\Delta x'/c^2)$

soit ici  $\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \frac{u(x'_2 - x'_1)}{c^2} \neq 0$

# La relativité restreinte

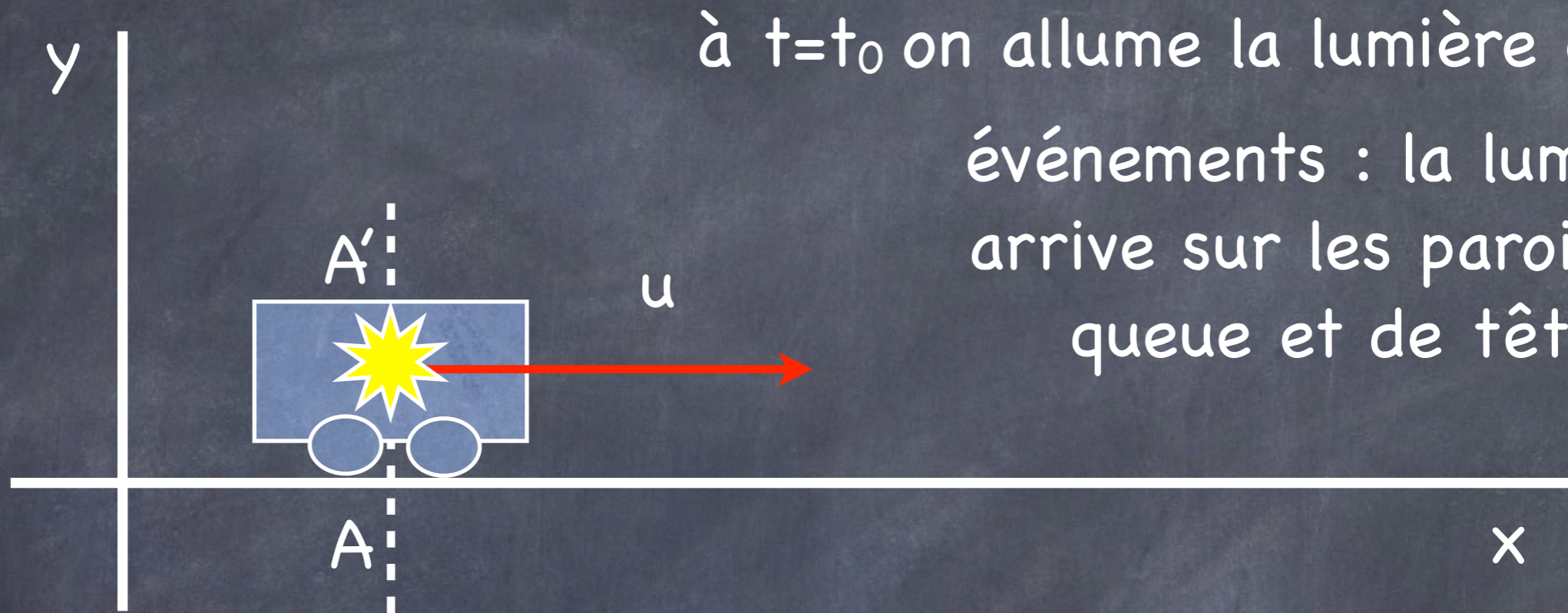


à  $t=t_0$  on allume la lumière en  $A'$   
événements : la lumière arrive sur les parois de queue et de tête

en relativité galiléenne, les 2 parois sont éclairées aux mêmes instants et sont donc simultanés dans les deux référentiels

en relativité restreinte,  $O$  voit un décalage temporel entre les 2 émissions (car la paroi de queue va à la rencontre de la lumière alors que la paroi de tête la fuit)

# La relativité restreinte



à  $t=t_0$  on allume la lumière en  $A'$   
événements : la lumière arrive sur les parois de queue et de tête

en relativité galiléenne, les 2 parois sont éclairées aux mêmes instants et sont donc simultanés dans les deux référentiels

en relativité restreinte,  $O$  voit un décalage temporel entre les 2 émissions (car la paroi de queue va à la rencontre de la lumière alors que la paroi de tête la fuit)

# La relativité restreinte

la notion de durée devient relative :

pour deux événements qui se produisent au même endroit dans  $R'$  ( $x'_1=x'_2$ ) et de durée  $\Delta t'$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(\Delta t' + u\Delta x'/c^2)$$

(par exemple temps de combustion d'une allumette) alors la durée du phénomène est **augmentée** du facteur  $\gamma$

$$\Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t'$$

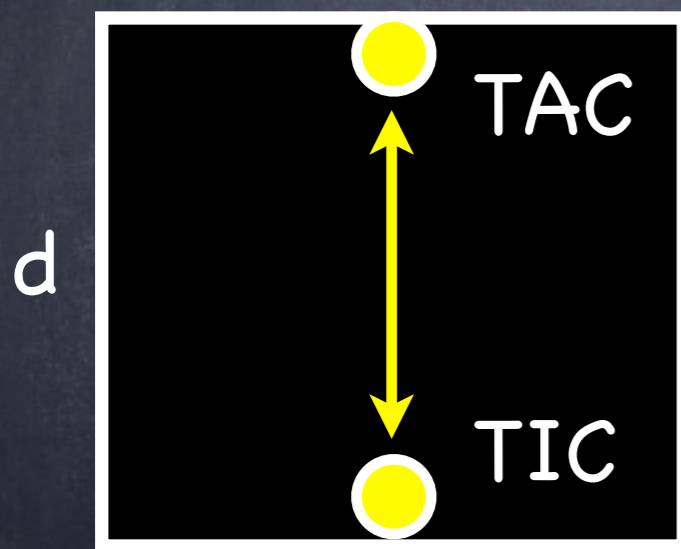
temps minimal = **temps propre**, au repos, dilatation des durées

# La relativité restreinte

la notion de durée devient relative :

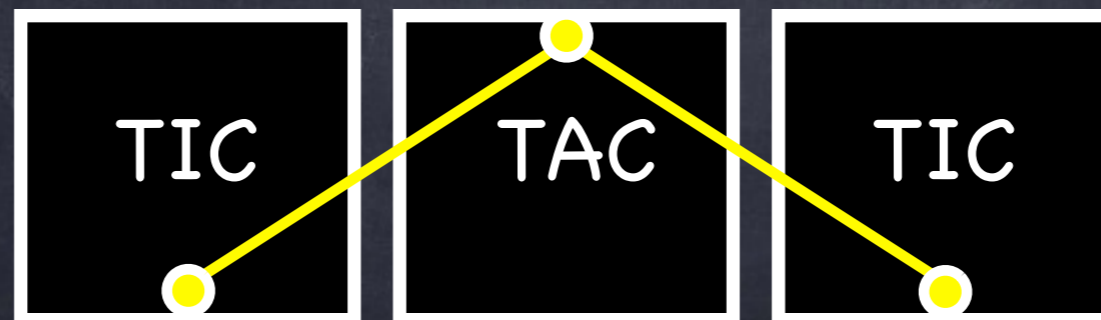
$$\Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t'$$

horloge : instrument qui compte le nombre de périodes d'un processus physique pris comme référence



$$\Delta t = \frac{2d}{c}$$

exercice : calculer les périodes mesurées



horloge embarquée  
vue depuis la Terre

# La relativité restreinte

la notion de longueur devient relative

on n'a pas besoin de définir le temps pour mesurer la longueur d'un objet dans un référentiel où il est **au repos** ; il n'est donc pas nécessaire de préciser les deux instants auxquels on a repéré l'une des extrémités de l'objet et l'autre à n'importe quel autre moment.

Par contre, si l'objet est en mouvement, on doit préciser ces deux instants où ont été repérées les extrémités. L'intervalle d'espace entre les deux extrémités est arbitraire tant qu'on n'a pas précisé l'intervalle de temps qui sépare les deux instants du repérage des extrémités. Si on connaît ces deux instants, connaissant  $u$ , on peut calculer la longueur attendue dans le cas d'un **repérage simultané des extrémités**, c'est ce qui définit la longueur de l'objet dans le référentiel.

# La relativité restreinte

la notion de longueur devient relative

le calcul donne :

on considère un objet au repos dans  $R'$

$$\Delta x' = L_0$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t) \quad \text{avec} \quad \Delta t = 0$$

or  $\Delta x = L$  on obtient finalement

$$L = L_0/\gamma < L_0$$

attention : les dimensions de l'objet ne changent que selon la direction du mouvement !

exemple au quotidien : les muons cosmiques (2 microsecondes,  $\gamma=16$ ) arrivent au sol



# La relativité restreinte

il existe une quantité conservée dans la transformation de Lorentz : c'est l'intervalle d'**espace-temps**

soient 2 événements  $E_1$  et  $E_2$  : calculer la quantité

$$\Delta s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta r)^2$$

entre les 2 événements dans chaque référentiel

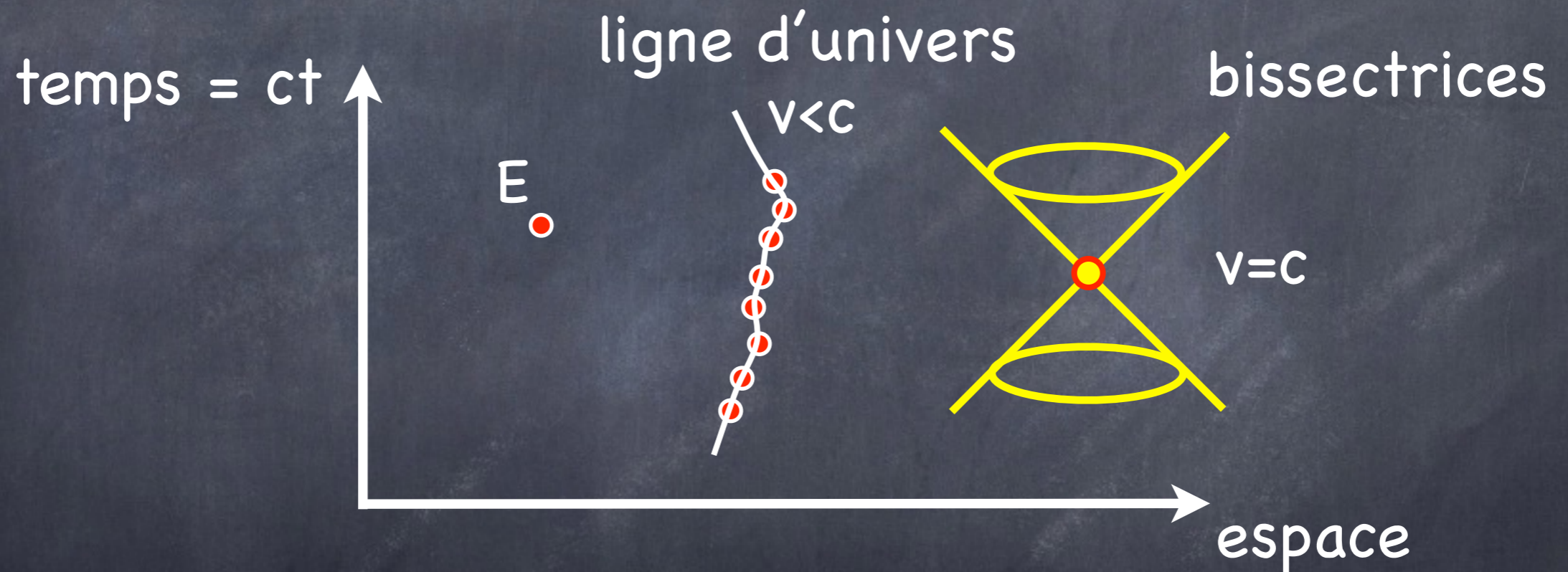
la quantité suivante est un invariant

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

c'est le théorème de Pythagore en géométrie pseudo-euclidienne ; on peut représenter géométriquement un événement en le dessinant dans un espace-temps à 4 dimensions

# La relativité restreinte

ligne d'univers : c'est la suite des événements représentant le mouvement d'un point

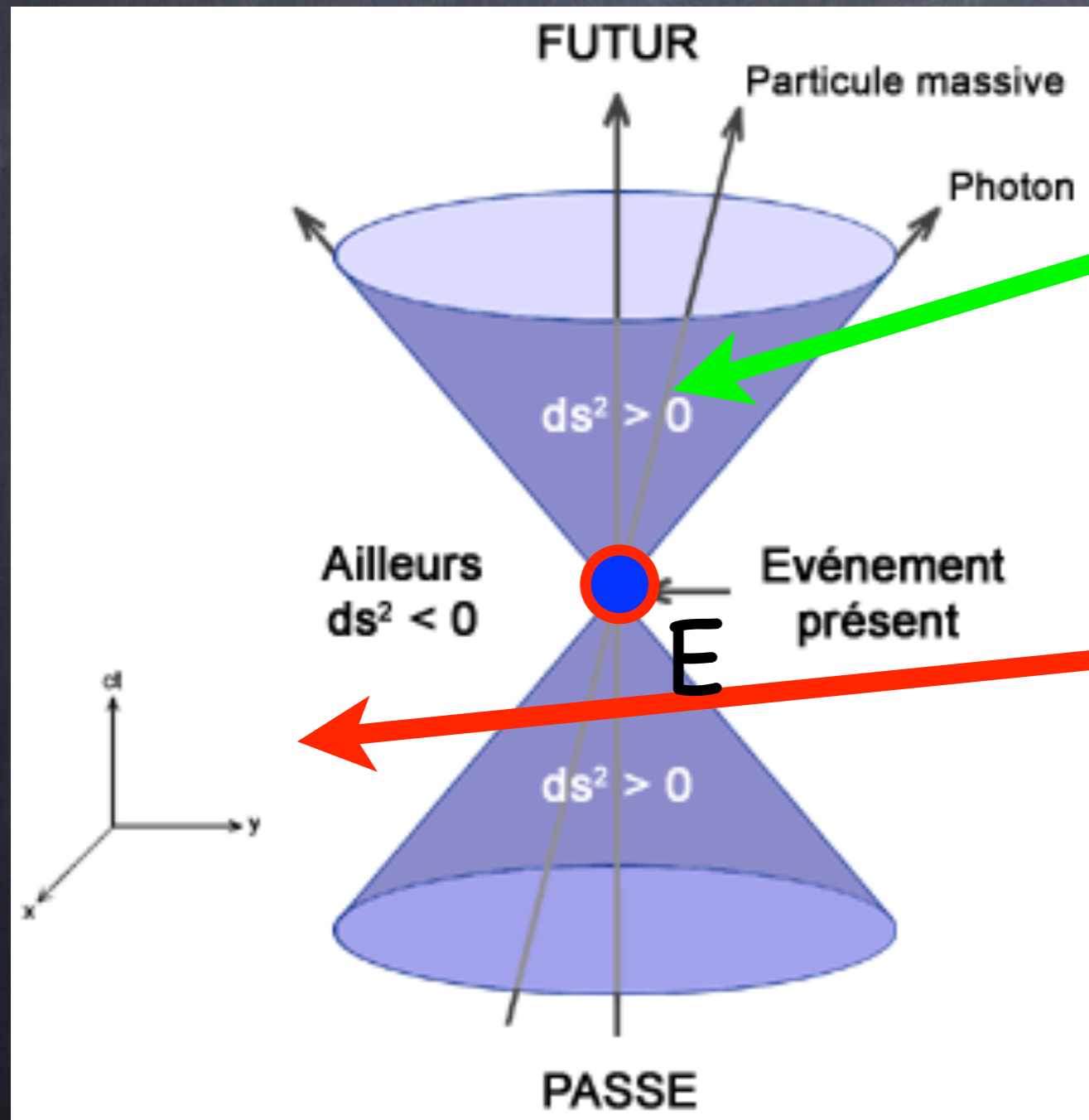


un photon se déplace sur les bords du **cône de lumière**

$$\text{lumière : } ds^2 = 0$$

# La relativité restreinte

en chaque point de l'espace-temps (et donc pour chaque événement), l'ensemble des lignes d'univers permises se trouvent à l'intérieur du cône de lumière en ce point car  $v \leq c$



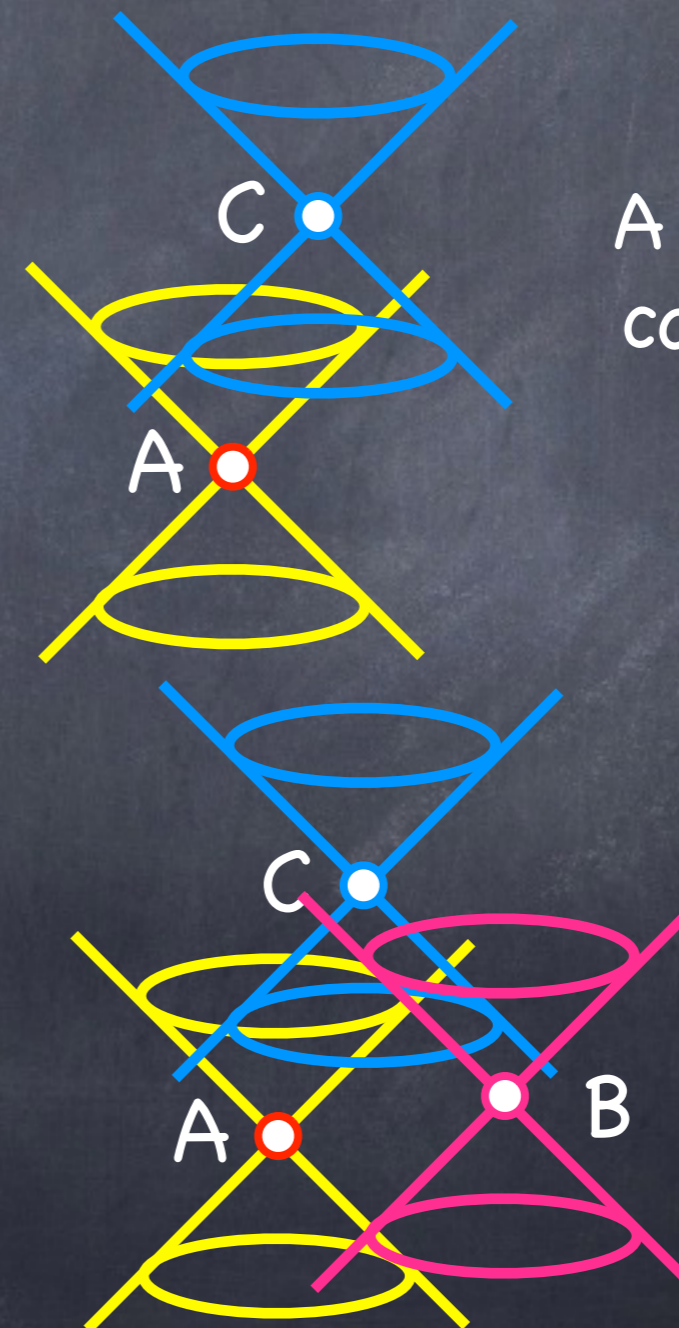
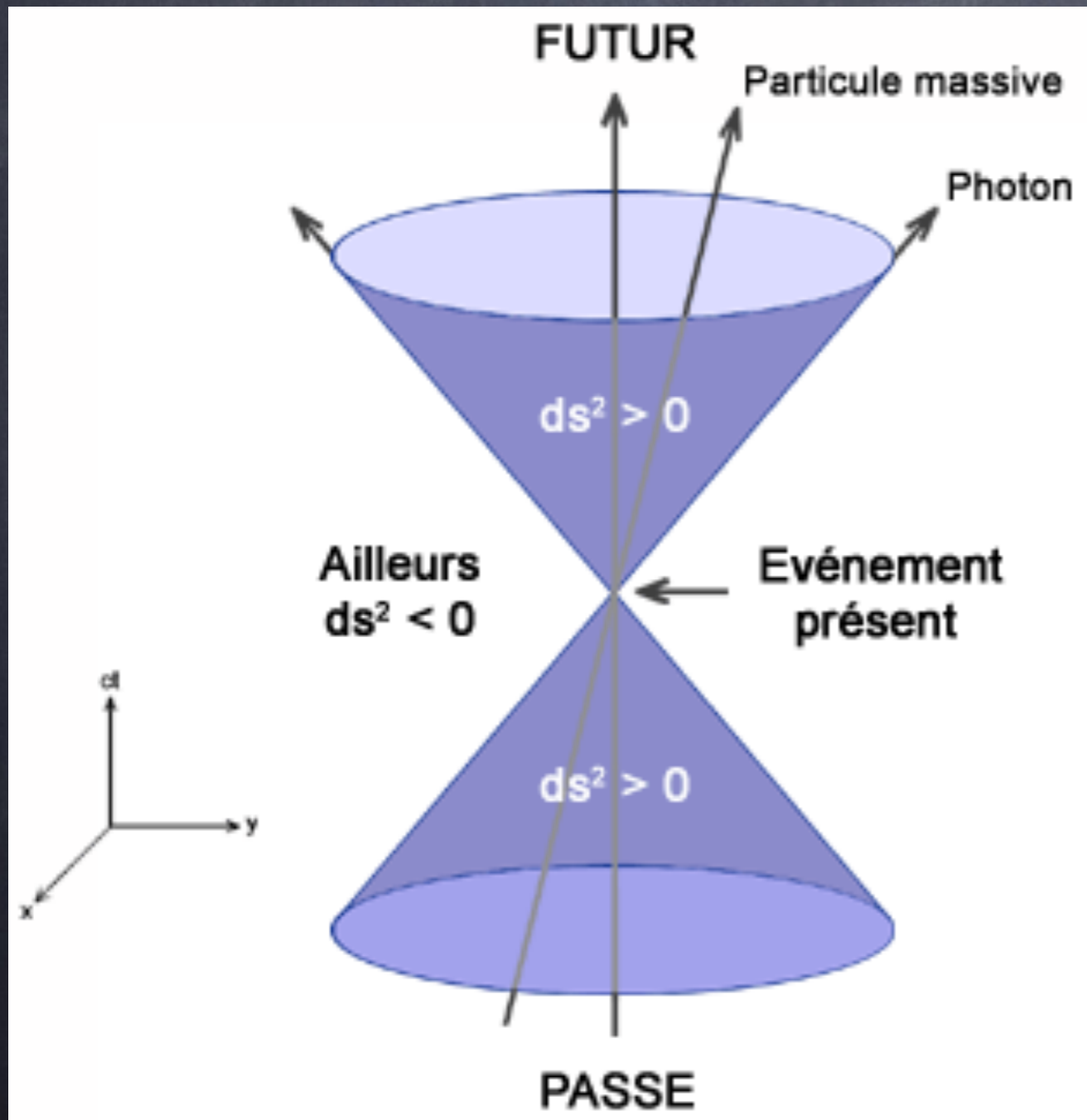
intervalle de genre temps, les événements s'y trouvant peuvent être reliés par un signal avec  $E$

intervalle de genre espace, les événements s'y trouvant ne peuvent pas être reliés à  $E$

le signe de l'intervalle est directement lié à la notion de causalité

# La relativité restreinte

la notion d'interaction instantanée à distance disparaît en relativité et la causalité entre deux événements se résume à savoir s'ils sont tous deux dans le cône de lumière de l'autre



A et C sont en contact causal

C est influencé par A et B qui ne sont pas forcément en contact causal

# La relativité restreinte

remarque : la notion de passé et de futur à l'intérieur du cône de lumière d'un événement donné sont aussi des invariants relativistes (sinon on pourrait échanger passé et futur par un simple changement de référentiel)

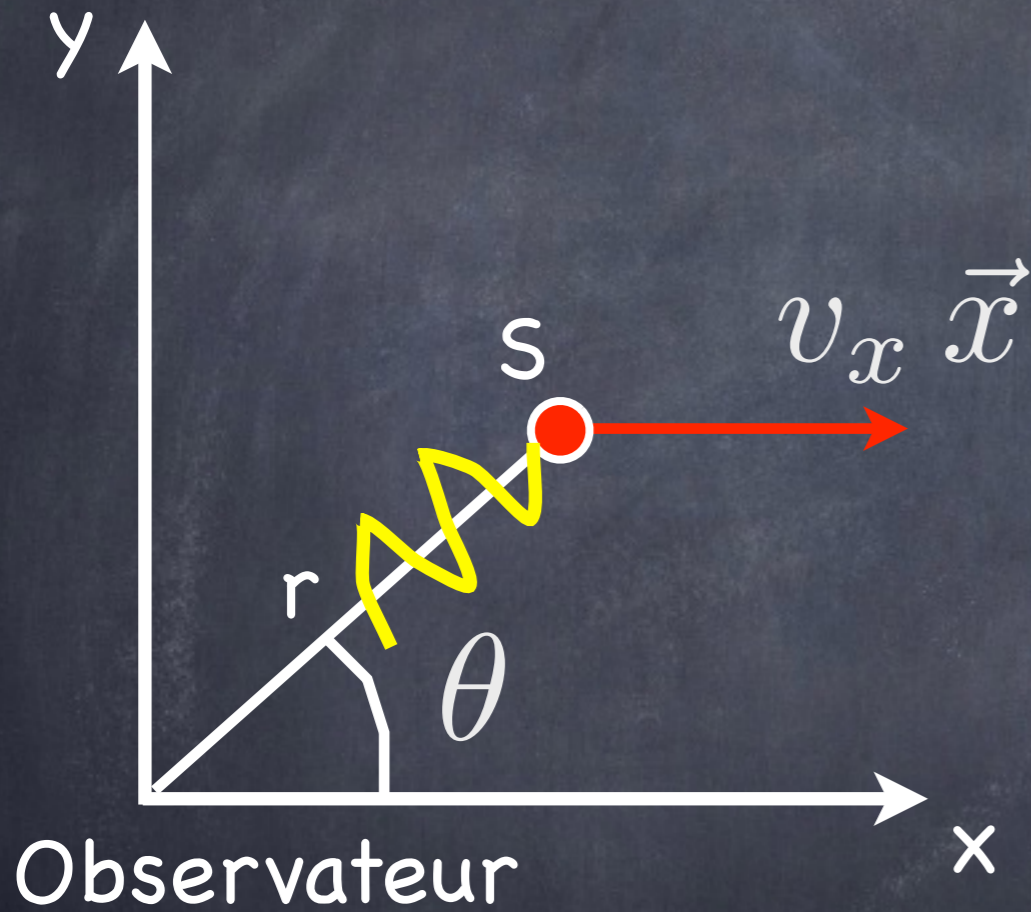
démonstration : soient E l'événement de référence et F un événement de son futur. Si on peut faire passer F du futur de E au passé de E par changement de référentiel alors il doit exister un changement de référentiel permettant de faire coïncider E et F et du coup,  $ds=0$ . Or initialement,  $ds$  n'est pas nul or  $ds$  est invariant ce qui contredit l'hypothèse.

Exercice!

# La relativité restreinte

application : l'effet Doppler

traitement classique



source :  $\nu^* = 1/T^*$

hypothèse :  $v_x T^* \ll r$

soit  $\theta = C^{te}$

calculer les temps de réception de deux signaux émis par S à  $t$  et  $t+T^*$

effet pour  $\theta = 0, \pi/2, \pi$  ?

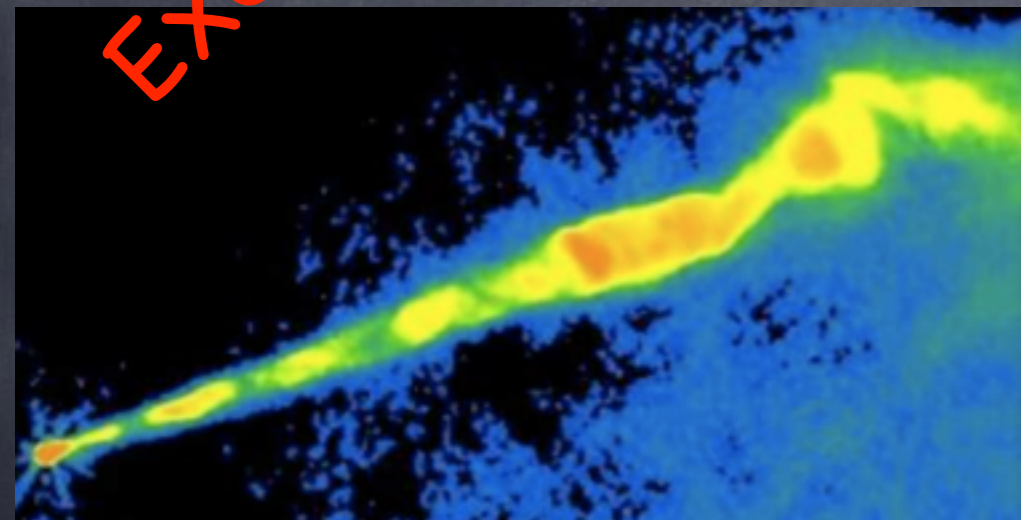
en déduire l'expression de l'effet Doppler relativiste

Exercice!

# La relativité restreinte

application : vitesse superluminique

jet superluminique de l'AGN M87  
vu en radio, optique et X



$$v_{\text{app}} = \frac{\sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} v$$

# La relativité restreinte

Superluminal Motion in the M87 Jet

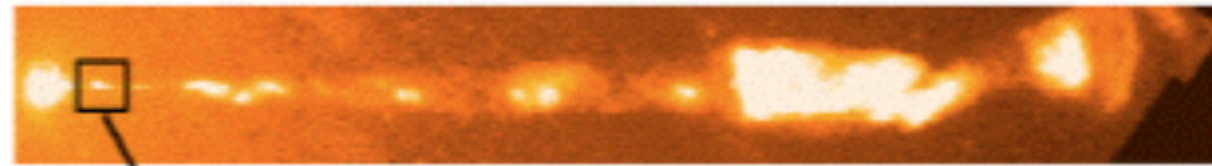
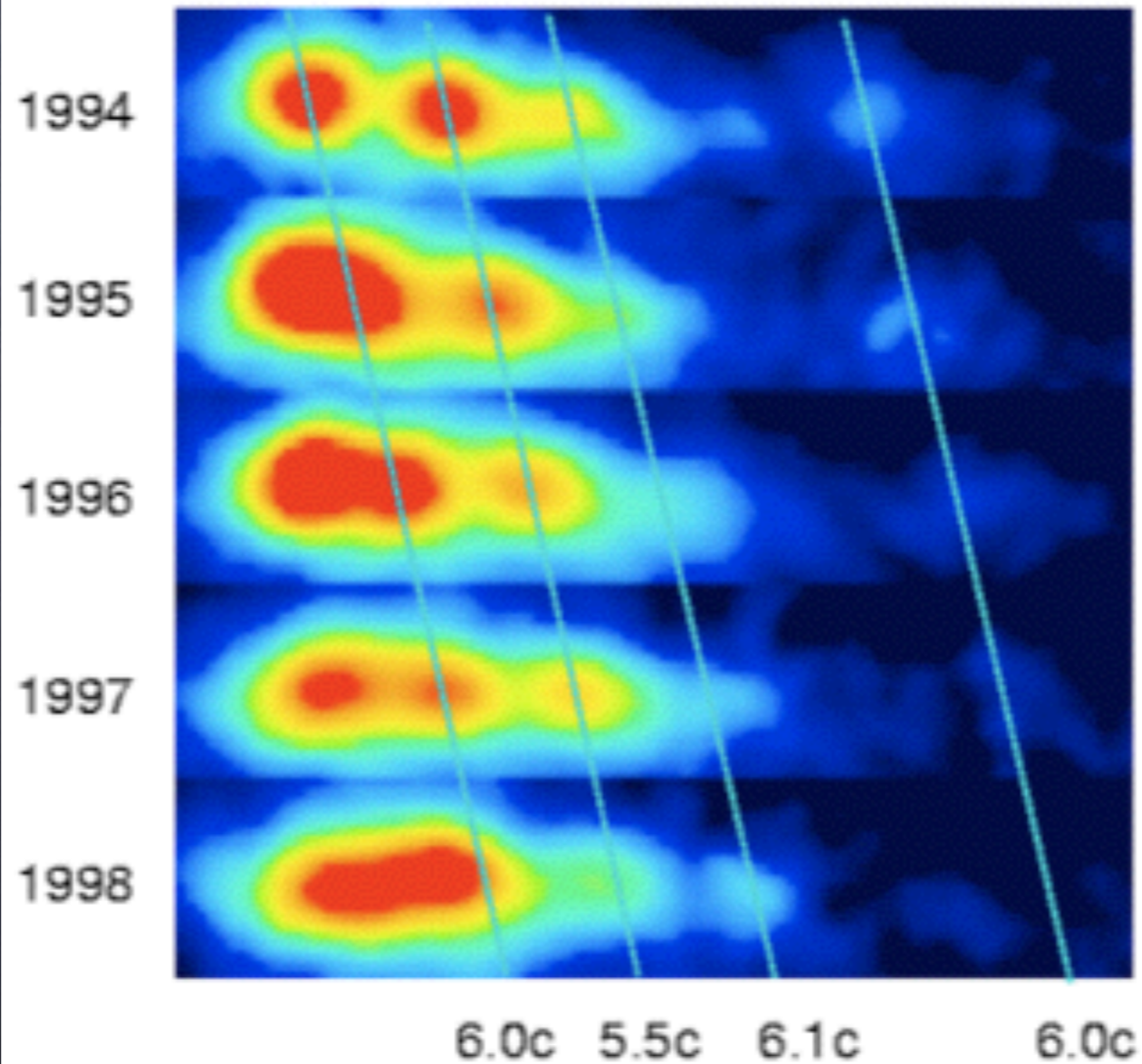


image HST





# Vers la relativité générale



# Vers la relativité générale

le principe d'équivalence

force électrique  $m_i \vec{a} = \frac{q q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$ ,  $m_i \vec{a} = q \vec{E}$

pour la gravitation :  $m_i \vec{a} \propto \vec{g} = m_G \vec{g}$

$$m_i = m_G \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Galilée : tous les corps tombent avec la même accélération, indépendamment de leur masse et de leur nature, vérifié hors de la Terre lors d'une mission Apollo

problème de la définition d'un référentiel galiléen non-indépendant du principe d'inertie

# Vers la relativité générale

## le mouvement inertiel

selon Newton : mouvement rectiligne uniforme

selon Einstein : mouvement d'un point matériel dans le champ de gravitation partout présent dans l'univers

## force

selon Newton : ce qui fait sortir un point matériel du mouvement inertiel

selon Einstein : OK !

nouveauté : la gravitation n'est plus une force car elle est contenue dans la définition de l'inertie

intérêts : le mouvement inertiel est proprement défini (plus d'ambiguïté avec le référentiel galiléen), l'égalité des masses  $m_i$  et  $m_G$  est intégrée et on envisage d'unifier gravitation et inertie

# Vers la relativité générale

“on a des points de vue équivalents sur la gravitation dans un référentiel d’inertie où règne un champ de gravitation uniforme ou dans un référentiel accéléré par rapport au précédent de façon uniforme mais où la gravitation n’existe pas en tant que force”

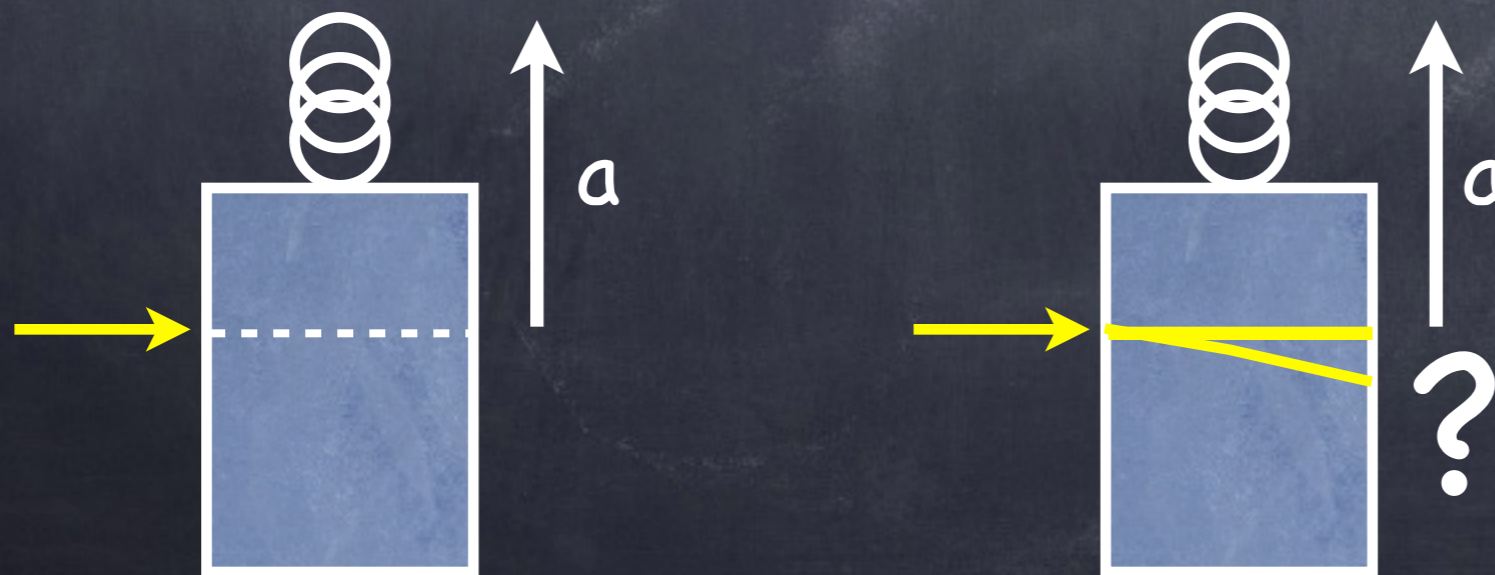
cet énoncé est généralisable à n’importe quel champ de gravitation en utilisant la notion de référentiel local (raisonner sur un ascenseur en orbite)

**Exercice :**

ne marche pas sans accélération !

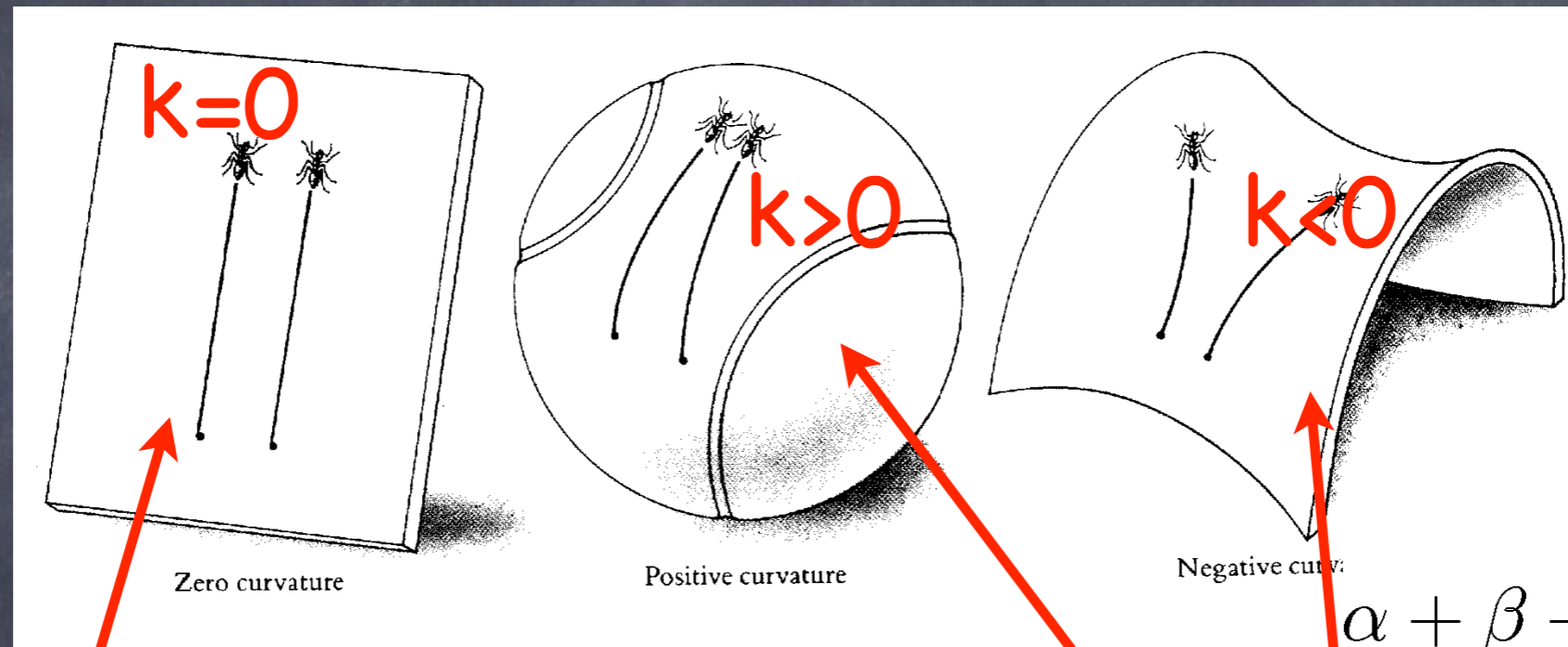
déviations de la lumière dans un champ de gravitation !

$$m_{\text{eq}} = E/c^2$$



# Vers la relativité générale

prix à payer : recours à la géométrie non-euclidienne  
l'espace-temps devient courbe (dans le temps et dans l'espace)



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S}{R^2}$$

géométrie euclidienne

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

géométrie non euclidienne

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

avec en plus la dimension imbriquée du temps...

RG = théorie locale !

# L'équation d'Einstein

principe de moindre action

action liée à la géométrie :

$$S_G = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\lambda)$$

de variation

$$\delta S_G = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x (\delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu})$$

et pour la matière :

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

# Équations d'Einstein

pour info...

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\rho\beta,\gamma} + g_{\rho\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho})$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (g_{\beta\gamma,\alpha\delta} + g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta}) \\ + g_{\mu\nu} (\Gamma_{\alpha\delta}^{\mu} \Gamma_{\beta\gamma}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} \Gamma_{\beta\delta}^{\nu}).$$

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} \\ = \Gamma_{\alpha\beta,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\rho,\beta}^{\rho} + \Gamma_{\gamma\rho}^{\rho} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\rho} \Gamma_{\alpha\rho}^{\gamma}$$

$$\text{et : } R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R_{\alpha}^{\alpha}$$

indices grecs : varient de 0 à 3 (temps et espace)

indices latin : varient de 1 à 3 (espace seul)

# Équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

courbure de  
l'espace-temps

=

énergie et  
matière

+

constante  
cosmologique



# Équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

courbure de l'espace-temps = énergie et matière + constante cosmologique

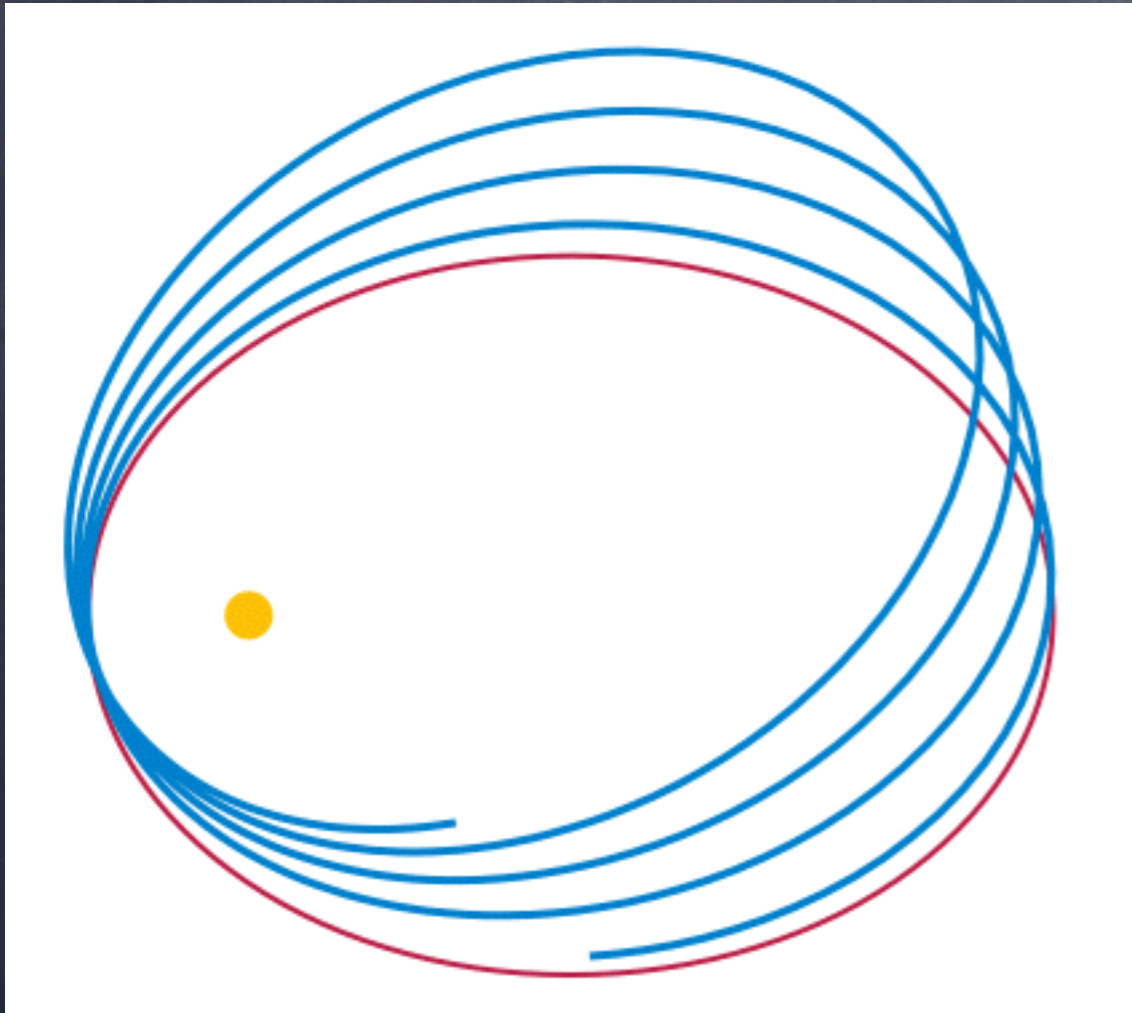
Tout ceci sans aucune hypothèse simplificatrice.  
Cette théorie n'a jamais été mise en défaut  
jusque là (confirmée dès 1919).

# Succès (historiques) de la théorie

- mouvement du périhélie de Mercure
- déplacement des raies spectrales dans un champ gravitationnel
- déviation de la lumière par un champ gravitationnel

# Succès de la théorie

- mouvement du périhélie de Mercure



$$\varphi_{Einstein} = \frac{6 \pi G M_S}{c^2 a (1 - e^2)} = \frac{24 \pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}$$

désaccord de 43'' d'arc par siècle entre la théorie Newtonienne et les mesures

décalage mesuré (en arcsec/siècle) : **5600.73 ± 0.41**

décalage théorique (Newton) : **5557.62 ± 0.20**

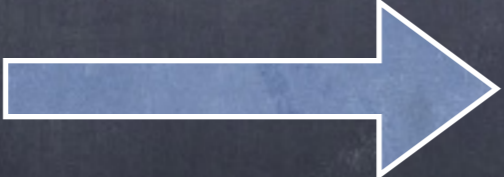
décalage théorique (Einstein) : **5600.65 ± 0.20**

# Succès de la théorie

- déplacement des raies spectrales dans un champ gravitationnel

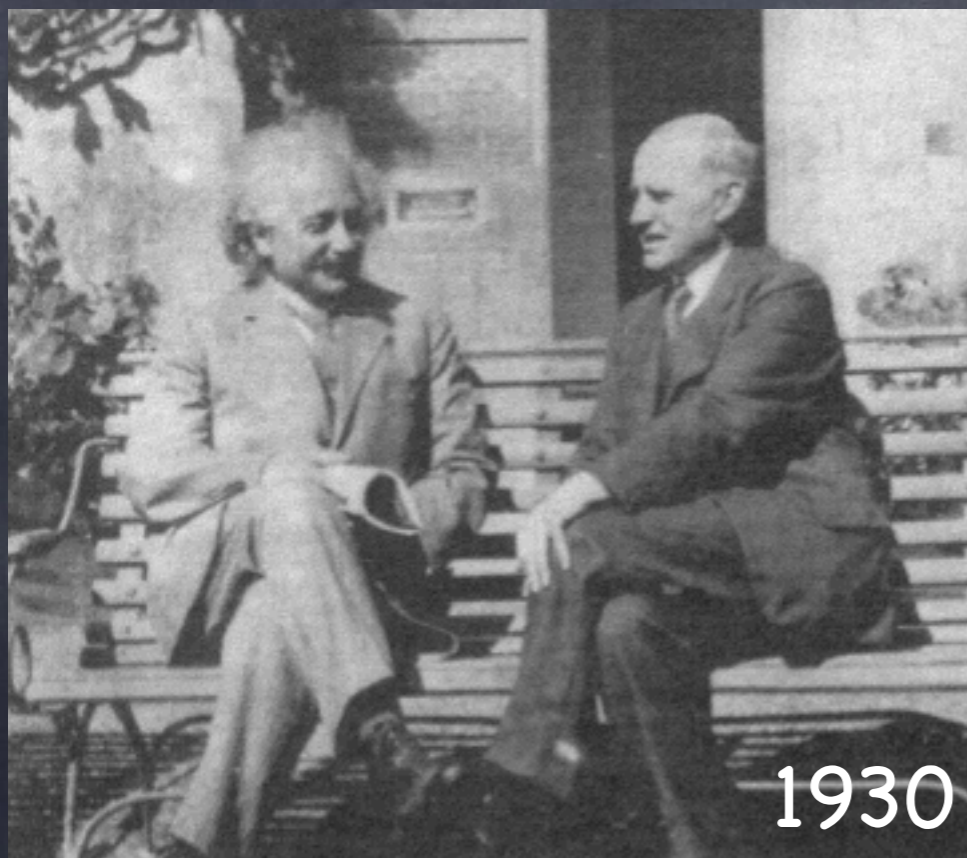
les intervalles de temps changent en présence d'un champ gravitationnel :

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dt < dt$$

 décalage vers le rouge

En 1959, Pound et Rebka ont expérimenté avec succès cette prévision sur une différence d'altitude de 22,6 mètres dans une tour de l'université Harvard Phys. Rev. Lett. 3, 439–441 (1959)

# Succès de la théorie



Eddington 1919 :  
déviation de la lumière  
des étoiles d'arrière-  
plan lors d'une éclipse  
totale de Soleil

037

einstein akademie wissenschaften  
berlin

Telegraphie des Deutschen Reichs.  
Berlin, Haupt-Telegraphenamt

Antw S

Microobservatory calif 129/12 50 lr 19/16. - Vesternunion

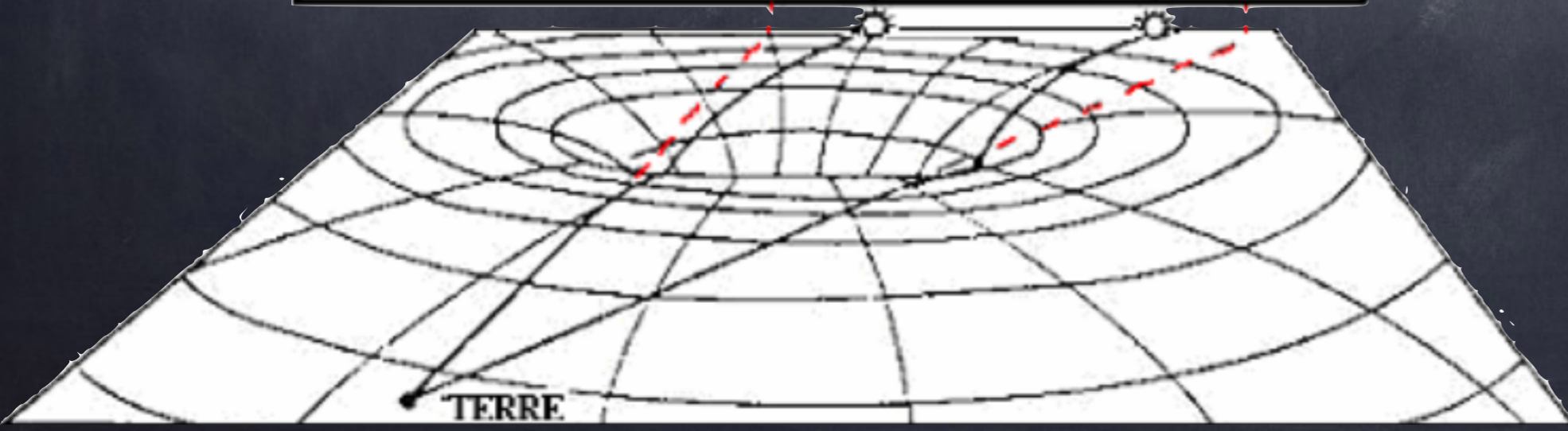
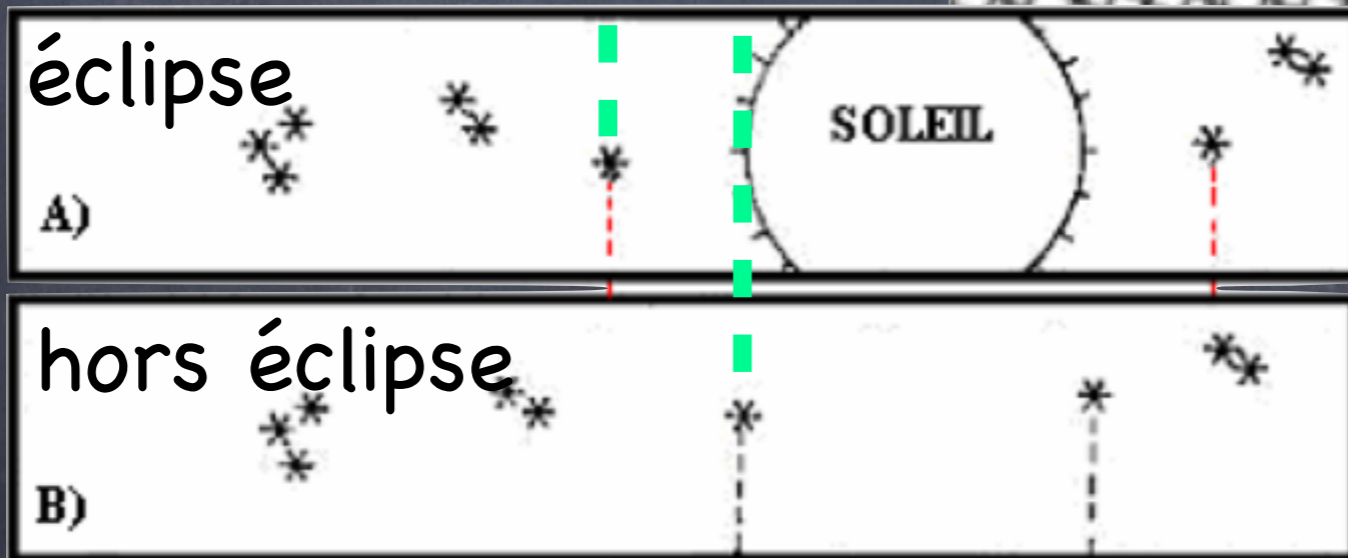
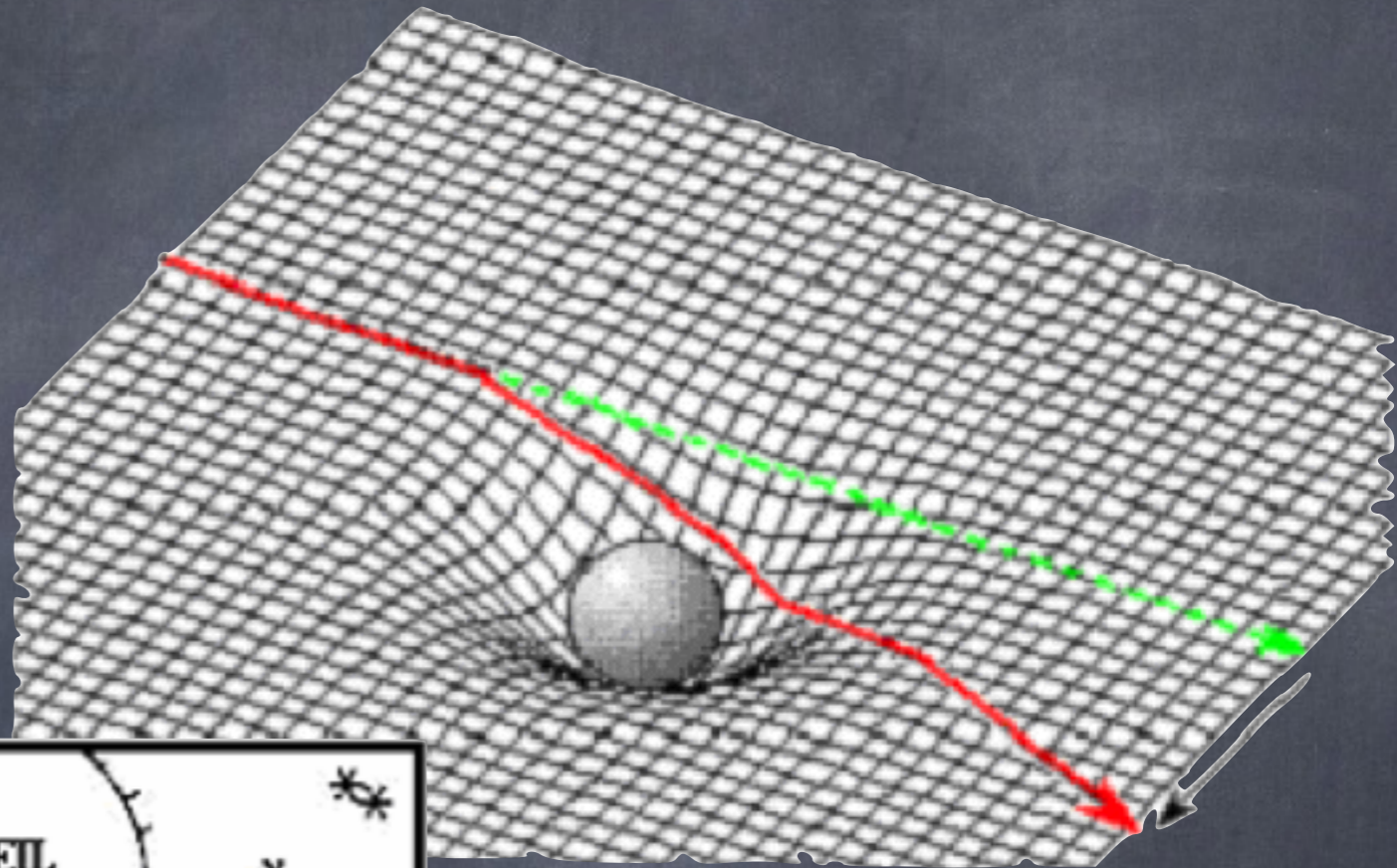
three pairs australia tahiti eclipse plates measured by campbell  
trumpler sixty two to eighty four stars each five of six  
measurements completely calculated give einstein deflection  
between one point fifty nine and one point eighty six seconds  
arc mean value one point seventy four seconds = campbell . +

1,28

7,5

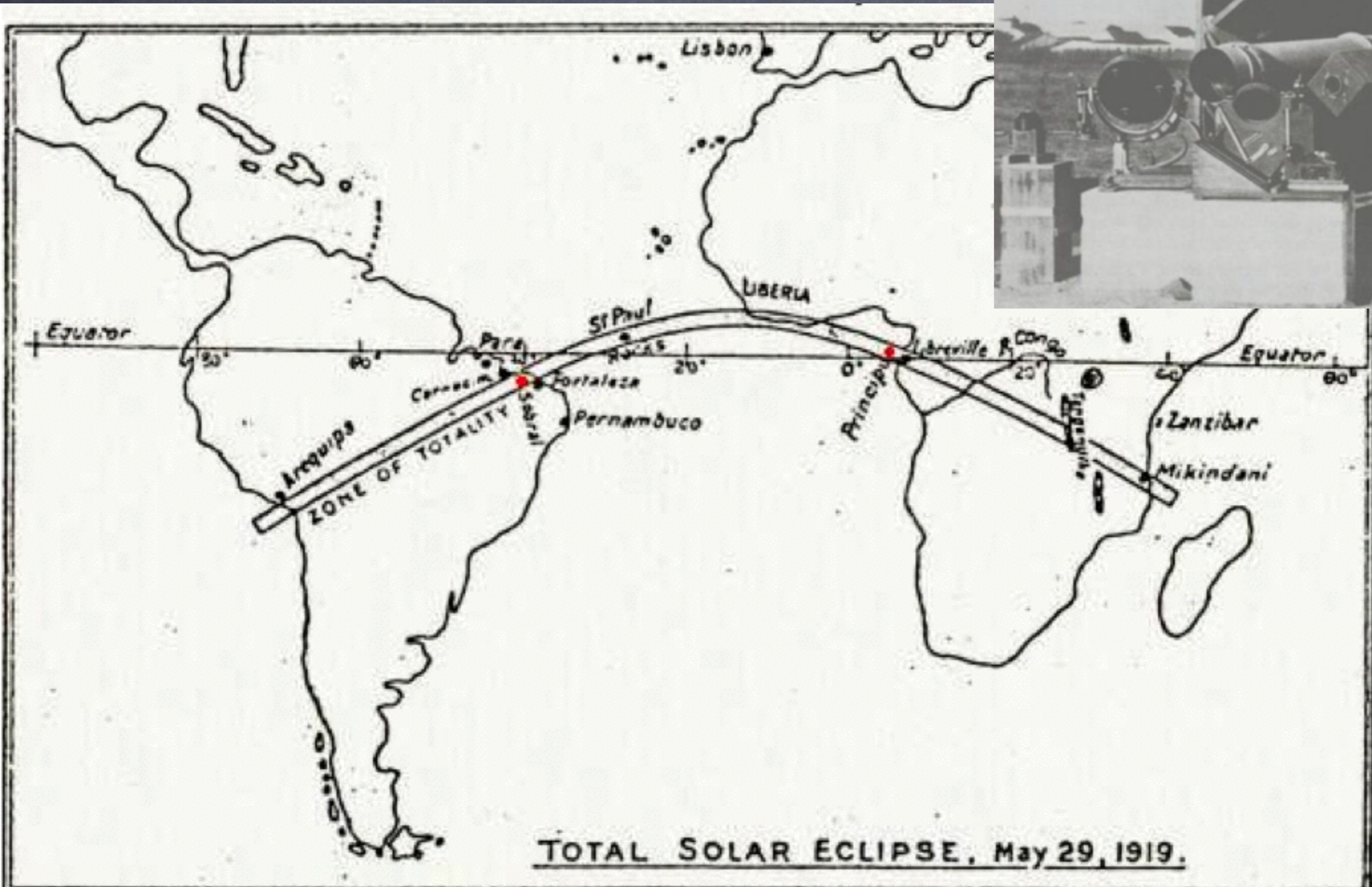
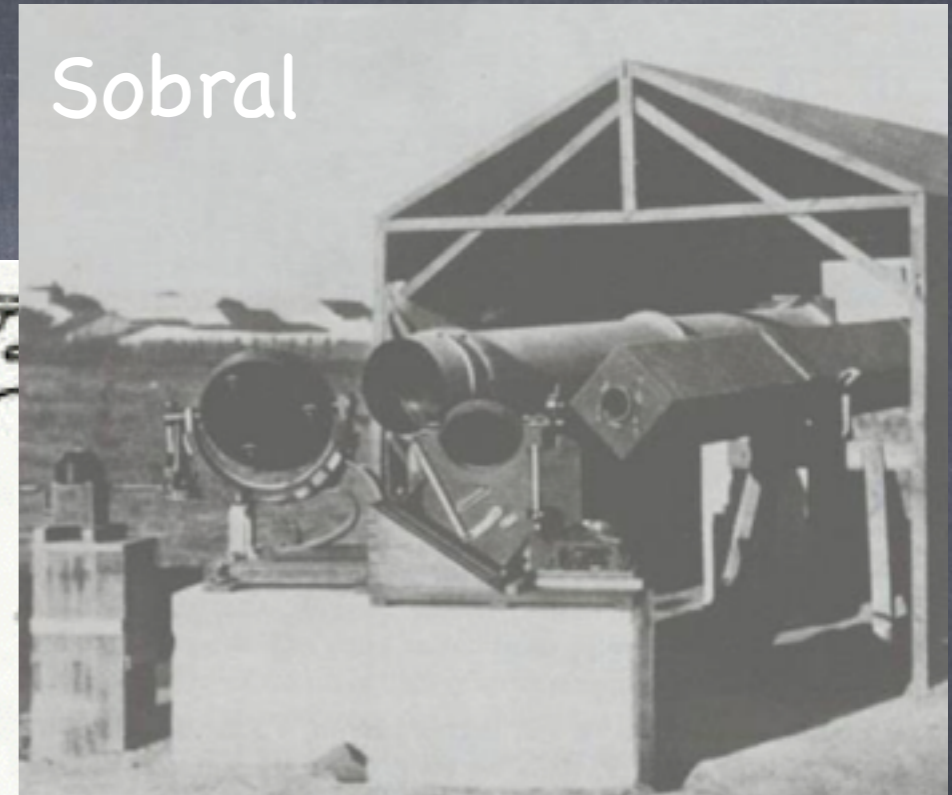
# Succès de la théorie

décalage mesurable !

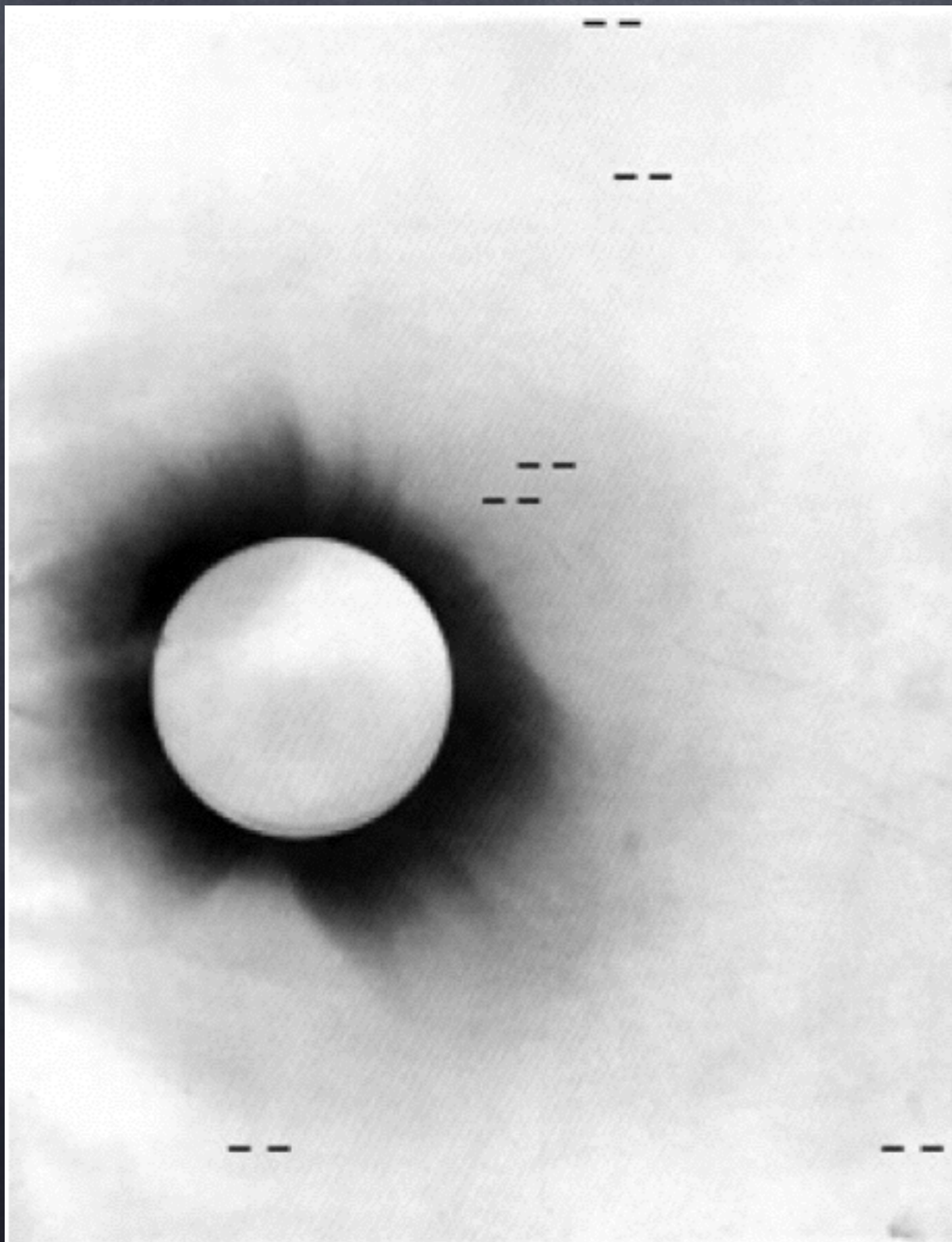


# Succès de la théorie

Sobral



# Succès de la théorie





# Succès de la théorie

2 missions pour mesurer les décallages d'étoiles :  
une à Sobral, Brésil (Davidson et Crommelin)  
l'autre à Principe, golfe de Guinée (Eddington et Cottingham)

coup de chance : pendant l'éclipse, le soleil passe en avant-plan de l'amas des Hyades

à Sobral : ciel clair

à Principe : nuageux

les mesures de décallage donnent :

Sobral :  $1''98 \pm 0''12$

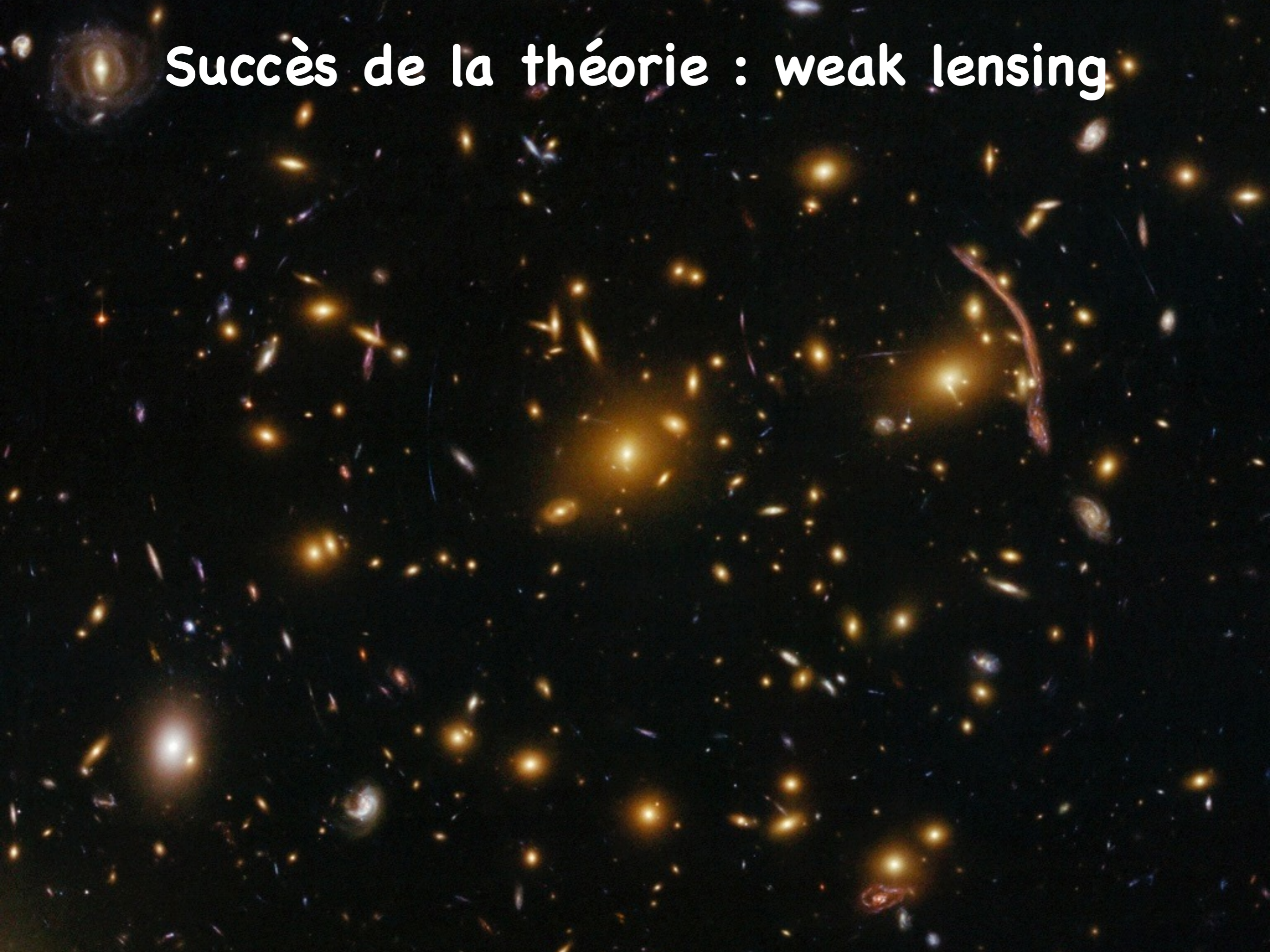
Principe :  $1''61 \pm 0''30$

décallage théorique :  $1.745''$

# Succès de la théorie : strong lensing

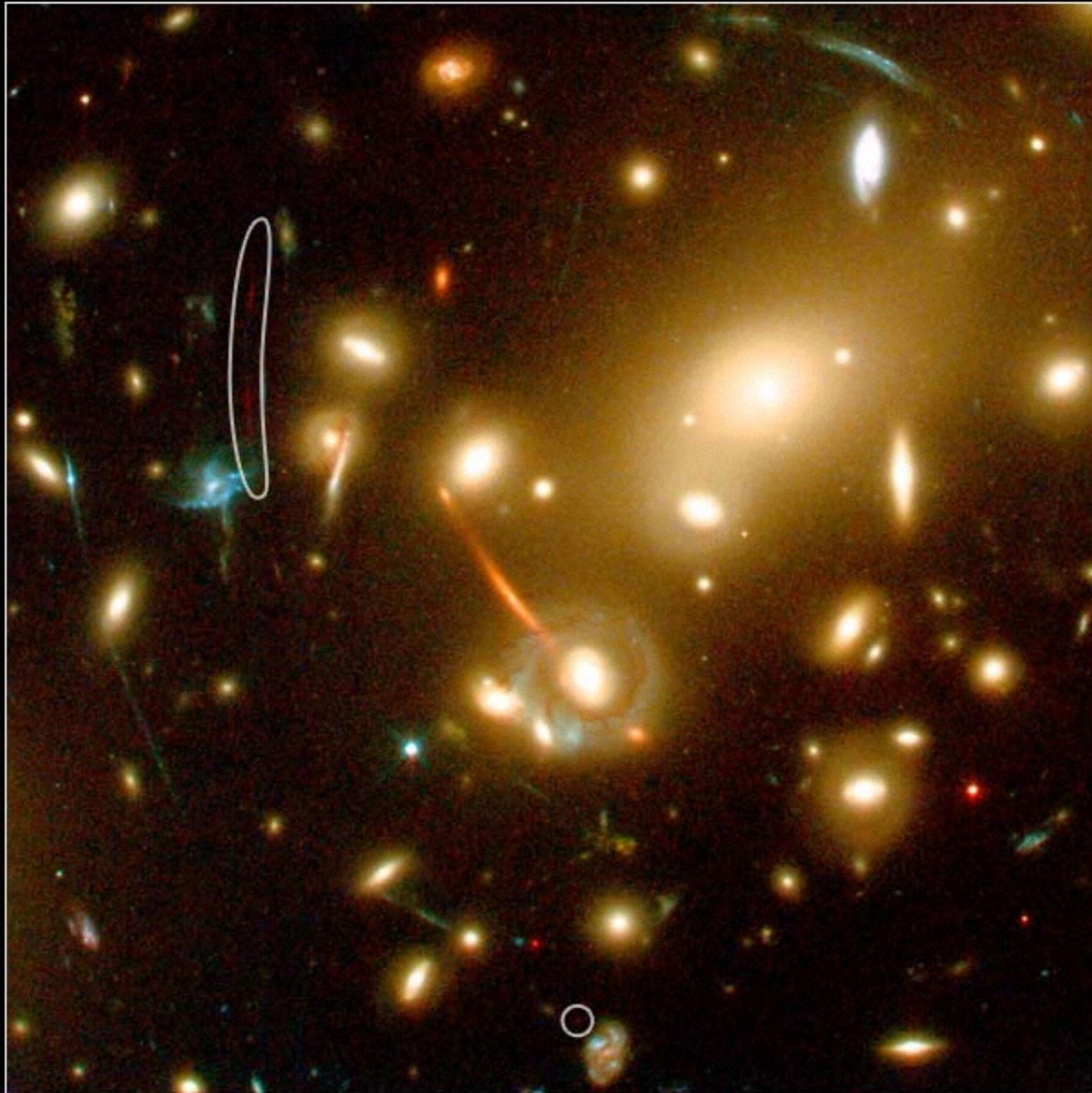


# Succès de la théorie : weak lensing



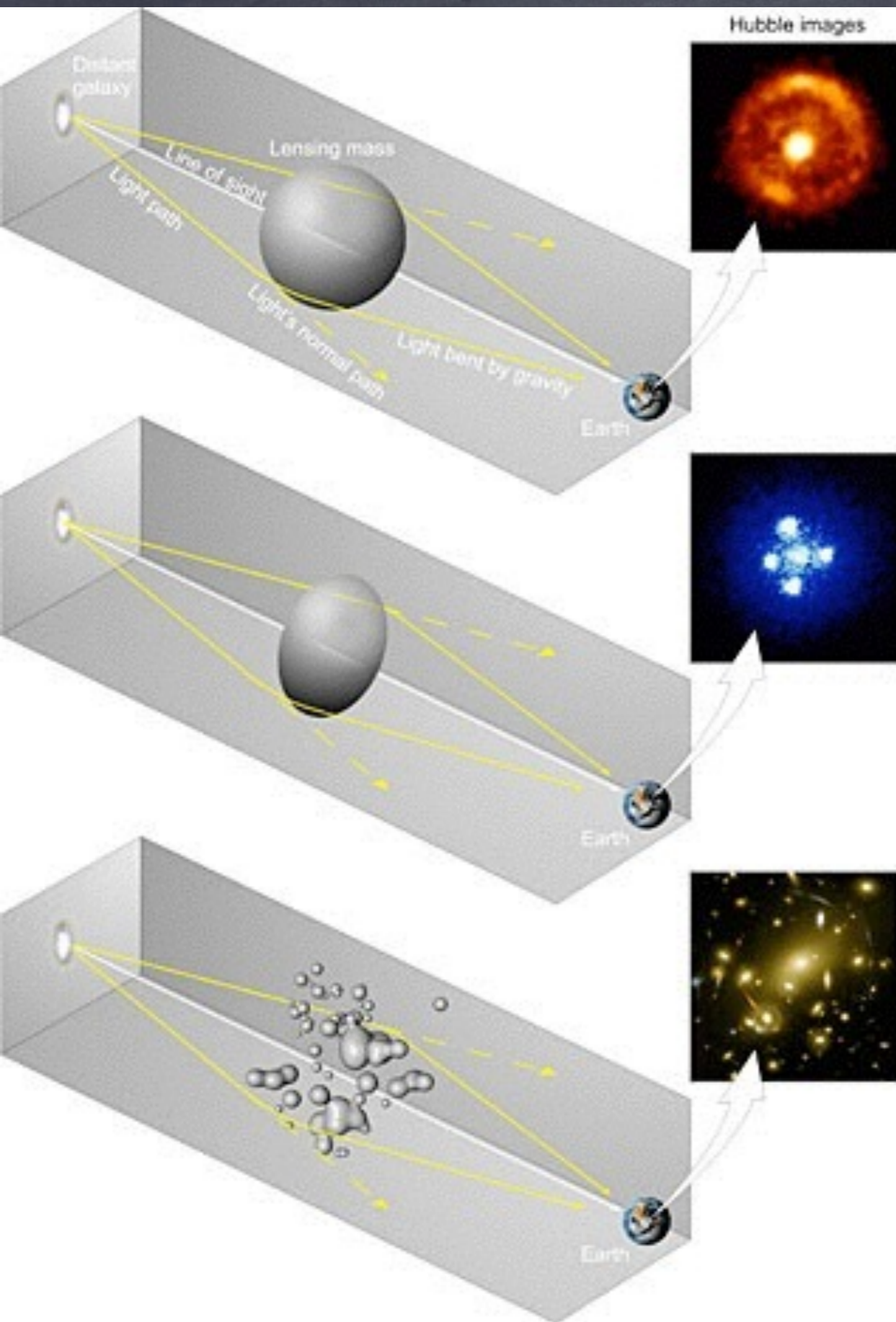
# Succès de la théorie : weak lensing

Distant Galaxy Lensed by Cluster Abell 2218 HST • WFPC2 • ACS

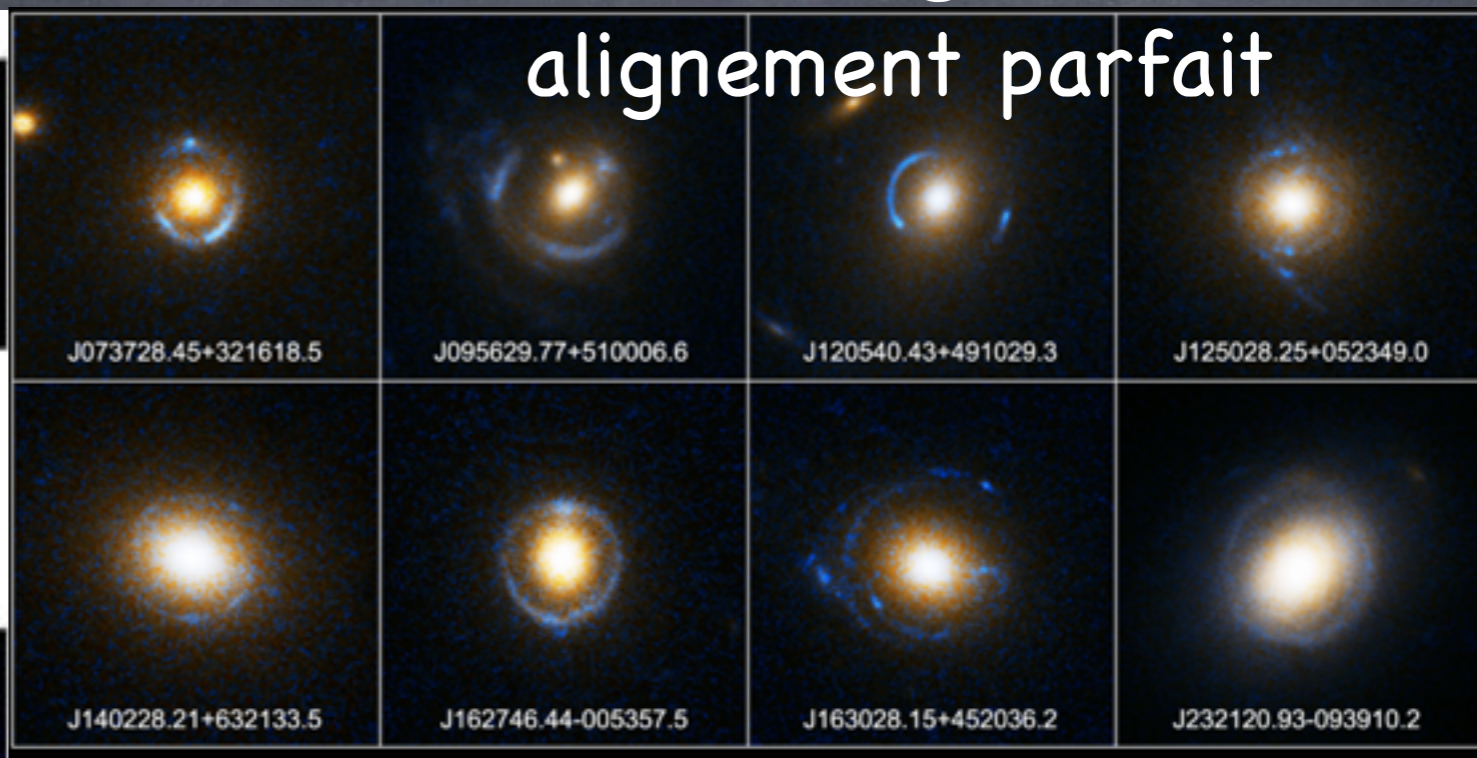


ESA, NASA, J.-P. Kneib (Caltech/Observatoire Midi-Pyrénées) and R. Ellis (Caltech) STScI-PRC04-08

# Succès de la théorie : lensing



alignement parfait



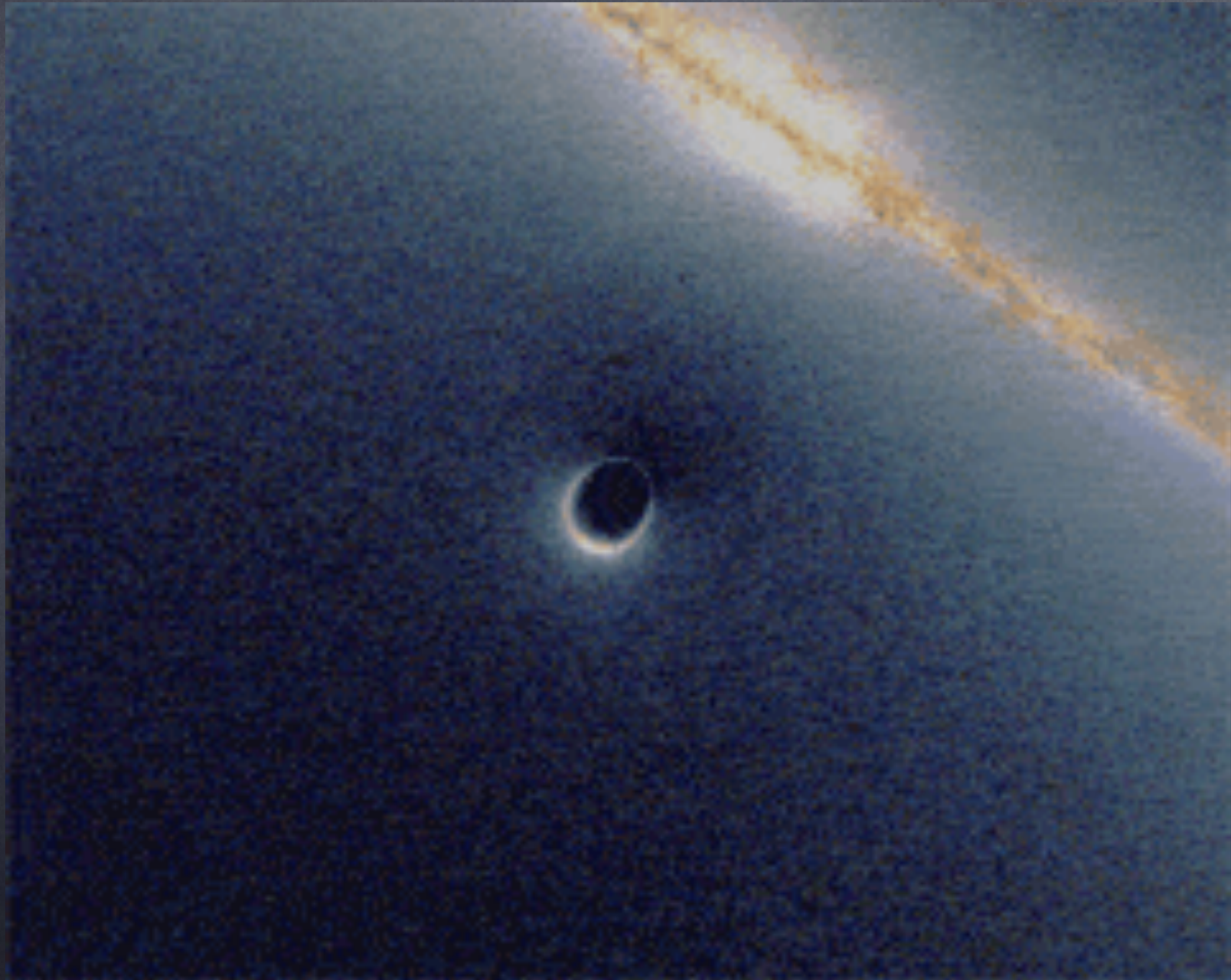
**Einstein Ring Gravitational Lenses**  
*Hubble Space Telescope - Advanced Camera for Surveys*



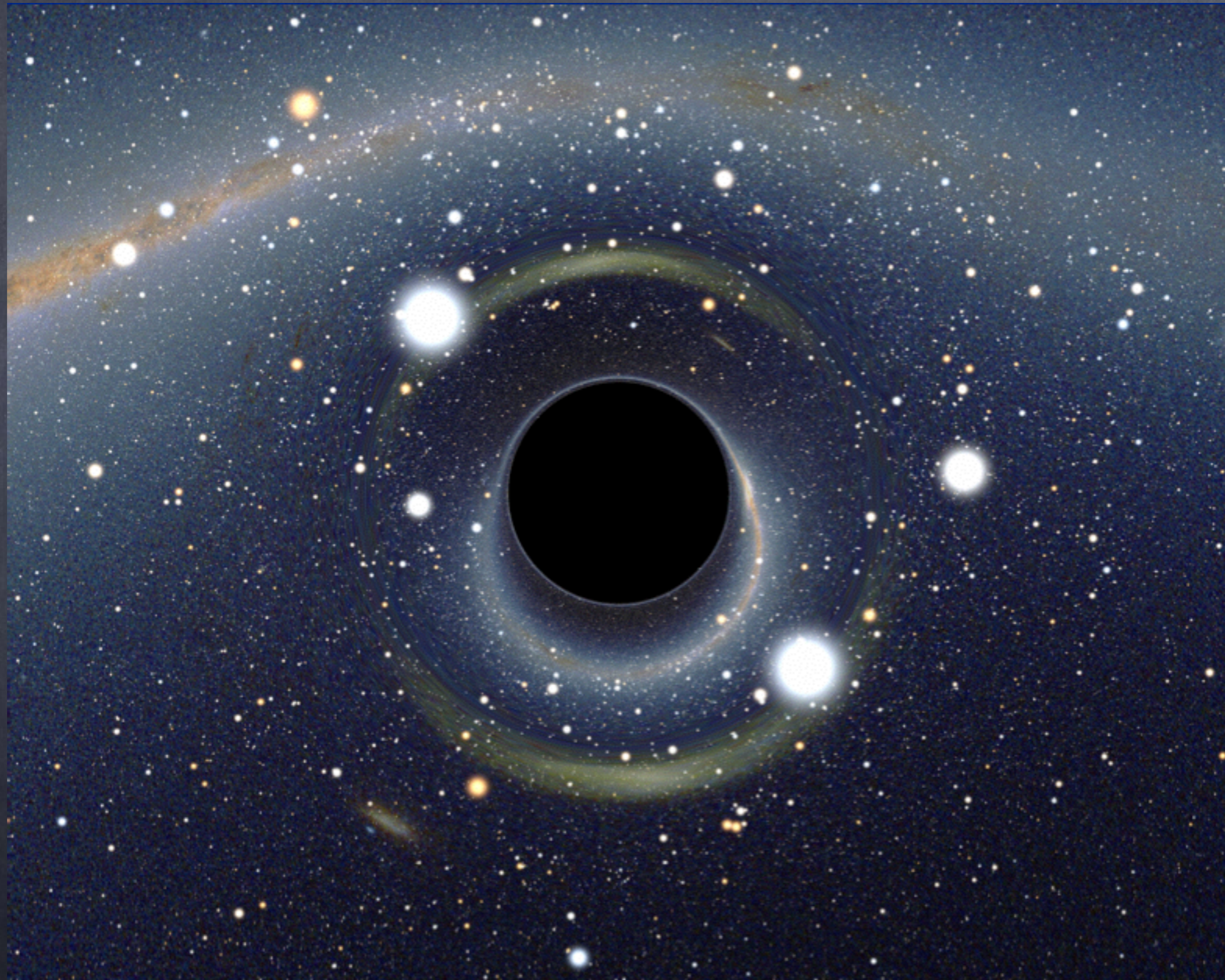
# Succès de la théorie : lensing



# Succès de la théorie : lensing



# Succès de la théorie ? trous noirs



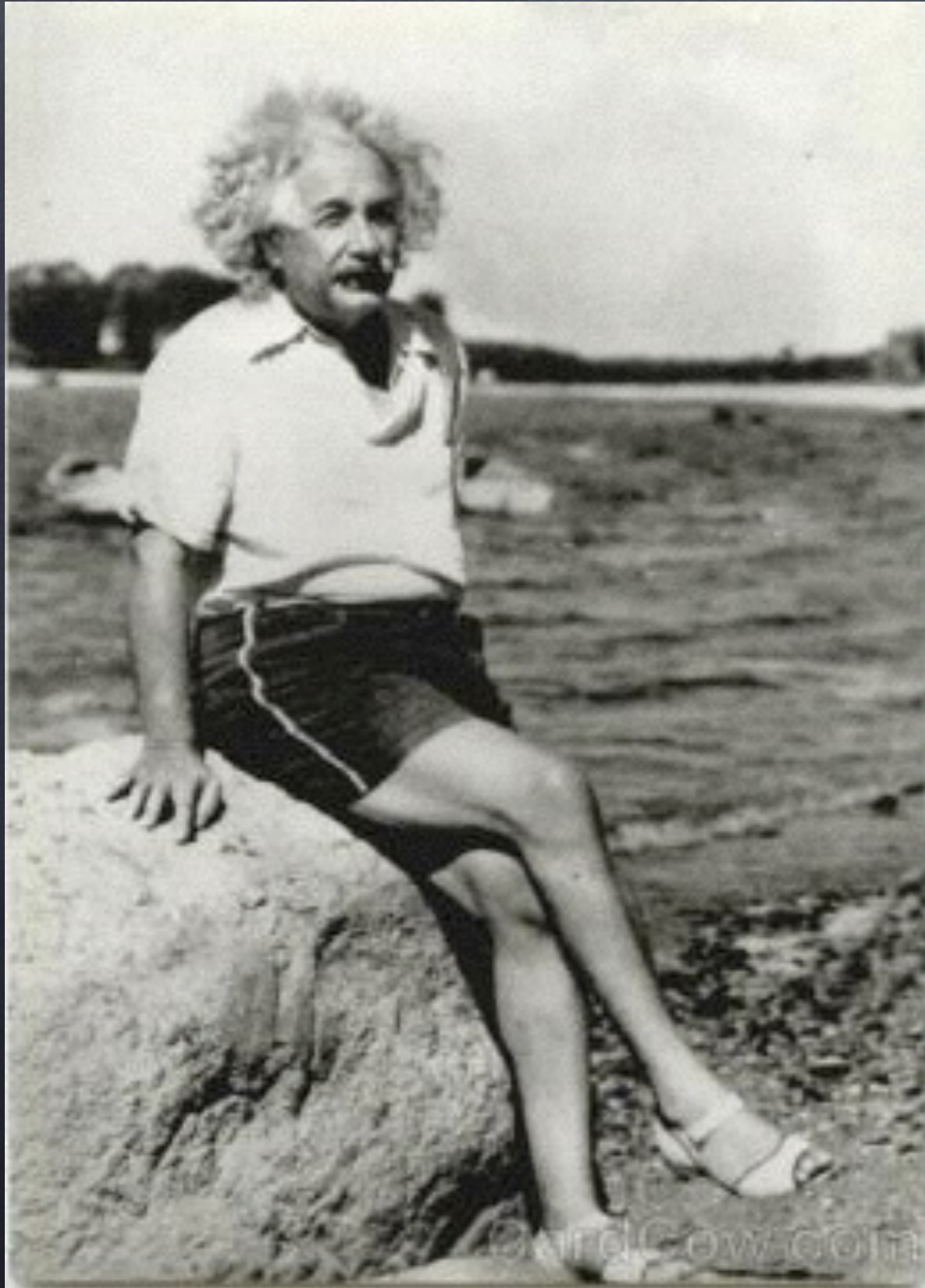
<http://www2.iap.fr/users/riazuelo/bh/index.html>



# Succès de la théorie : bémol !

anomalies des sondes Pioneer  
anomalie de Fly By

# Interlude musical



PHILIP GLASS / ROBERT WILSON  
**EINSTEIN ON THE BEACH**



Pourquoi discuter aussi longtemps de  
la gravitation ?

# Les forces dans la nature

interaction	forte	électro-magnétique	faible	gravitation
intensité relative	1	10	10	10
portée (m)	10	$\infty$	10	$\infty$
médiateur	gluon	photon	$W^+, W^-, Z^0$	graviton

# Les forces dans la nature

interaction	forte	électro- magnétique	faible	gravitation
intensité relative	1	10	10	10
portée (m)	10	$\infty$	10	$\infty$
médiateur	gluon 1979	photon 1923	$W^+, W^-, Z^0$ 1983	graviton

à découvrir !

# Les forces dans la nature

interaction	forte	électro- magnétique	faible	gravitation
intensité relative		10	10	10
portée (m)		$\infty$	10	$\infty$
médiateur	gluon 1979	photon 1923	$W^+, W^-, Z^0$ 1983	graviton

portée

à découvrir !

# Les forces dans la nature

interaction	forte	électro- magnétique	faible	gravitation
intensité relative		1	10	10
portée (m)		1	10	$\infty$
médiateur	gluon 1979	photon 1923	$W^+, W^-, Z^0$ 1983	graviton

portée

écran

à découvrir !

# Les forces dans la nature

interaction	forte	électro-magnétique	faible	gravitation
intensité relative		1		10
portée (m)	portée	écran	portée	$\infty$
médiateur	gluon 1979	photon 1923	$W^+, W^-, Z^0$ 1983	graviton

à découvrir !



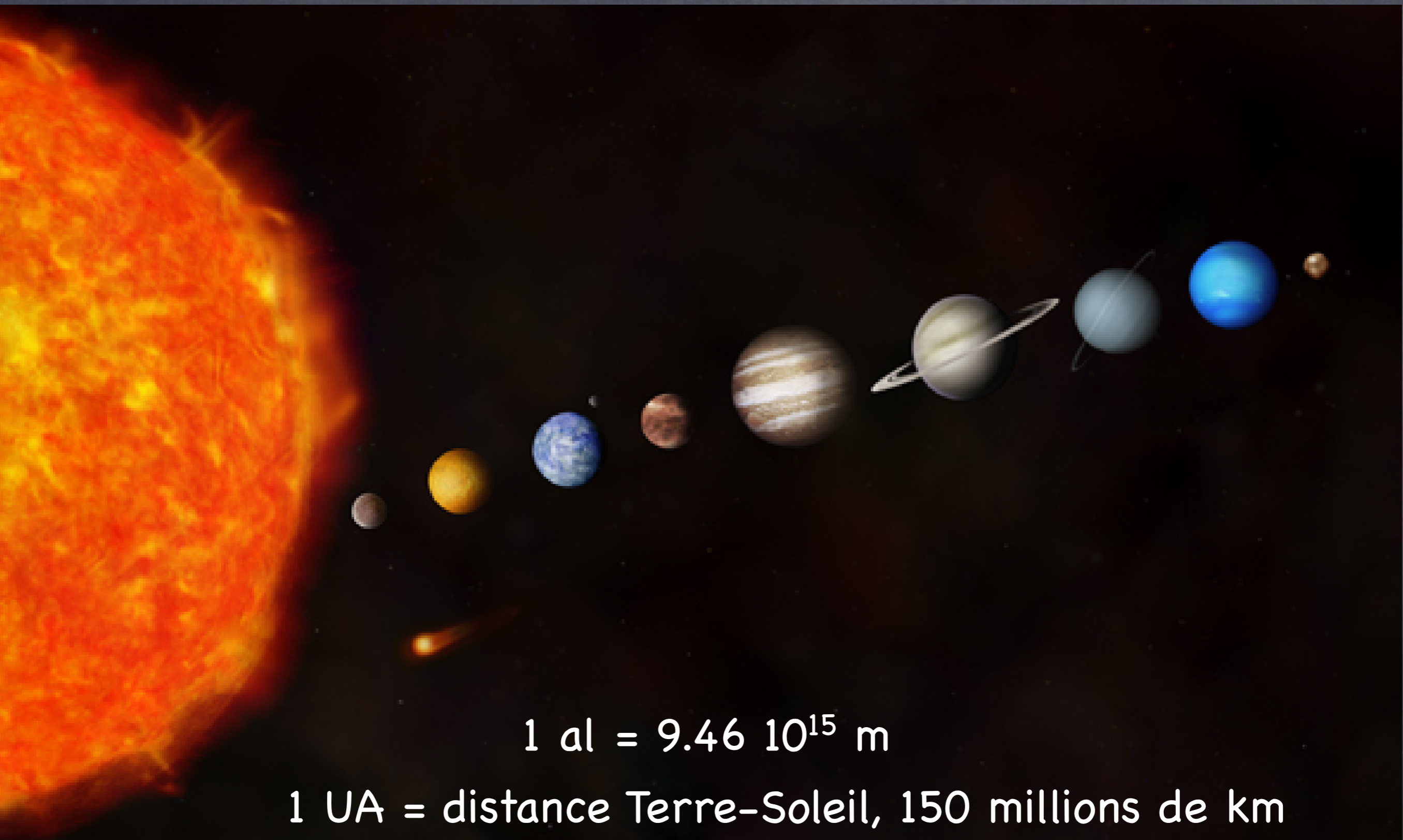
# Les forces dans la nature

interaction	forte	électro- magnétique	faible	gravitation
intensité relative		1		10
portée (m)	portée	écran	portée	$\infty$
médiateur	gluon 1979	photon 1923	$W^+, W^-, Z^0$ 1983	graviton

cosmologie = théorie de la gravitation

à découvrir !

un parsec vaut  $3,085\ 677 \times 10^{16}$  m, soit environ 3,261 564 années-lumière.

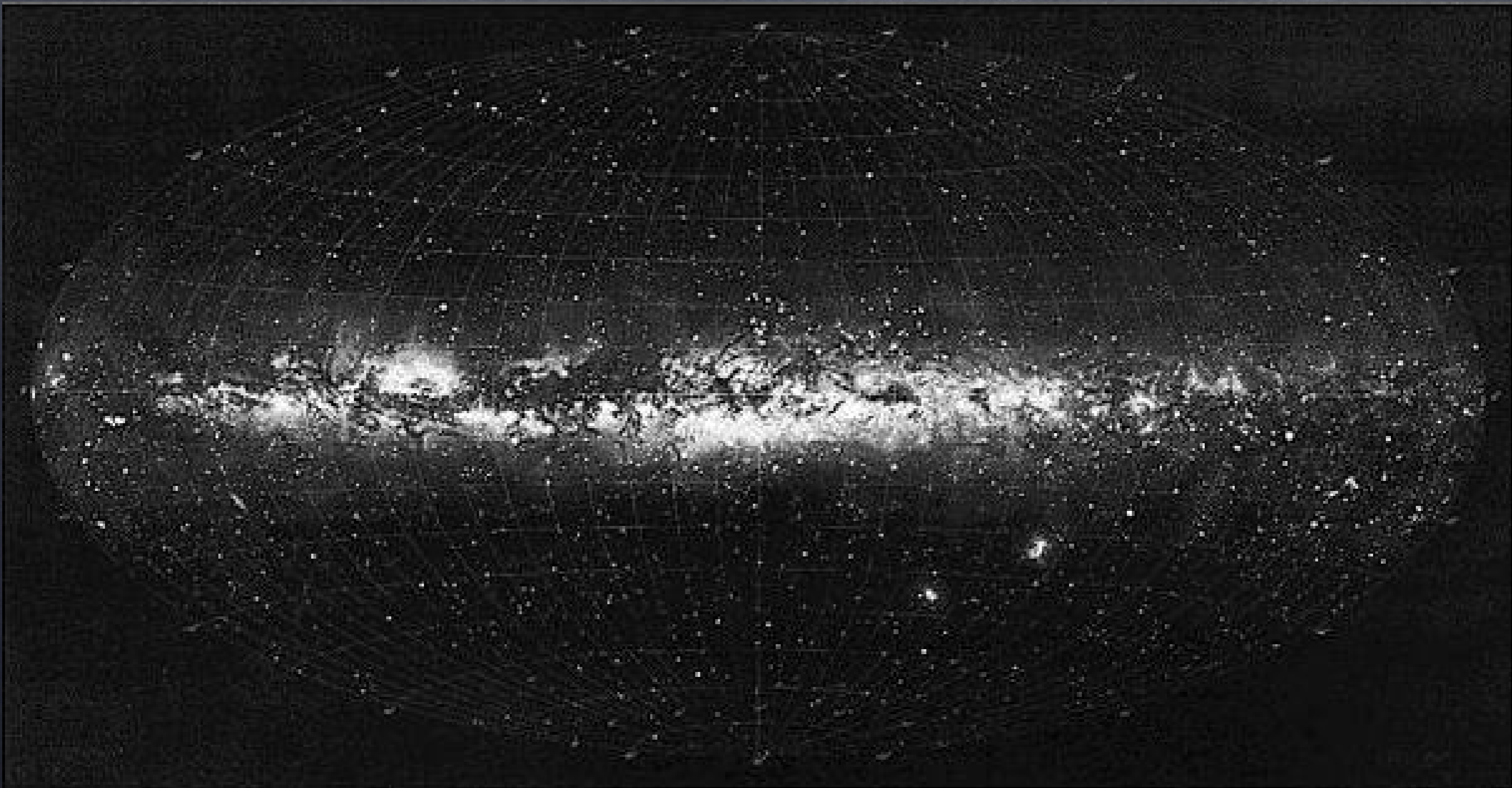


$$1 \text{ al} = 9.46 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

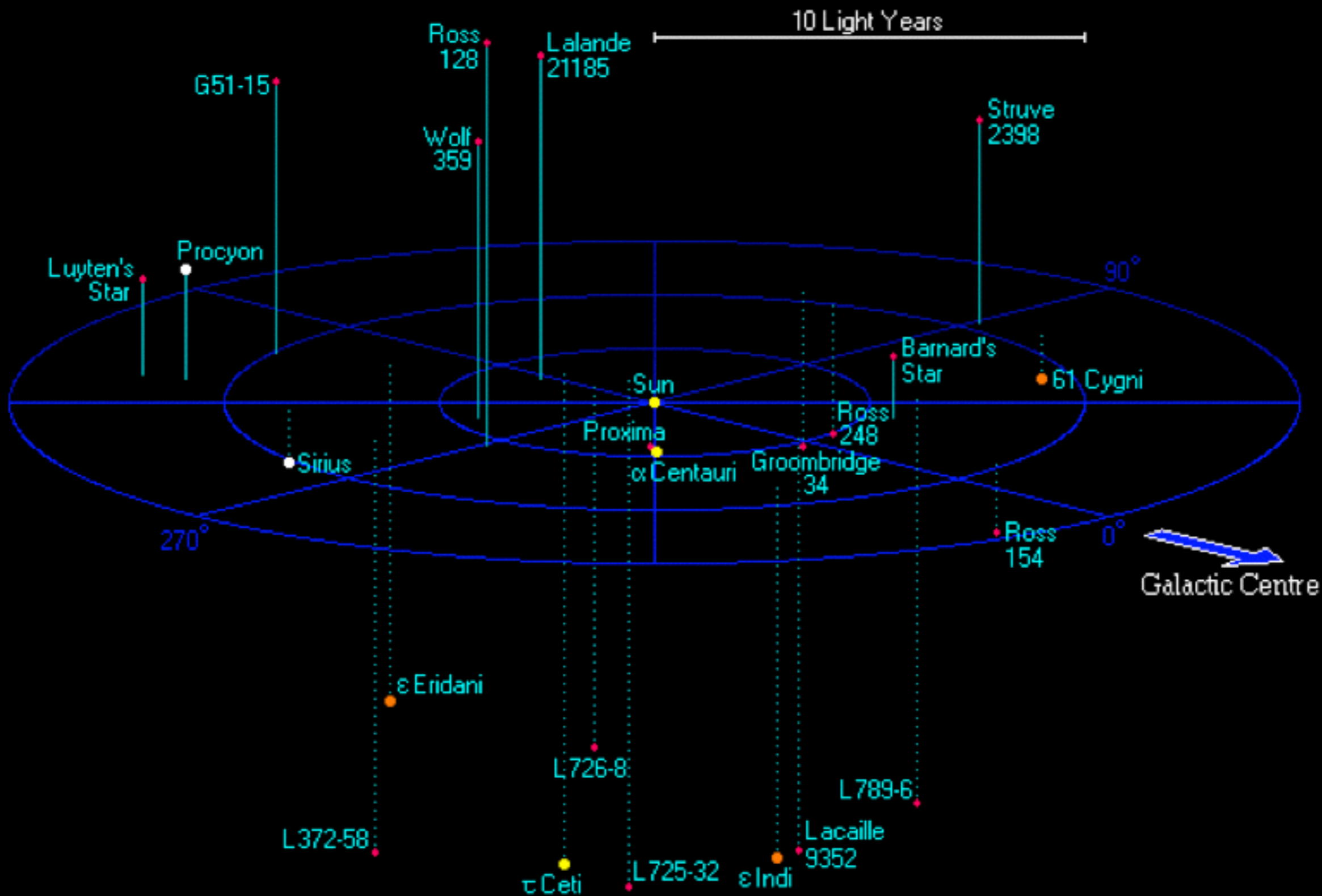
1 UA = distance Terre-Soleil, 150 millions de km

Systeme solaire : quelques heures-lumière

étoile la plus proche : 1.3 pc = 4.22 al



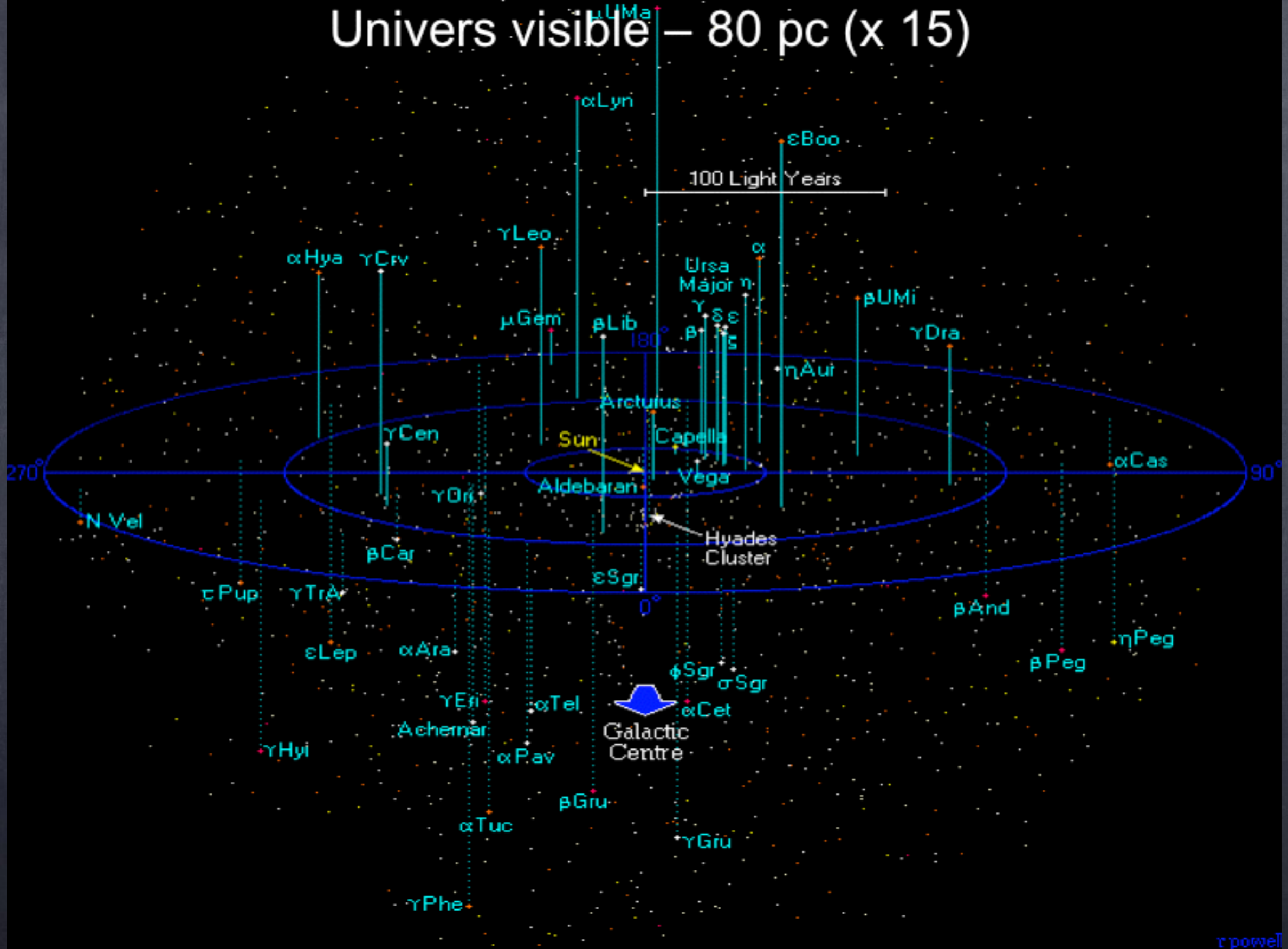
# Universers visible – 5 pc



r powell

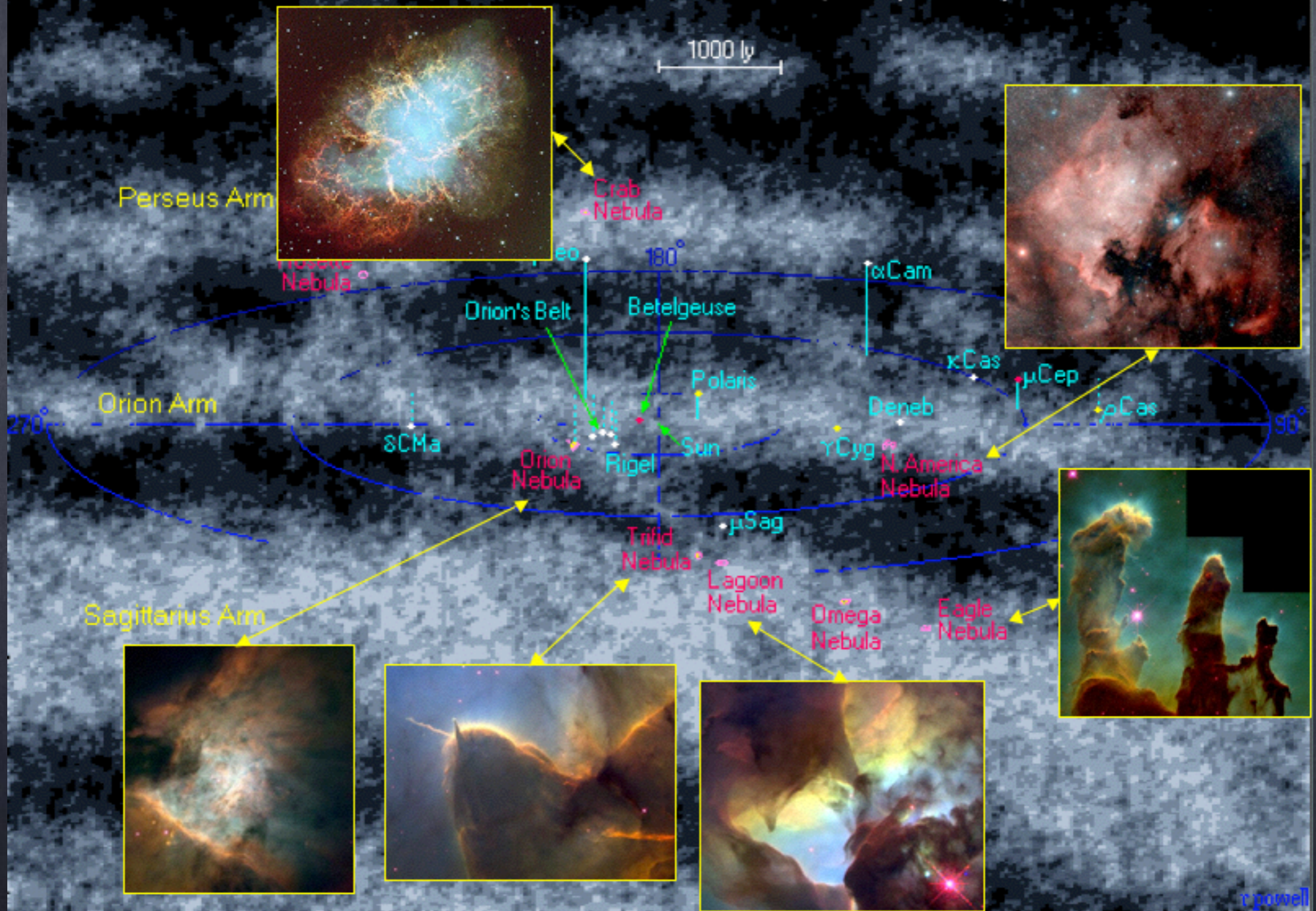
Figures : Martin Lemoine

# Univers visible – 80 pc (x 15)



Figures : Martin Lemoine

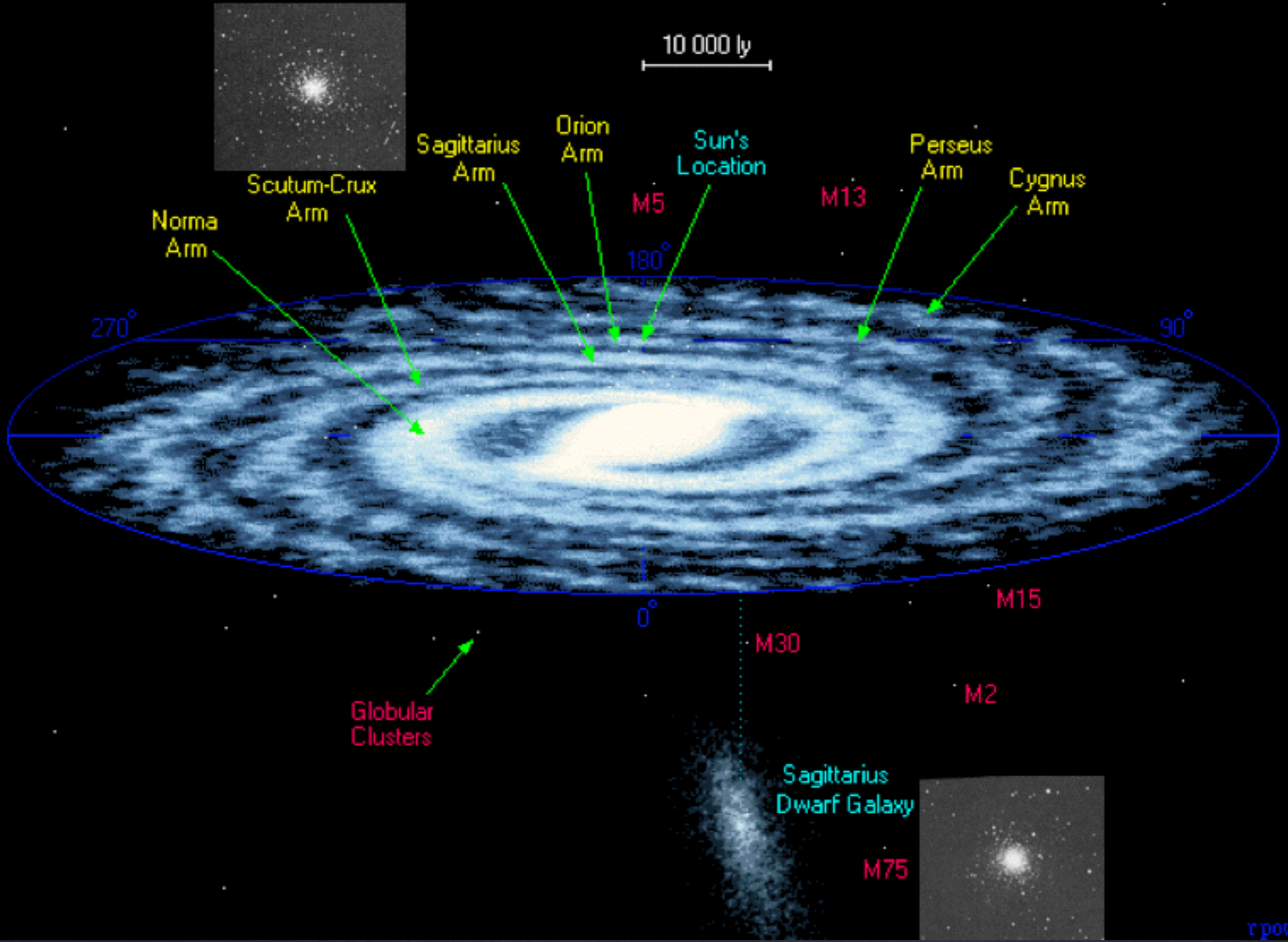
# Univers visible – 1500 pc (x 20)



© Powell

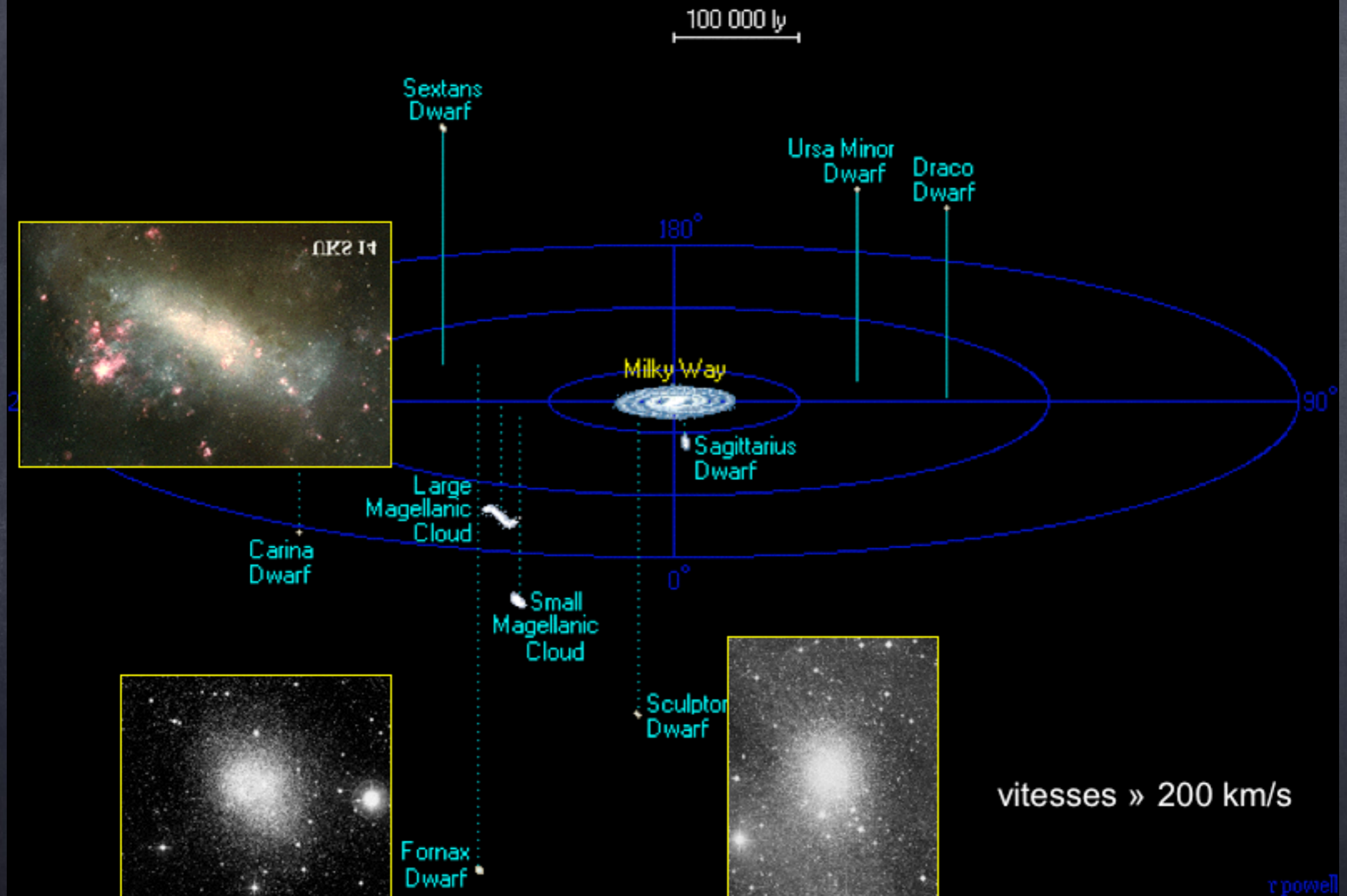
Figures : Martin Lemoine

# Univers visible – 15 kpc (x 10)



Figures : Martin Lemoine

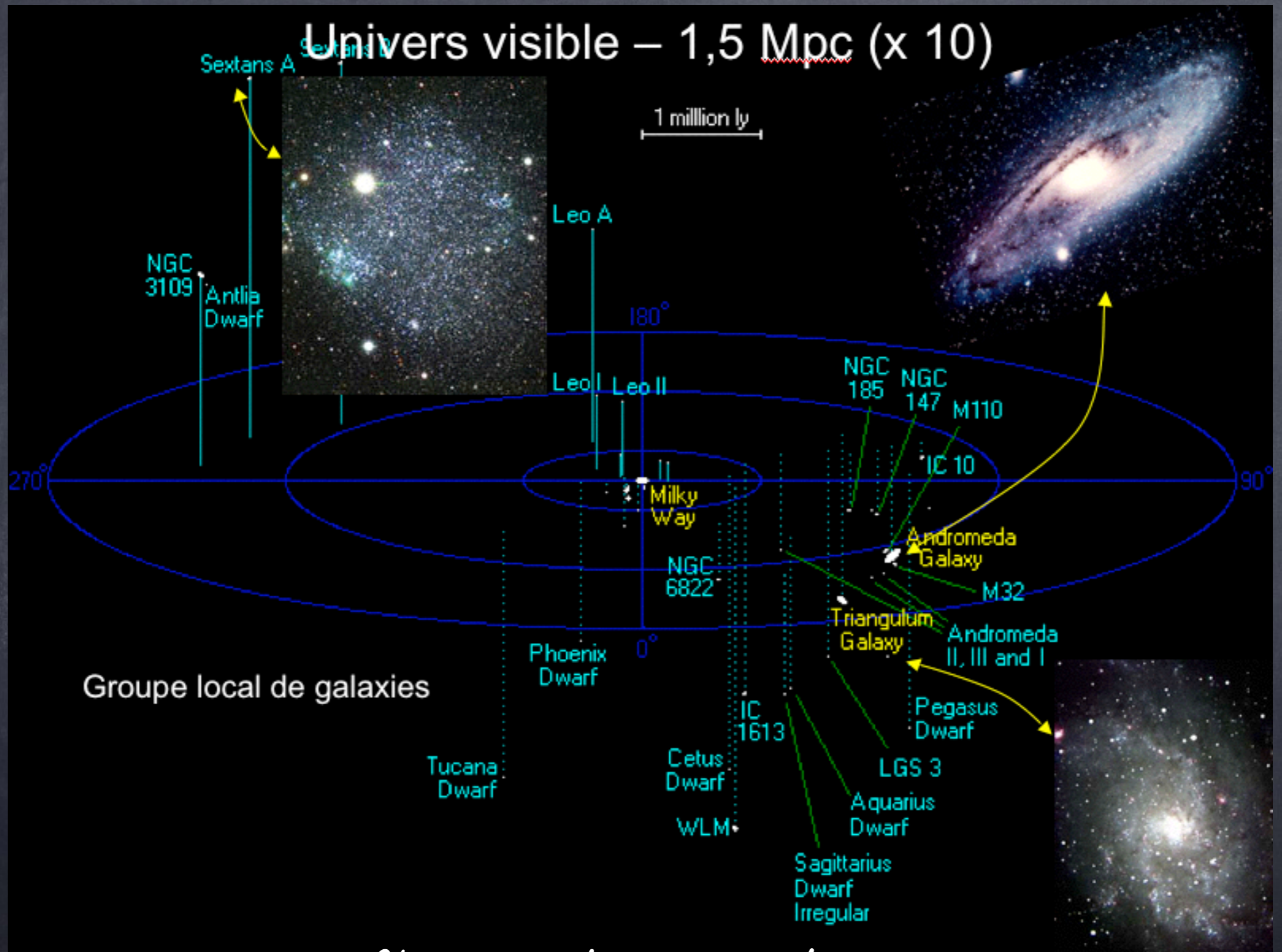
# Univers visible – 150 kpc (x 10)



Figures : Martin Lemoine



# Univers visible – 1,5 Mpc (x 10)



1 Mpc =  $3.1 \times 10^{24}$  cm = 1/1000 de l'univers observable

# Types de galaxies – irrégulières

Grand Nuage de Magellan



# Types de galaxies - Spirales



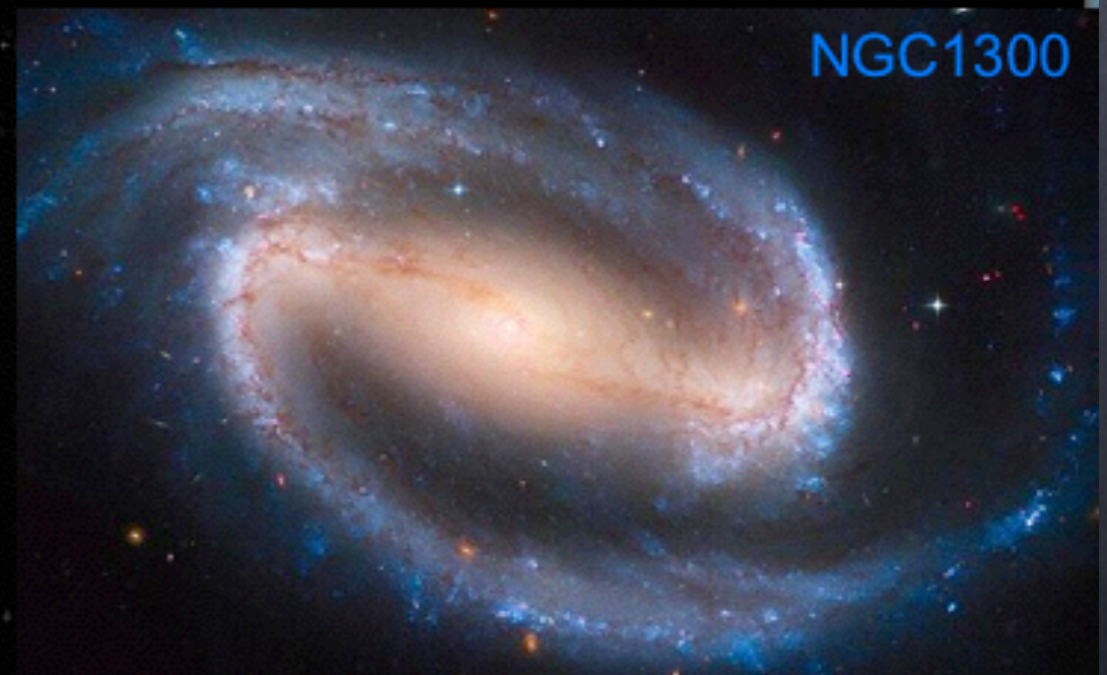
NGC1232



NGC3314



Sombrero



NGC1300

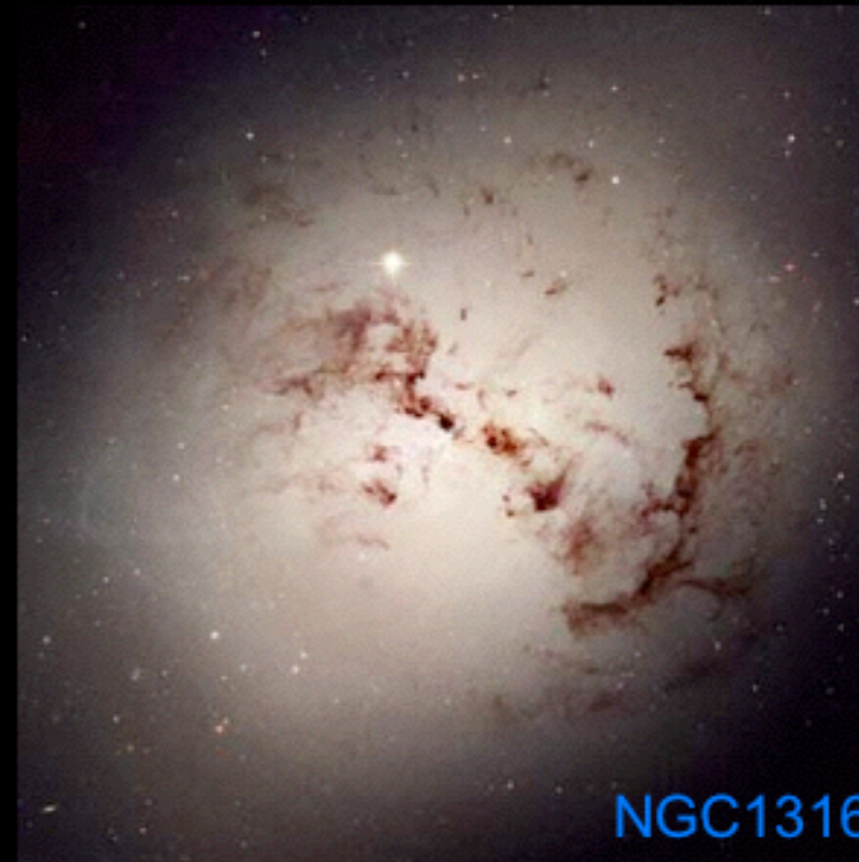
# Types de galaxies - Elliptiques

NGC2768



M87

Origine des galaxies elliptiques :  
formation par coalescence?



NGC1316

# Galaxies en interaction

M64



galaxie des antennes

# Galaxies en interaction



# Galaxies active

Cygnus-A

échelle :



= Voie Lactée

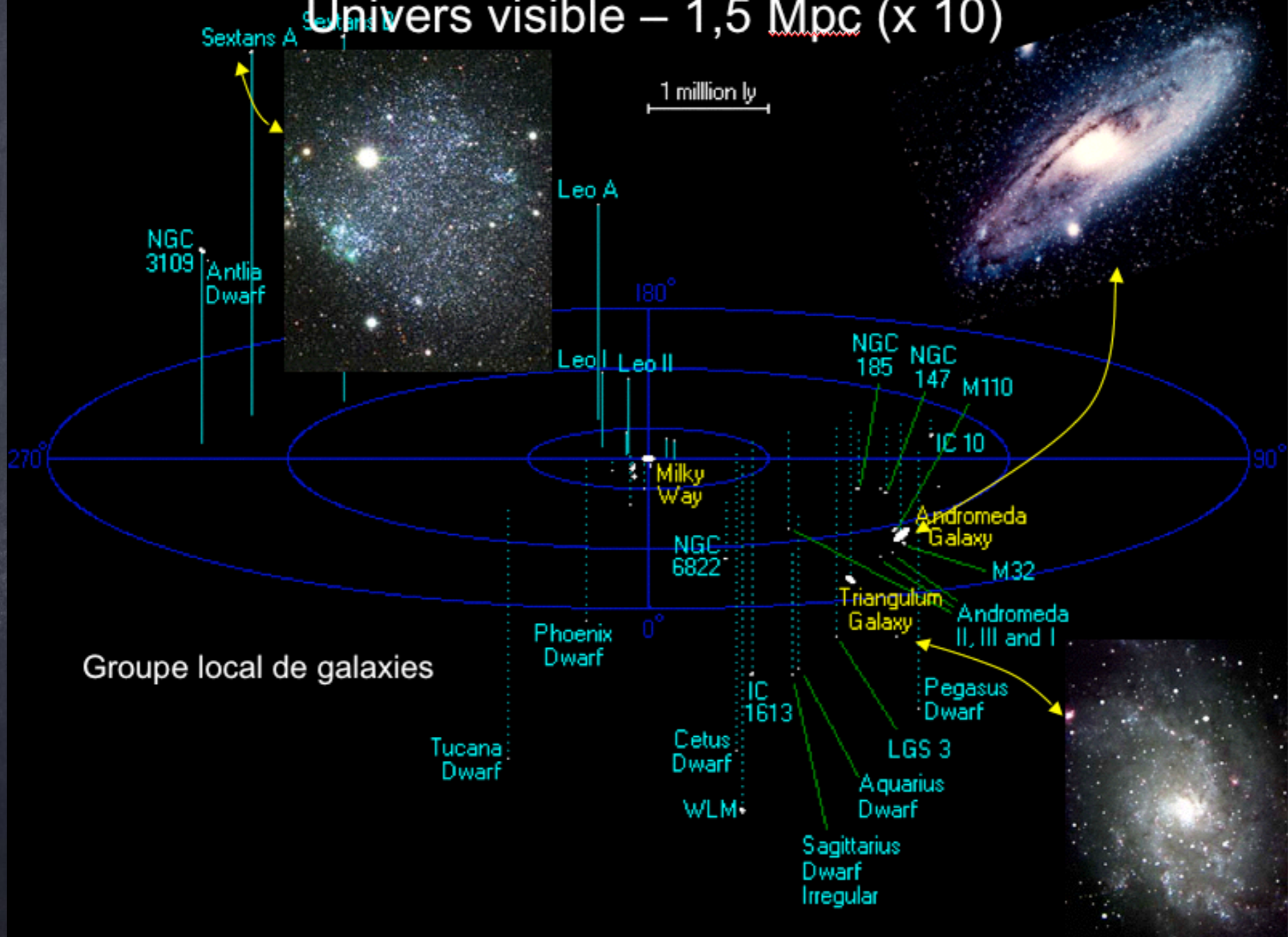


Centaurus A



M87

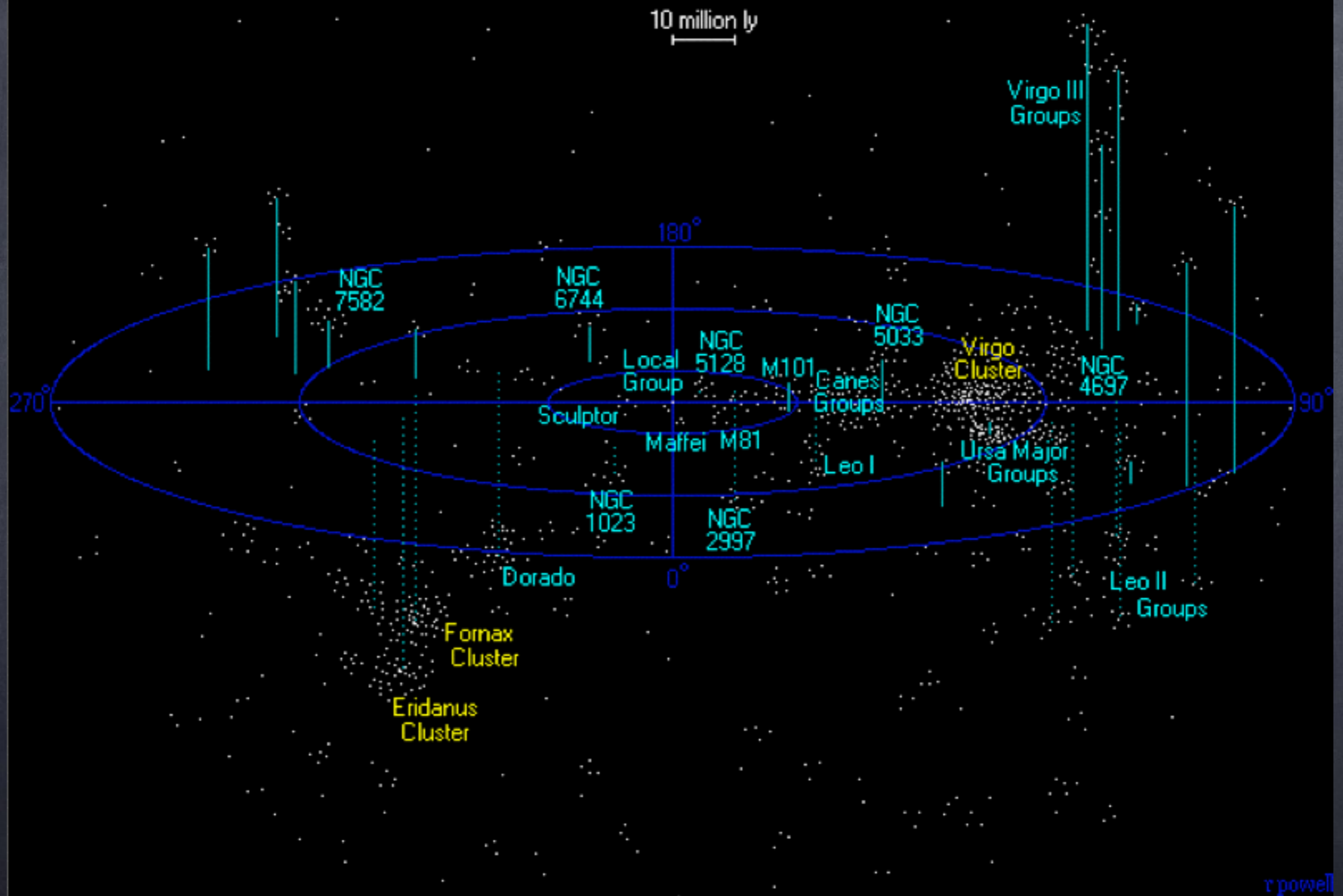
# Univers visible – 1,5 Mpc (x 10)



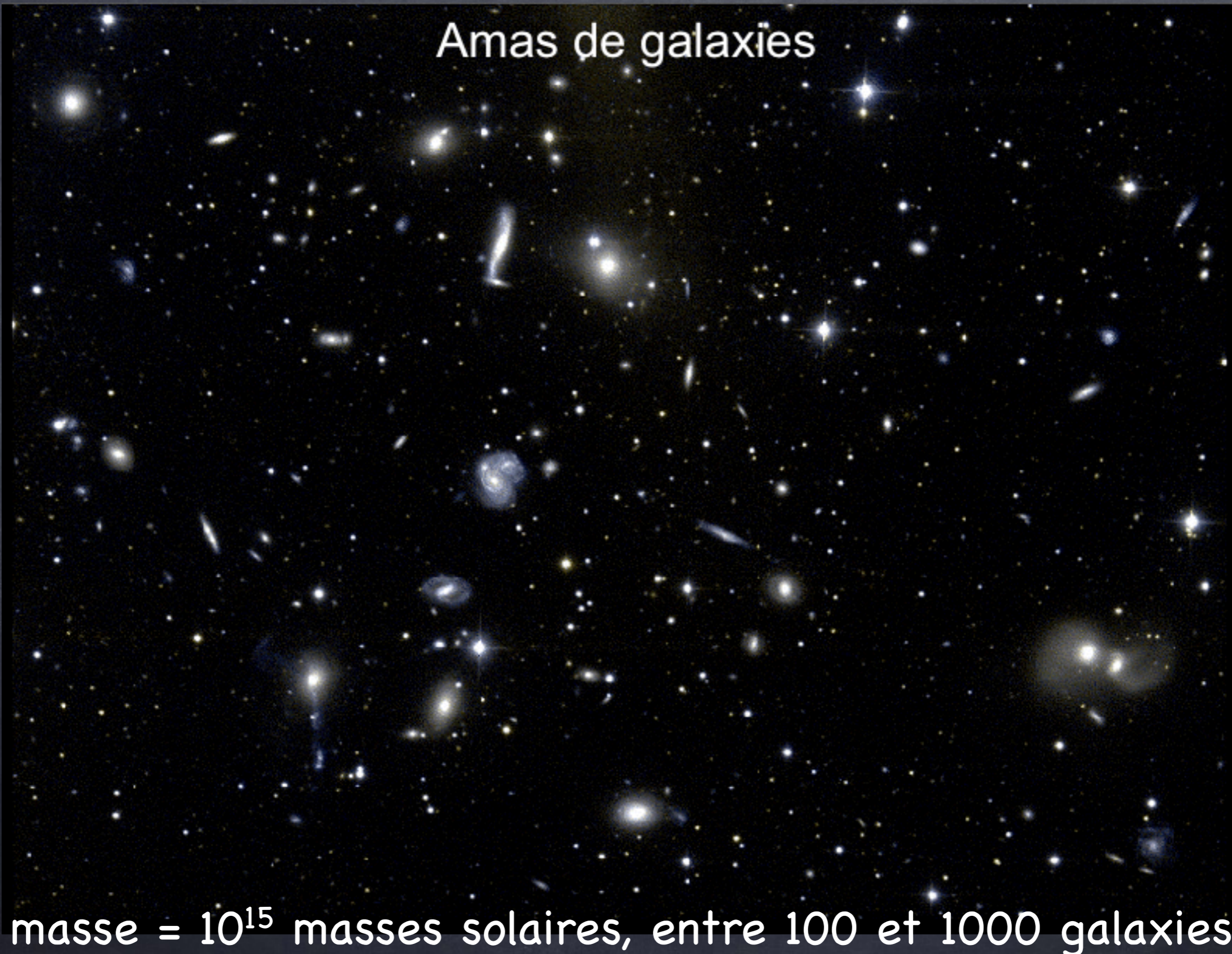
Figures : Martin Lemoine




# Universes visible – 30 Mpc (x 20)



# Amas de galaxies

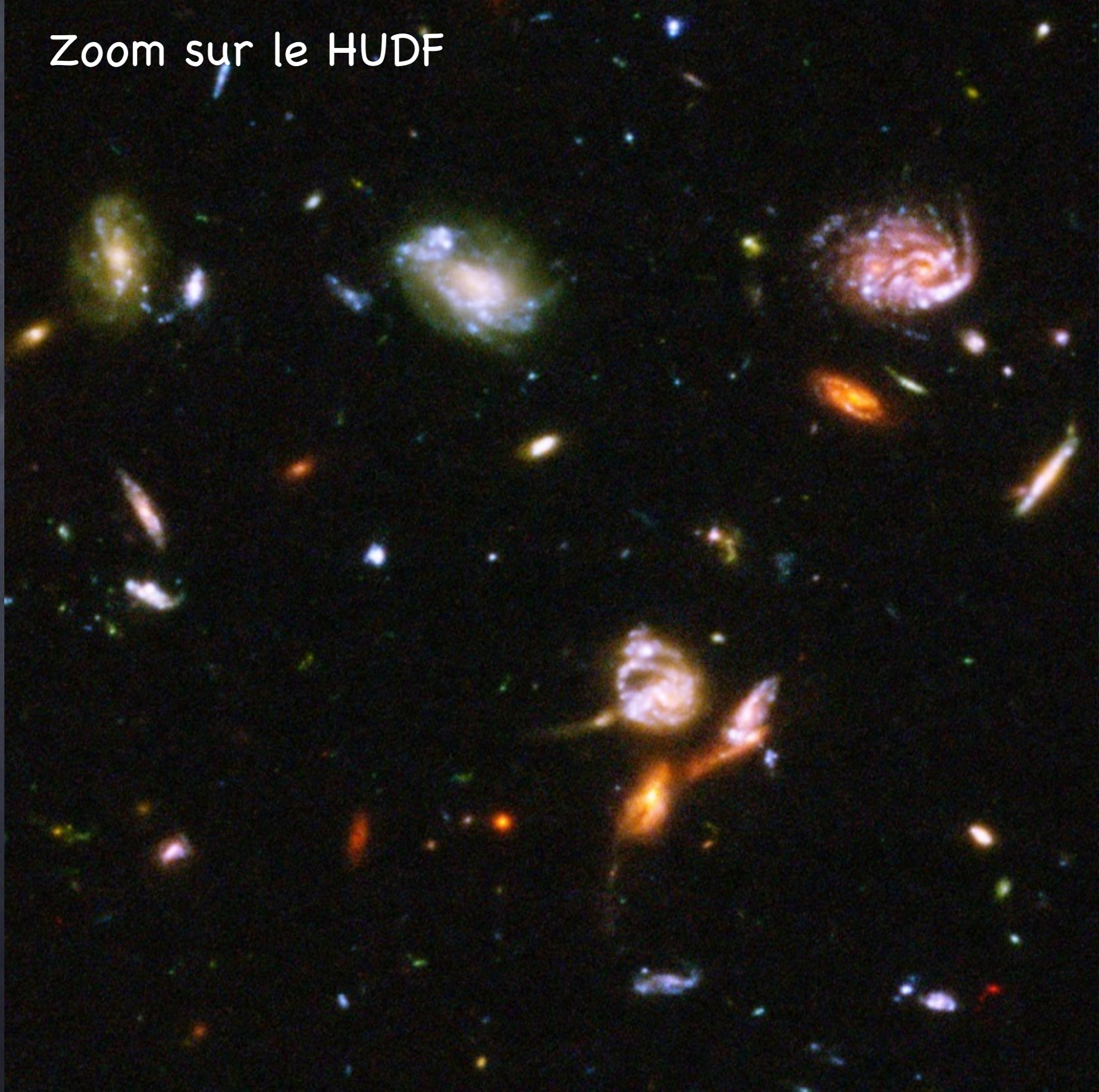


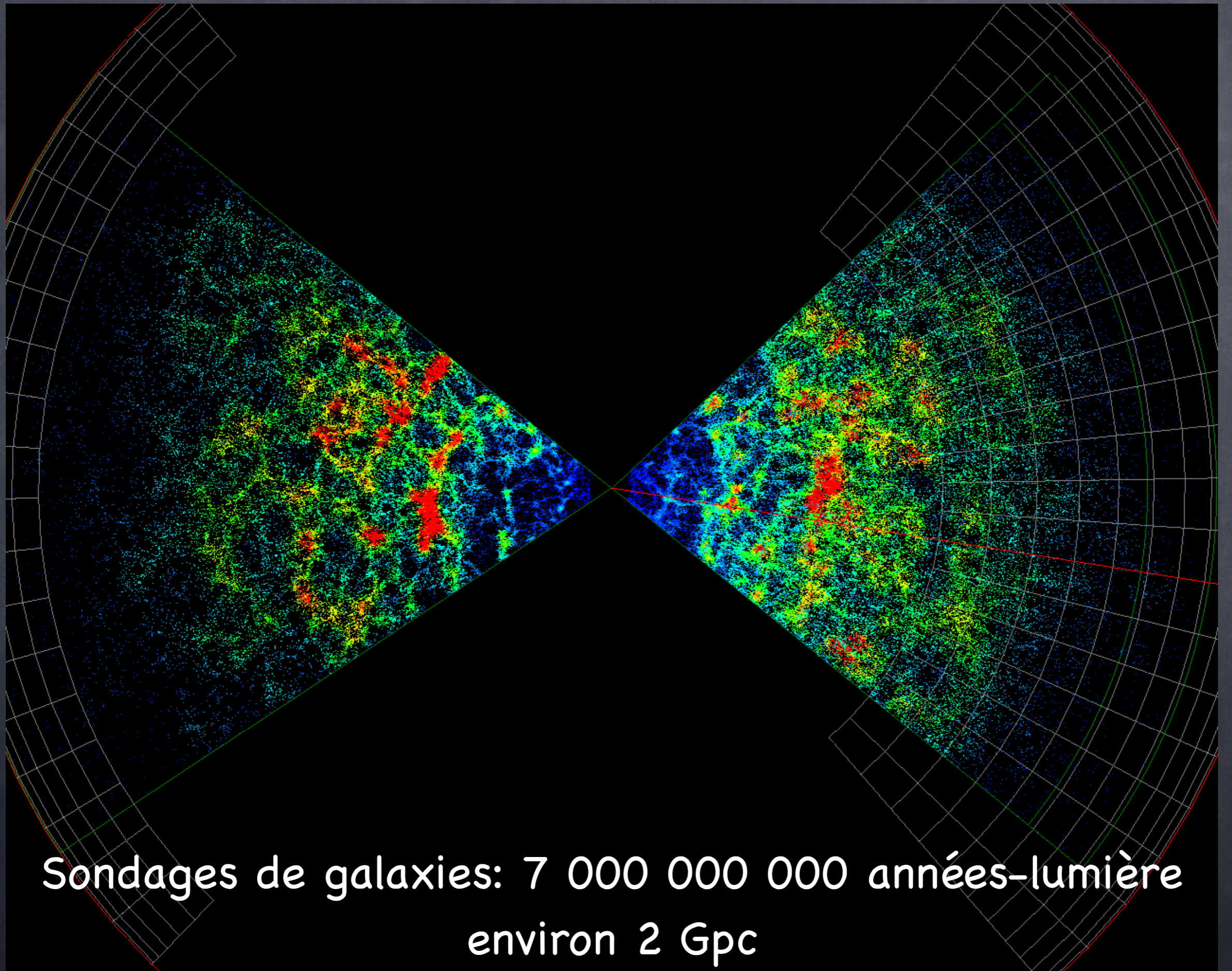
masse =  $10^{15}$  masses solaires, entre 100 et 1000 galaxies

A vast field of galaxies, including spiral, elliptical, and irregular shapes, scattered across a dark background. The galaxies vary in size, color (yellow, blue, red), and orientation. Some are bright and clear, while others are faint and distant.

Hubble ultra deep field  
11 arcmin<sup>2</sup> (1/10 du  
diamètre de la lune)  
10<sup>4</sup> galaxies  
11.3 jours de pause !

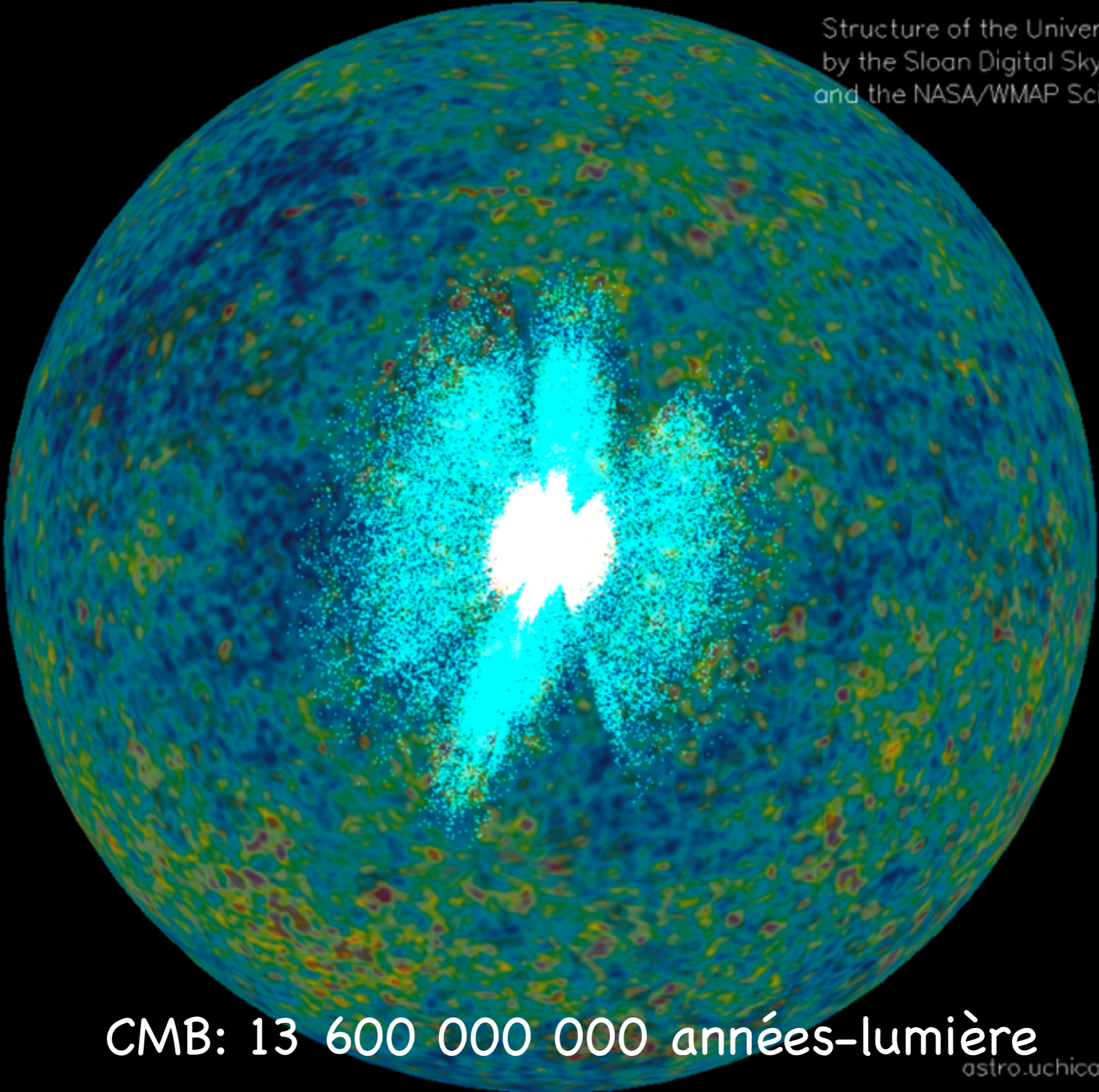
# Zoom sur le HUDF





Sondages de galaxies: 7 000 000 000 années-lumière  
environ 2 Gpc

Structure of the Universe as found  
by the Sloan Digital Sky Survey  
and the NASA/WMAP Science Team



CMB: 13 600 000 000 années-lumière



[astro.uchicago.edu/cosmus](http://astro.uchicago.edu/cosmus)

# Construction du modèle cosmologique

relativité générale : théorie locale  
+ hypothèse globale sur l'univers

hypothèse : l'univers dans son  
ensemble est homogène et isotrope

le comportement de chaque point de l'espace-temps doit  
donc être le même (pas de point ni de direction privilégiés)

# Pour aller plus loin : le principe cosmologique



Copernic : la Terre n'est pas au centre du système solaire

Par extension le **principe copernicien** stipule qu'il n'y a aucun point privilégié dans l'Univers (donc pas de centre)

Aujourd'hui c'est le **principe cosmologique** qui est appliqué : il englobe le principe copernicien et stipule en plus que

**l'Univers est homogène et isotrope.**

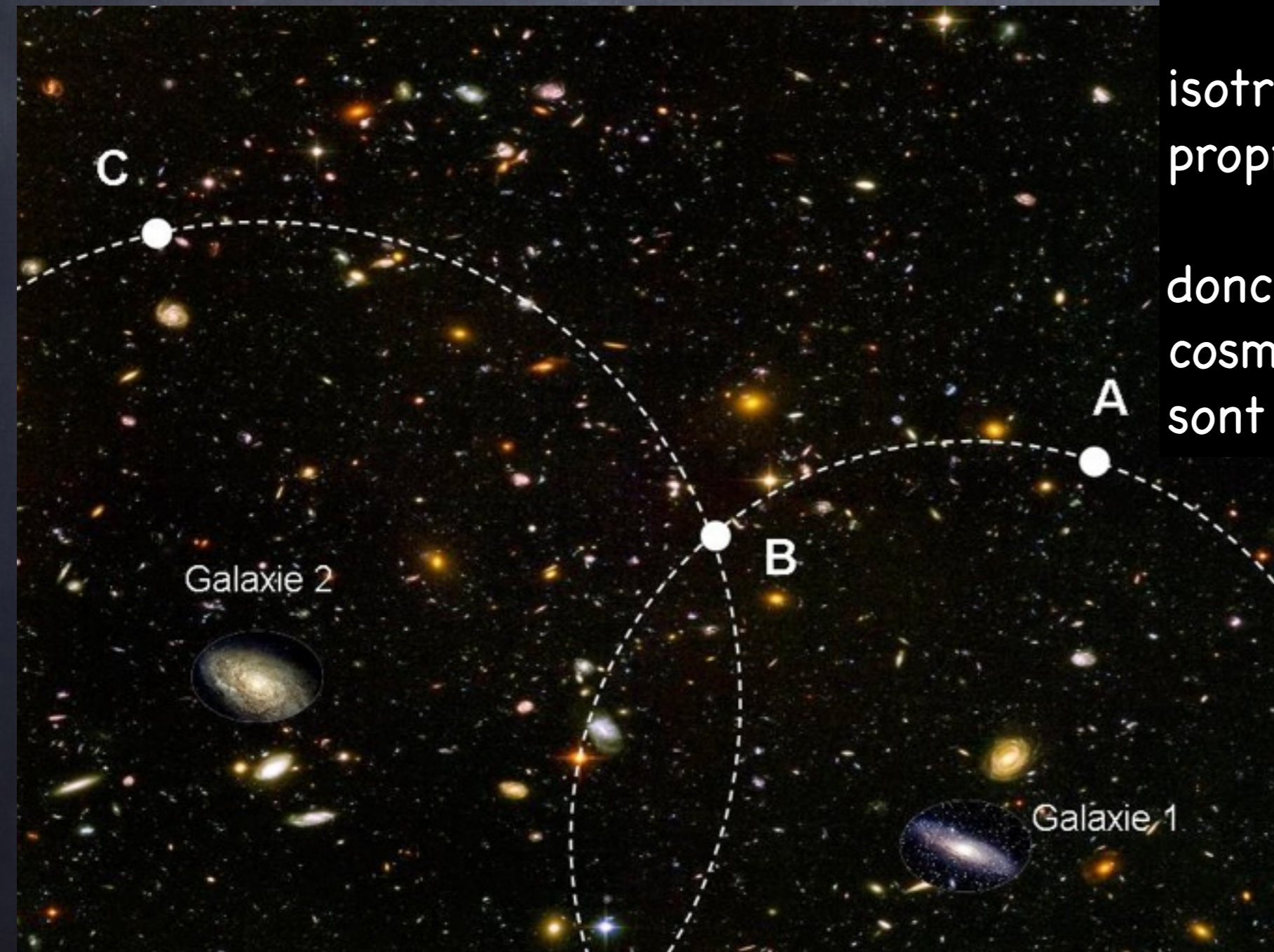


# Pour aller plus loin : le principe cosmologique

isotropie pour la galaxie 1 :  
propriétés de A et B identiques

isotropie pour la galaxie 2 :  
propriétés de B et C identiques

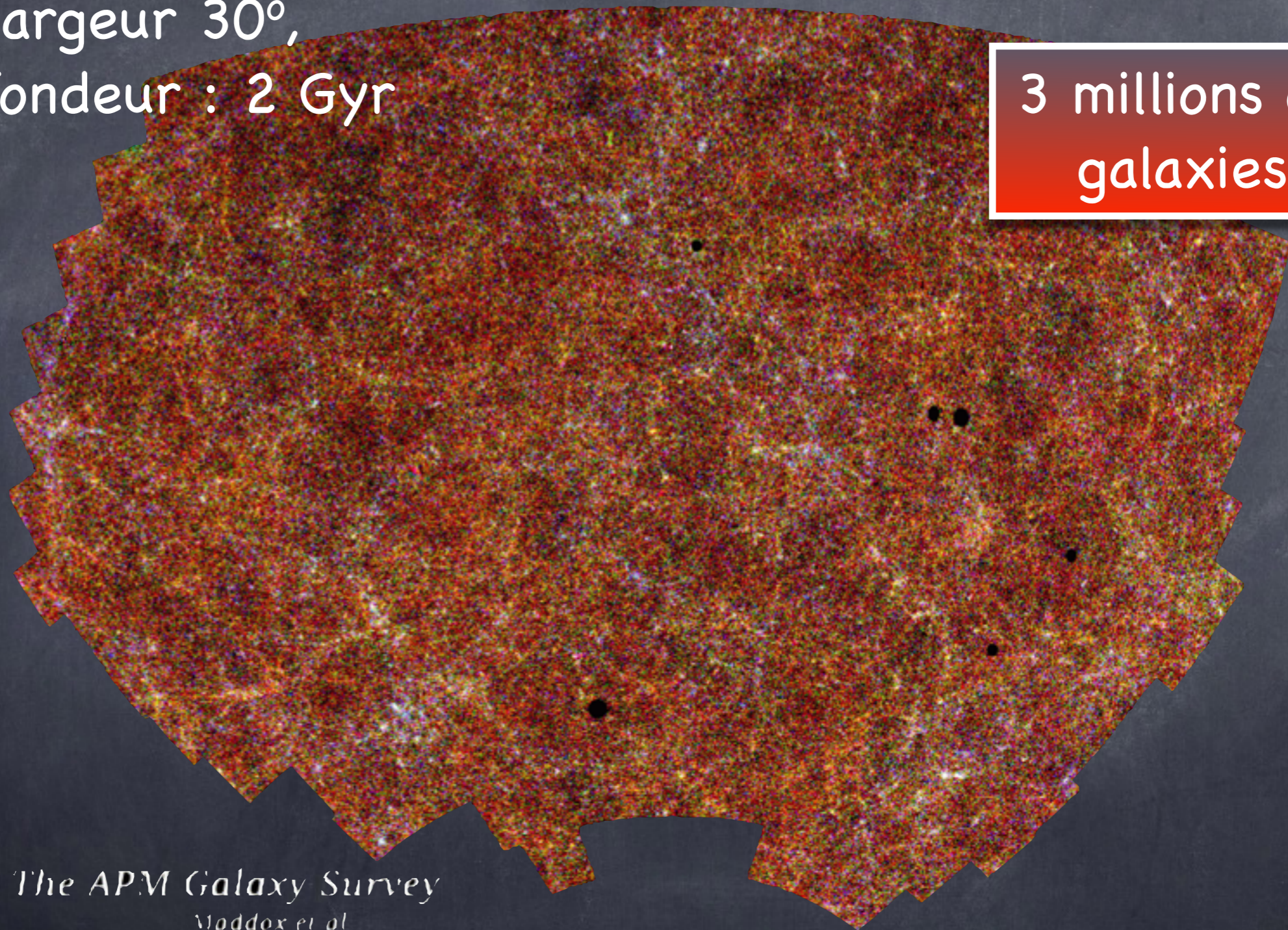
donc les propriétés  
cosmologiques en A et en C  
sont identiques = homogénéité



# Homogénéité et isotropie

largeur 30°,  
profondeur : 2 Gyr

3 millions de  
galaxies



*The APM Galaxy Survey*  
Maddox et al

l'Univers est homogène et isotrope **en moyenne**

# Homogénéité et isotropie

Slices through the SDSS 3-dimensional map of the distribution of galaxies. Earth is at the center, and each point represents a galaxy, typically containing about 100 billion stars. Galaxies are colored according to the ages of their stars, with the redder, more strongly clustered points showing galaxies that are made of older stars. The outer circle is at a distance of two billion light years. The region between the wedges was not mapped by the SDSS because dust in our own Galaxy obscures the view of the distant universe in these directions. Both slices contain all galaxies within  $-1.25$  and  $1.25$  degrees declination.

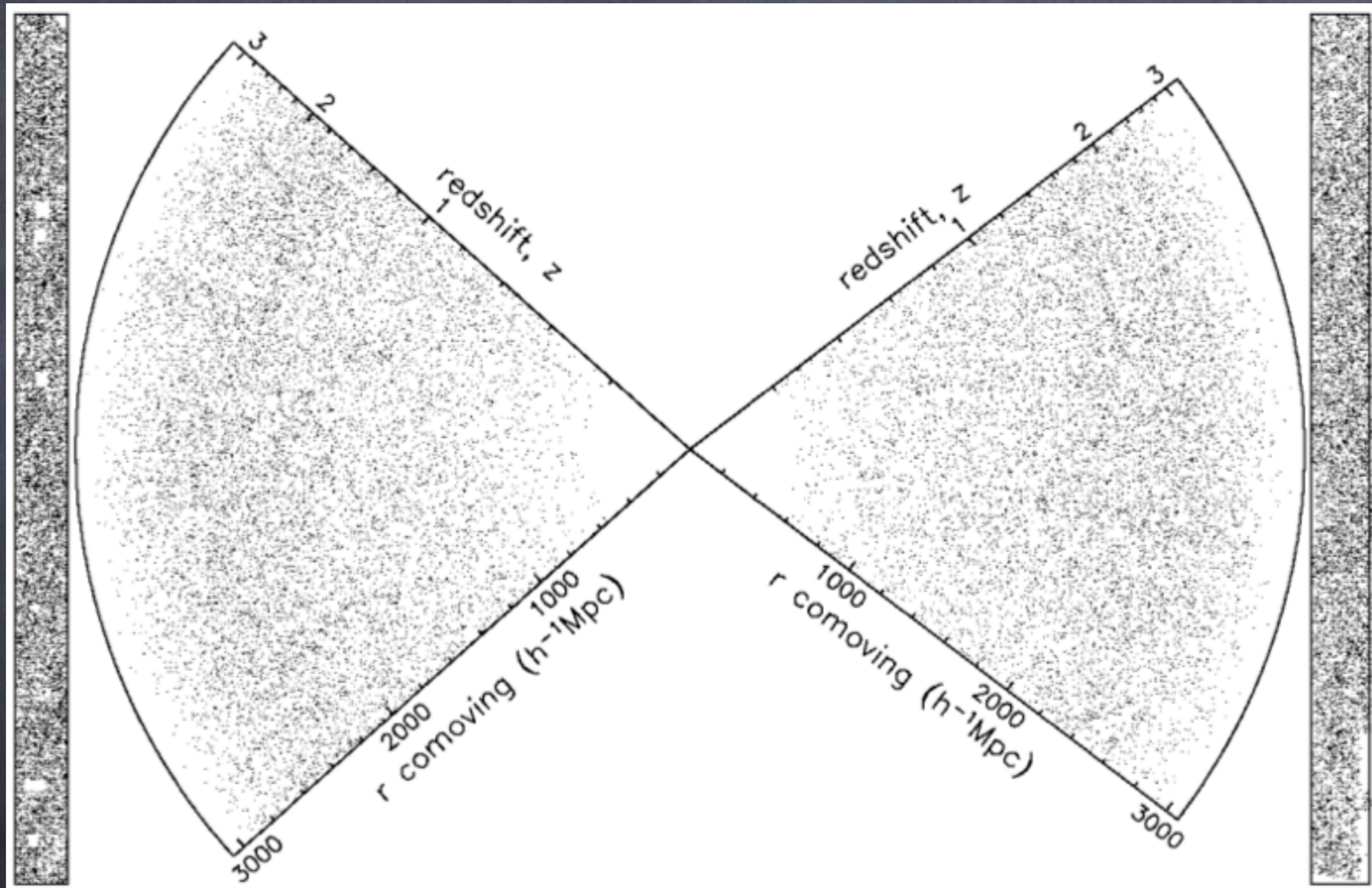
Credit: M. Blanton and the Sloan Digital Sky Survey.

SDSS : ~ 2 Millions de galaxies en 3D  
2Gyr de profondeur

0.02 0.04 0.06 0.08 0.10 0.12 0.14  
Redshift  $z$



# Homogénéité et isotropie



Carte des 23 338 quasars du relevé 2dFQSO. Pas de structuration apparente. Croom et al 2005, MNRAS 356, 415.

# Homogénéité et isotropie

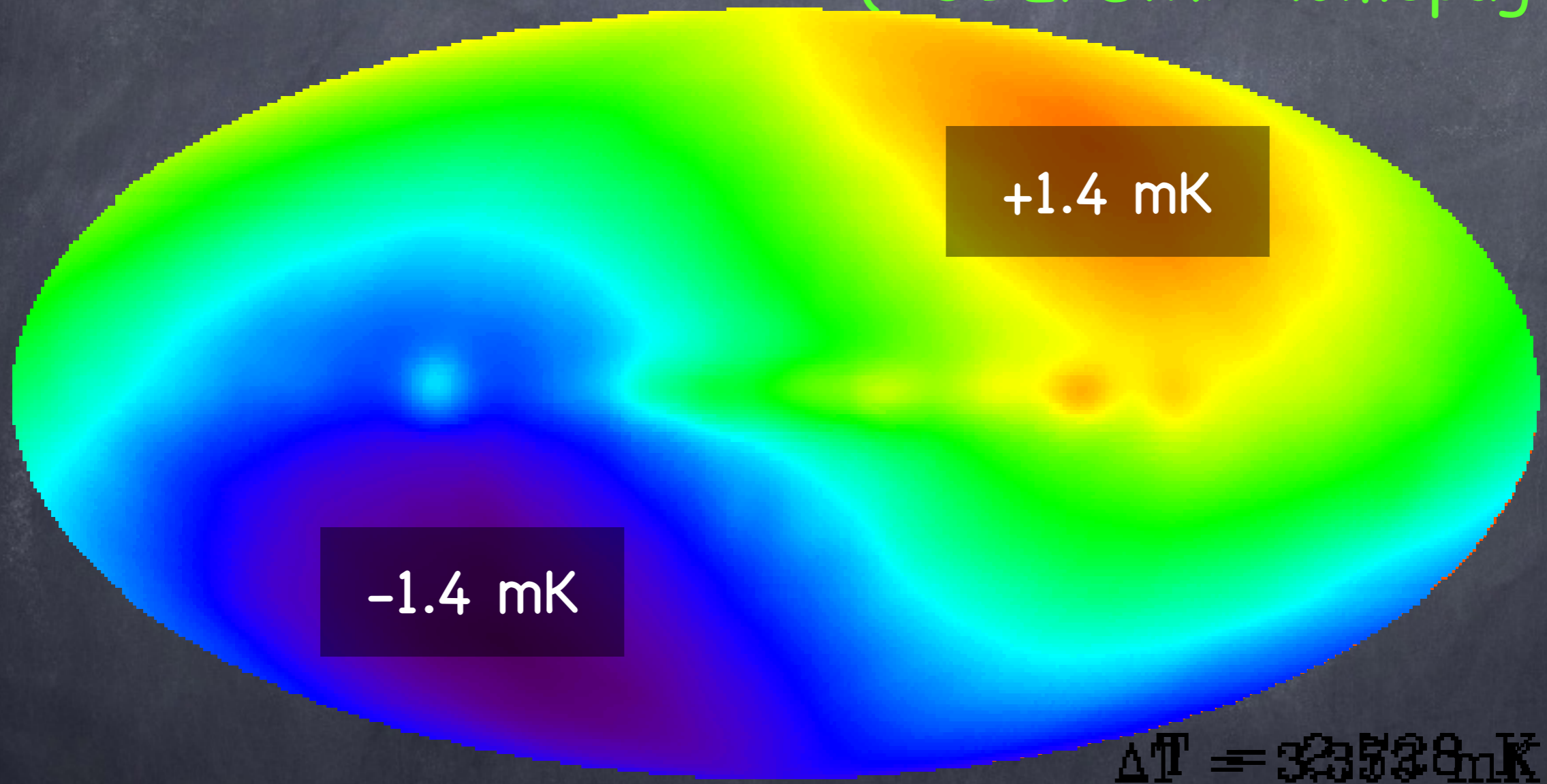
(COBE/DMR homepage)



$T = 2.728 \text{ K}$

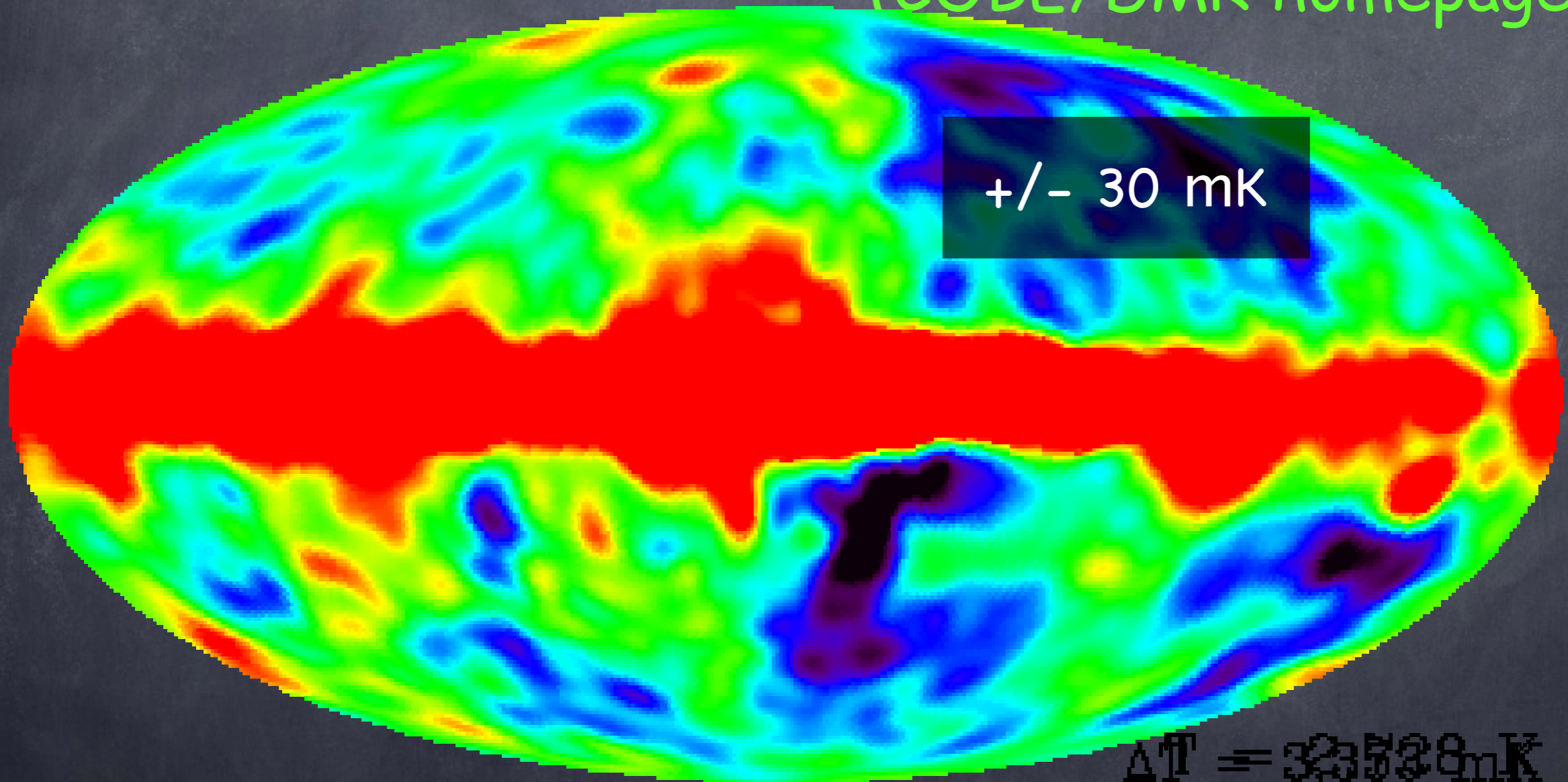
# Homogénéité et isotropie

(COBE/DMR homepage)



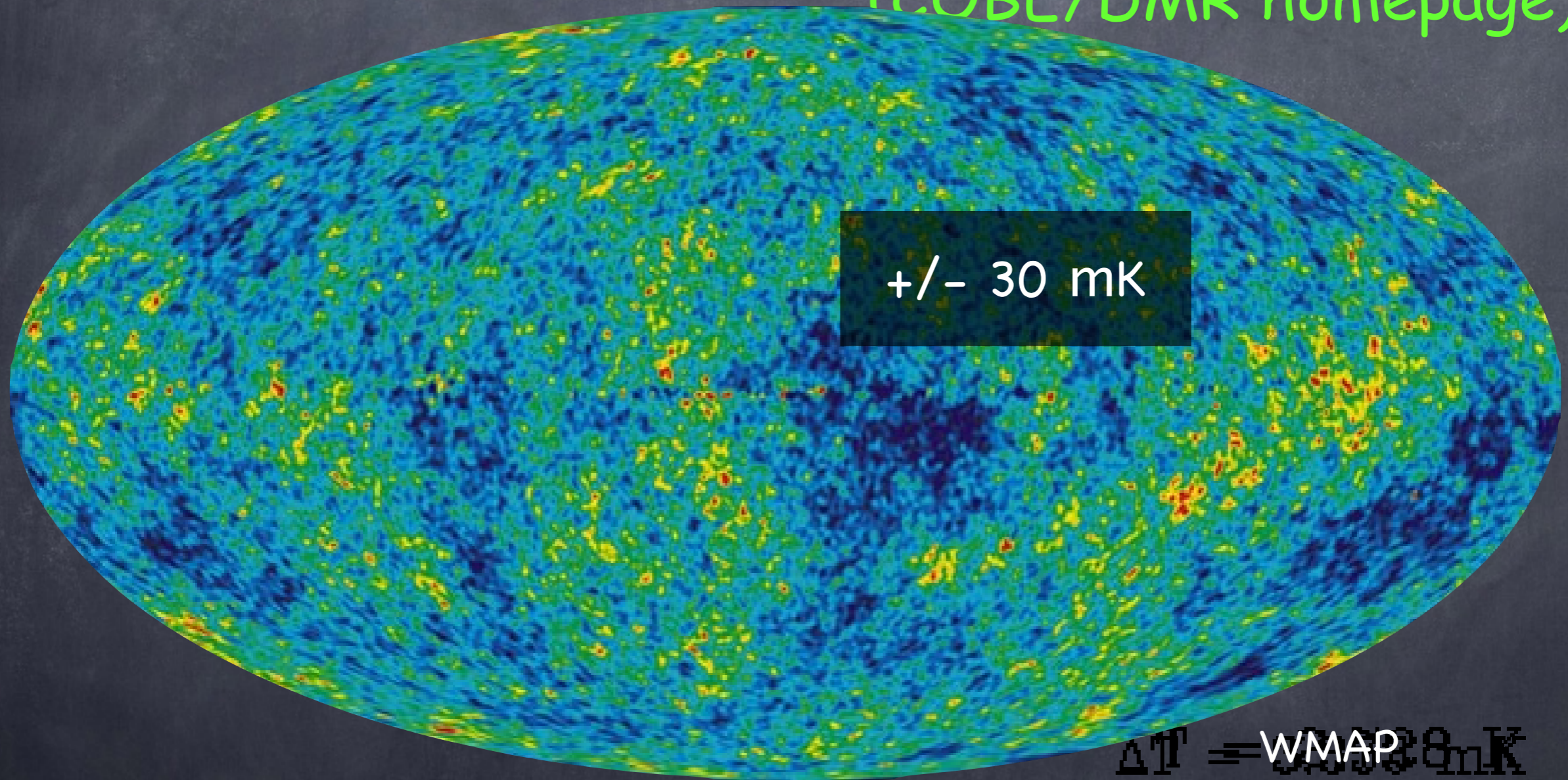
# Homogénéité et isotropie

(COBE/DMR homepage)



# Homogénéité et isotropie

(COBE/DMR homepage)





# La métrique

on s'intéresse d'abord à la partie spatiale :

$$ds^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

la métrique définit la géométrie de l'espace courbe via  
le tenseur de Riemann  $R_{ijkl}$

$$R_{ijkl} = -R_{jikl},$$

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk},$$

$$R_{ijkl} = R_{klij}.$$

l'isotropie implique :  $R_{ijkl} = \zeta [\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}]$

et la contraction pour Ricci et courbure scalaire :

$$\begin{aligned} R_{ij} &= 2\gamma_{ij}\zeta, \\ R &= 6\zeta. \end{aligned}$$

3 cas se présentent :

$$\begin{cases} \zeta > 0 : \text{courbure constante positive,} \\ \zeta = 0 : \text{espace plat,} \\ \zeta < 0 : \text{courbure constante négative.} \end{cases}$$

# La métrique

cas de courbure nulle : coordonnées euclidiennes

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

cas de courbure positive : un exemple d'espace isotrope en 4D  
est la 3-sphère  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$

élément de distance :  $dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$  + une contrainte :

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4 = 0$$

soit

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}.$$

on peut passer aux sphériques :

$$\begin{cases} x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ x_3 &= r \cos \theta. \end{cases}$$

ce qui donne

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]$$

et

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 = r dr.$$

# La métrique

l'élément de longueur devient

$$\begin{aligned} dl^2 &= dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] + \frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2} \\ &= \frac{a^2}{a^2 - r^2} dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \end{aligned}$$

et après un changement de variables

$$d\Omega^2 := d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \text{ et } \bar{r} := \frac{r}{a},$$

$$dl^2 = a^2 \left[ \frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right]$$

cas de courbure négative : on remplace  $a^2$  par  $-a^2$

$$\begin{aligned} dl^2 &= \frac{-a^2}{-a^2 - r^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= a^2 \left[ \frac{d\bar{r}^2}{1 + \bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right]. \end{aligned}$$

# La métrique

Bilan : on obtient 3 métriques possibles pour décrire la partie spatiale d'un univers homogène et isotrope

$$dl^2 = a^2 \left[ \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right],$$

$$k = \begin{cases} +1 & , \text{Univers fermé,} \\ 0 & , \text{espace plat,} \\ -1 & , \text{Univers ouvert.} \end{cases}$$

On ajoute la partie temporelle avec l'hypothèse d'homogénéité et en permettant au facteur d'échelle "a" de dépendre du temps :  $a(t)$

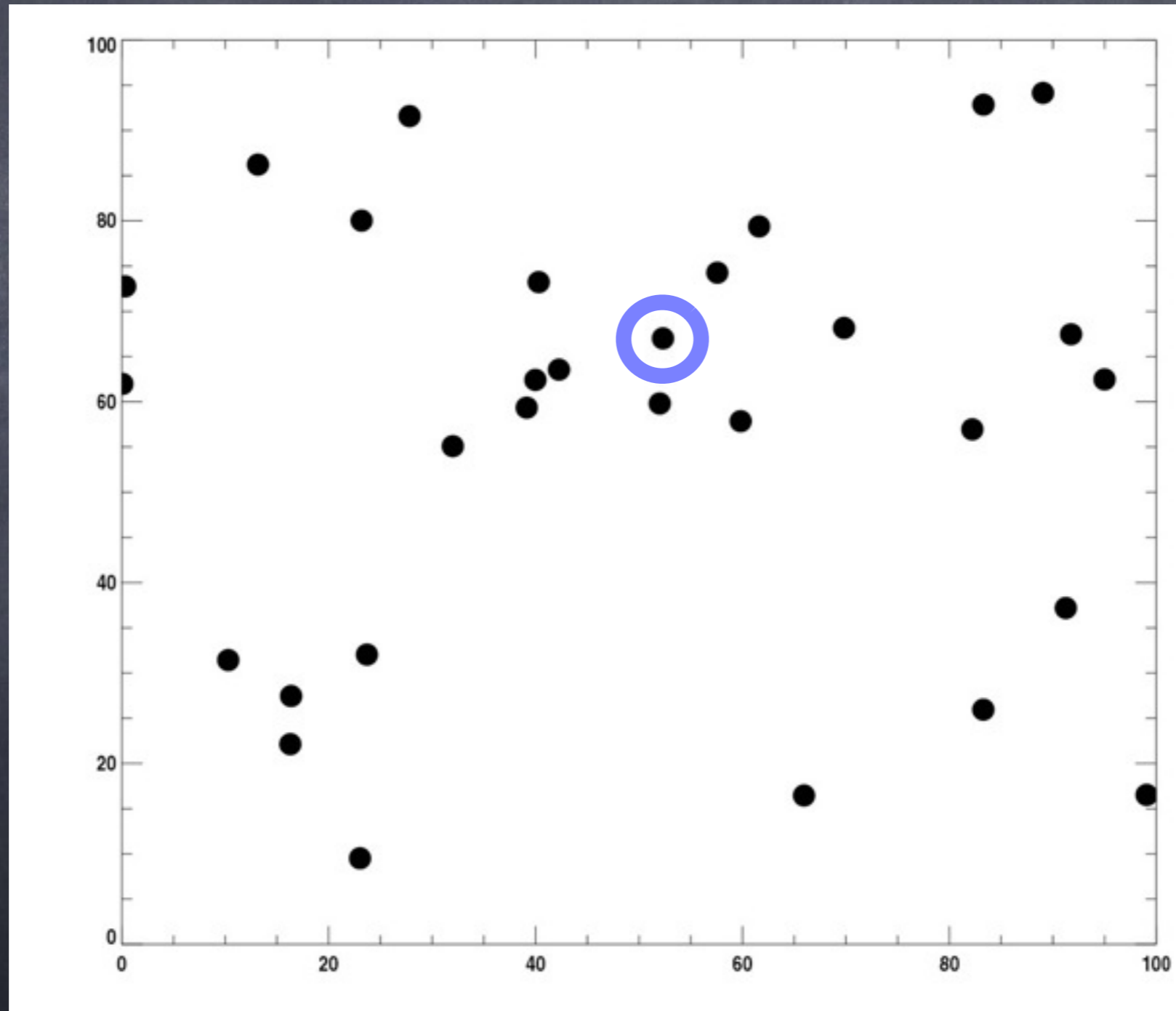
$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right]$$

# La métrique

on peut de la sorte imaginer une expansion isotrope de l'univers (coordonnées physiques) :

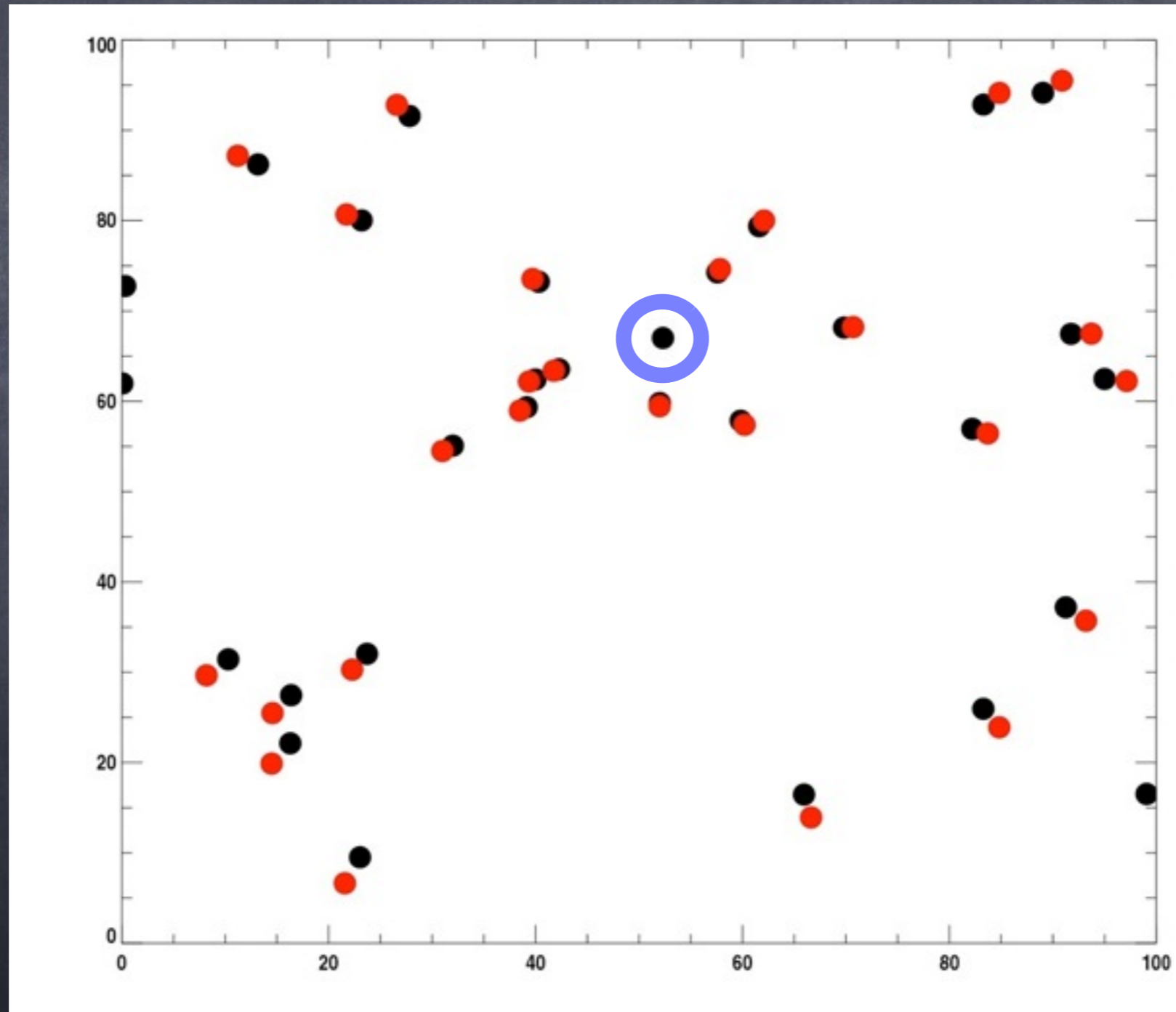
# La métrique

on peut de la sorte imaginer une expansion isotrope de l'univers (coordonnées physiques) :



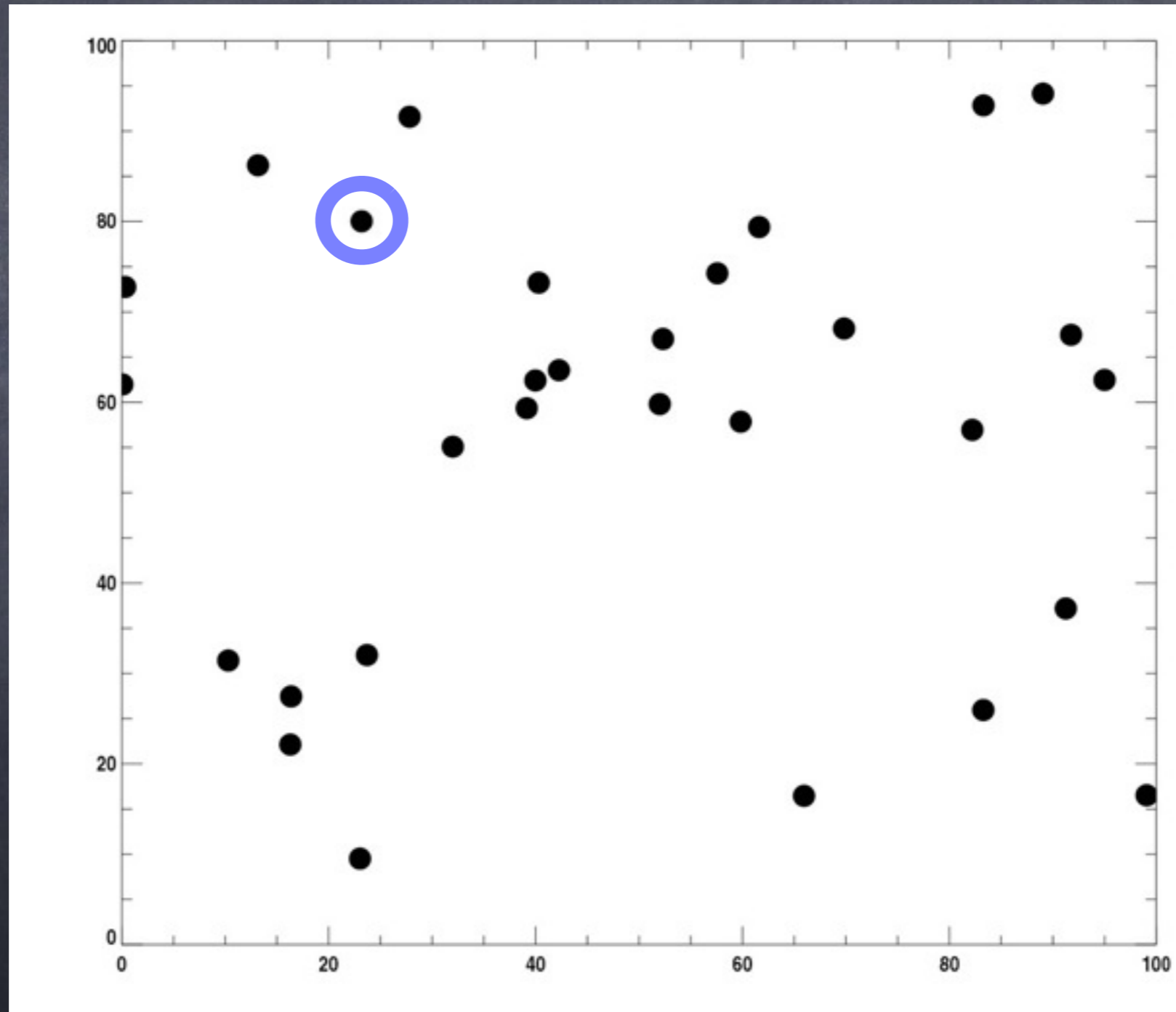
# La métrique

on peut de la sorte imaginer une expansion isotrope de l'univers (coordonnées physiques) :



# La métrique

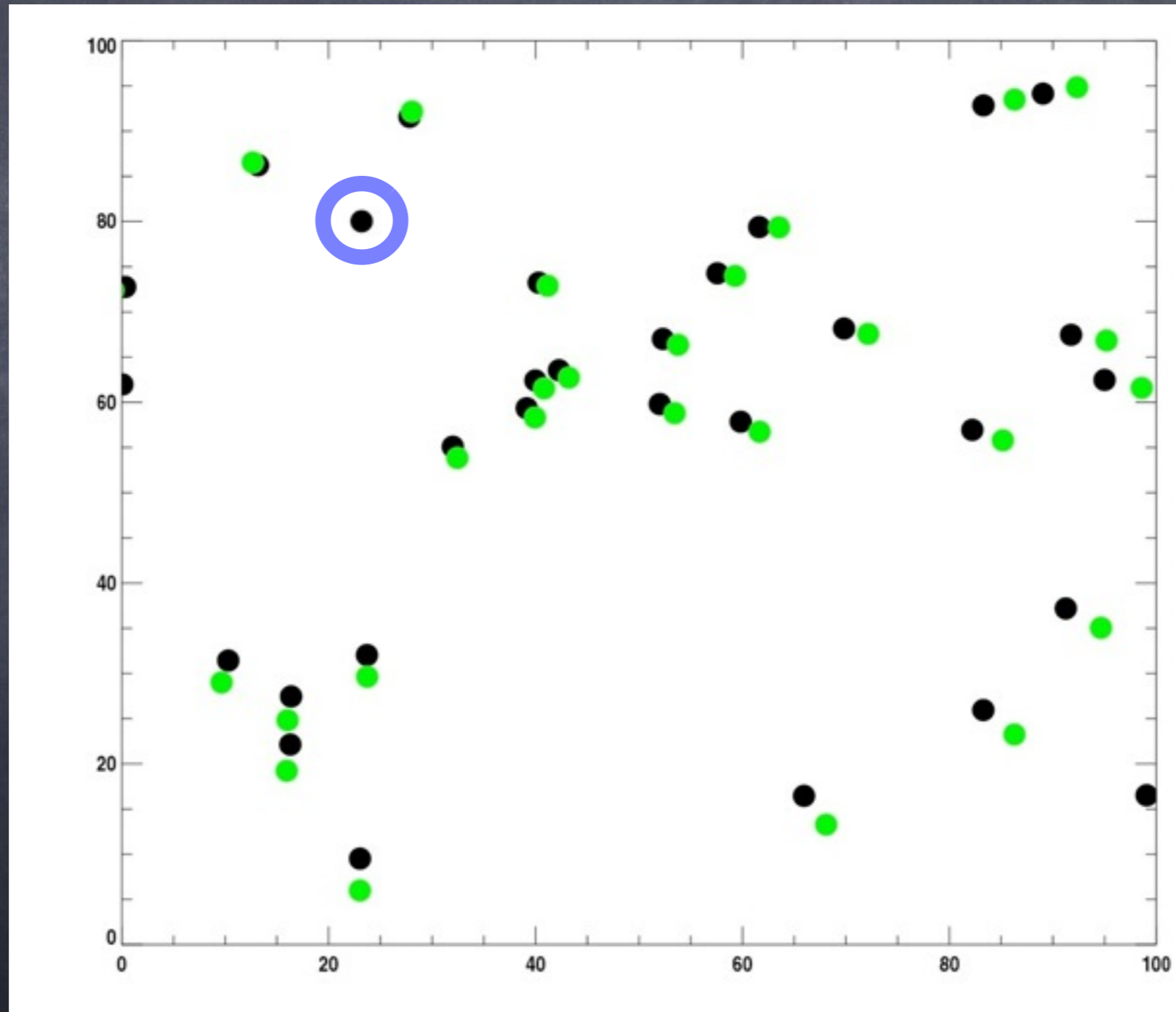
on peut de la sorte imaginer une expansion isotrope de l'univers (coordonnées physiques) :





# La métrique

on peut de la sorte imaginer une expansion isotrope de l'univers (coordonnées physiques) :



# La métrique

## les coordonnées comobiles

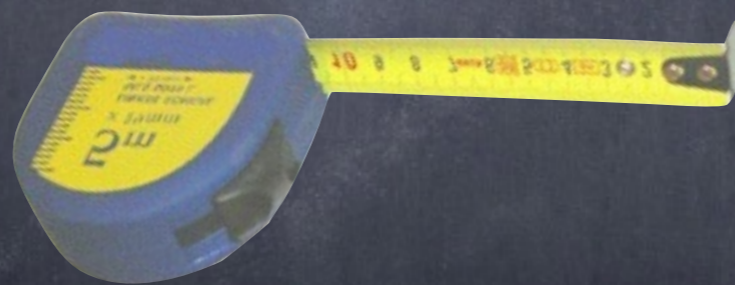
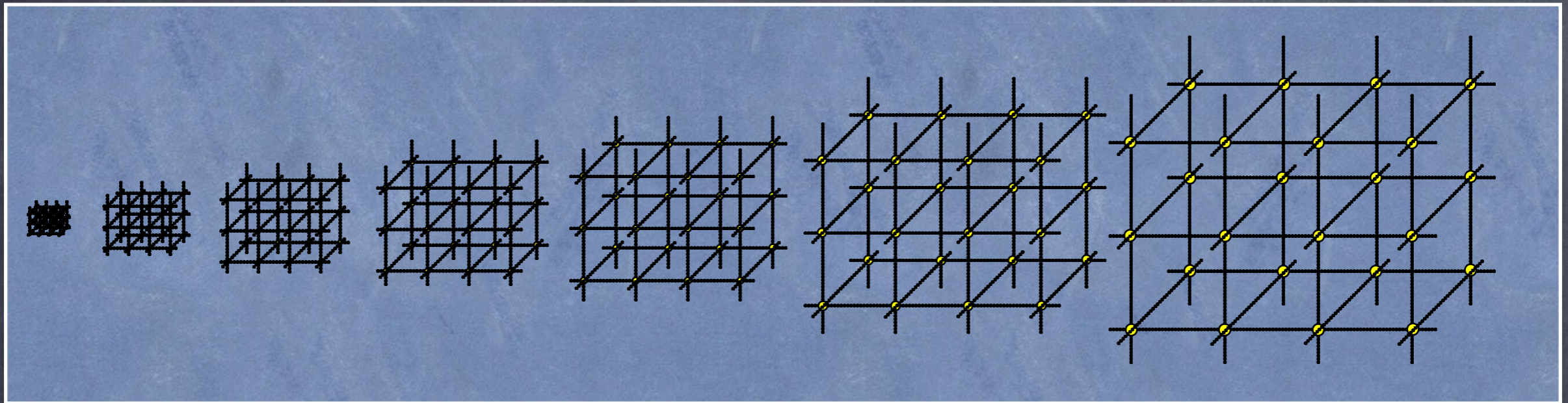


$1:10^2$  ?  $1:10^6$  ?  $1:10^{23}$  ?

# La métrique

les coordonnées physiques

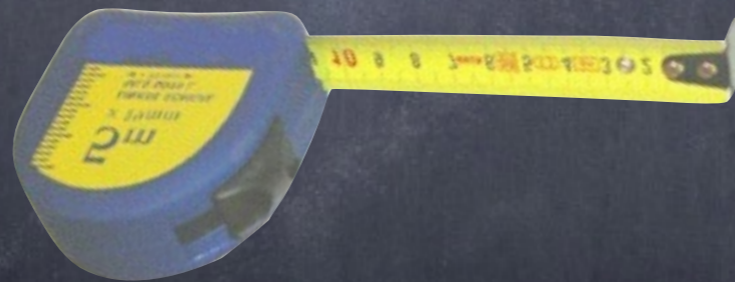
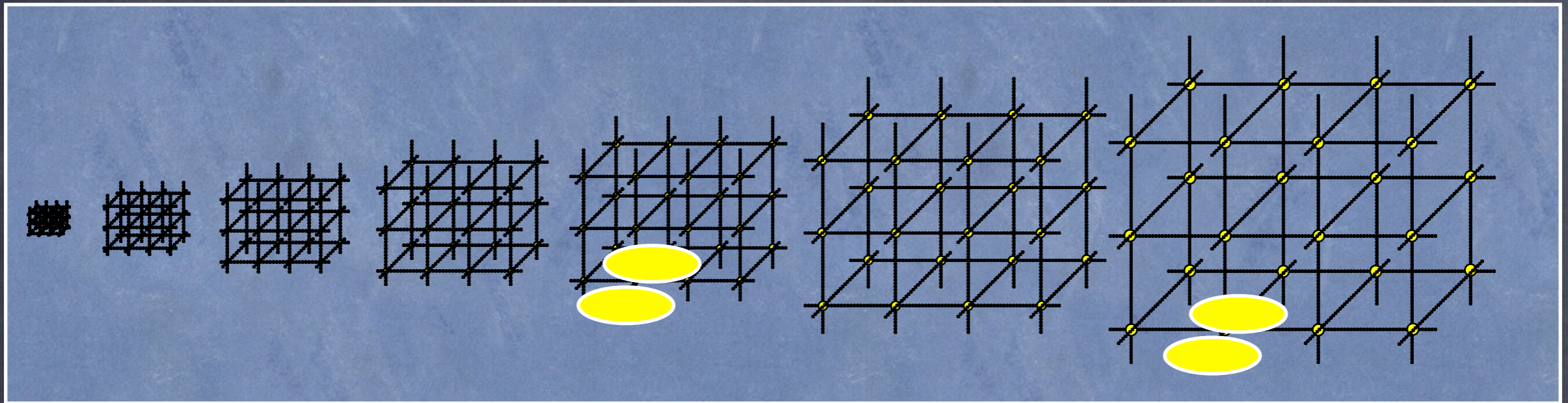
loi linéaire vectorielle



# La métrique

les coordonnées comobiles

loi linéaire vectorielle



ne fonctionnera pas pour des objets  
gravitationnellement liés !

l'expansion domine au-delà de 10 Mpc (cf  
vitesses propres et constante de Hubble)