

# Introduction au modèle standard de la cosmologie ; développements sur le rayonnement fossile et sa polarisation

Benoît Revenu

Physique Corpusculaire et Cosmologie  
Collège de France  
11 place Marcelin Berthelot  
75 231 Paris CEDEX 05  
revenu@in2p3.fr

février 2002

## Résumé

La cosmologie atteint un point crucial : les expériences, notamment celles dédiées à l'étude du rayonnement fossile, deviennent suffisamment précises pour atteindre des erreurs sur les paramètres cosmologiques de quelques pourcents. Dans cet article, nous décrivons le modèle standard de la cosmologie, celui du *Big-Bang*. Nous nous restreignons tout d'abord à l'étude d'un univers homogène et isotrope : les notions de distances sont discutées et nous définissons les paramètres cosmologiques décrivant l'Univers de façon globale ; nous étudions ensuite l'évolution des différentes familles de particules et leurs interactions.

La seconde partie est dédiée aux fluctuations dans l'univers. Nous présentons le modèle de l'inflation, lorsque les fluctuations primordiales apparaissent. Nous étudions ensuite l'évolution de ces fluctuations dans le cadre de la mécanique newtonienne et en relativité générale et montrons que ces perturbations doivent être observables dans le rayonnement fossile qui est décrit en détails dans la partie suivante. Une fraction importante de cette dernière partie est consacrée à la polarisation du rayonnement fossile qui sera bientôt directement observable grâce aux futures missions satellite.

---

Ce document, mis à jour depuis, correspond en grande partie au chapitre théorique de ma thèse, soutenue en mai 2000 au PCC. Celle-ci peut-être téléchargée à l'adresse suivante :  
<http://cdfinfo.in2p3.fr/~revenu/Download/these.ps.gz>

---

# Table des matières

Introduction	1
<b>1 L’Univers homogène et isotrope</b>	<b>5</b>
1.1 Le principe cosmologique . . . . .	5
1.2 La relativité . . . . .	6
1.2.1 Vers la relativité générale . . . . .	6
1.2.2 Relativité générale . . . . .	7
1.3 L’Univers de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker . . . . .	9
1.3.1 Métrique . . . . .	9
1.3.2 Dynamique . . . . .	10
1.3.3 Loi de Hubble et <i>redshift</i> . . . . .	14
1.3.4 Paramètres cosmologiques . . . . .	16
1.3.5 Distances et temps écoulé . . . . .	19
1.3.6 Horizons et rayon de Hubble. . . . .	23
1.4 Le modèle du <i>Big-Bang</i> . . . . .	26
1.4.1 Historique et propriétés . . . . .	26
1.4.2 Scénario du <i>Big-Bang</i> . . . . .	33
<b>2 Fluctuations dans l’Univers</b>	<b>39</b>
2.1 Observations . . . . .	39
2.1.1 Extension du principe cosmologique . . . . .	39
2.1.2 Méthode statistique . . . . .	39
2.1.3 La matière noire . . . . .	41
2.2 Généralités sur le rayonnement de fond cosmologique . . . . .	45
2.3 Inflation . . . . .	50
2.3.1 Les problèmes de l’“ancien” modèle standard. . . . .	51
2.3.2 Le concept d’inflation ; solutions aux problèmes du modèle standard .	55
2.3.3 Principe de la théorie de l’inflation . . . . .	57
2.4 Perturbations cosmologiques . . . . .	63

2.4.1	Approche newtonienne . . . . .	63
2.4.2	Solutions uniformes . . . . .	64
2.4.3	Perturbation du modèle . . . . .	65
2.4.4	Solutions du modèle perturbé . . . . .	66
2.4.5	Approche relativiste . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Les anisotropies du CMB</b>	<b>77</b>
3.1	Anisotropies de température . . . . .	77
3.1.1	Anisotropies et échelles angulaires . . . . .	77
3.1.2	Anisotropies et paramètres cosmologiques . . . . .	80
3.1.3	Expériences CMB et fonctions fenêtres . . . . .	83
3.1.4	Résultats expérimentaux (janvier 2002) . . . . .	84
3.1.5	Variance cosmique . . . . .	86
3.1.6	Principe du calcul complet du spectre . . . . .	87
3.2	La polarisation du CMB . . . . .	89
3.2.1	Les paramètres de Stokes . . . . .	89
3.2.2	Polarisation du CMB et quadrupôles . . . . .	92
3.2.3	Figures de polarisation — champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ . . . . .	96
3.2.4	Les spectres polarisés . . . . .	100
3.2.5	Aperçu de l'équation de transfert . . . . .	103

# Table des figures

1	Penzias et Wilson en 1964 . . . . .	2
2	Cartographie du ciel visible à grande échelle . . . . .	5
3	Le rayonnement fossile . . . . .	6
4	Loi de Hubble . . . . .	16
5	Isocontours de probabilité dans le plan $[\Omega_m, \Omega_\Lambda]$ . . . . .	20
6	Diamètres angulaires en fonction du <i>redshift</i> . . . . .	21
7	Calcul de la distance angulaire . . . . .	21
8	Horizon des particules . . . . .	24
9	<i>Redshift</i> cosmologique . . . . .	28
10	Einstein et Lemaître vers les années 30 . . . . .	29
11	Histoire de l'Univers . . . . .	34
12	Spectre du CMB . . . . .	35
13	Prédictions des abondances. . . . .	37
14	Spectre de puissance de la distribution des galaxies . . . . .	41
15	Courbe de rotation des étoiles . . . . .	42
16	Recombinaison . . . . .	47
17	<i>Redshift</i> du découplage des photons . . . . .	48
18	Instruments du satellite COBE . . . . .	49
19	Ciel vu par l'instrument D.M.R. de COBE . . . . .	50
20	Problème de la platitude . . . . .	53
21	Problème de l'horizon . . . . .	54
22	Problème de la formation des structures . . . . .	55
23	Formation des structures avec inflation . . . . .	57
24	Solution au problème de l'horizon . . . . .	58
25	Autour du découplage . . . . .	70
26	Le CMB vu aujourd'hui . . . . .	78
27	Oscillations acoustiques et pics Doppler . . . . .	79
28	Effet de la géométrie de l'Univers sur les anisotropies . . . . .	81

29	Spectres de puissance du CMB . . . . .	82
30	Premières mesures de $C_\ell^T$ . . . . .	85
31	Estimation des paramètres $\Omega_m$ et $\Omega_\Lambda$ . . . . .	87
32	Portrait de George Gabriel Stokes . . . . .	89
33	Transformation des paramètres de Stokes lors d'une rotation . . . . .	91
34	Direction de la polarisation en fonction du signe de $Q$ et $U$ . . . . .	92
35	Quadrupôles et polarisation . . . . .	93
36	Corrélation température-polarisation . . . . .	93
37	Diffusion Thomson et CMB . . . . .	94
38	Figure de polarisation et fluctuations de densité . . . . .	97
39	Paramètres de Stokes autour d'une perturbation scalaire . . . . .	98
40	Paramètres de Stokes autour d'une perturbation tensorielle . . . . .	99
41	Figures de polarisation autour des champs $E$ et $B$ . . . . .	101
42	Spectres de température et de polarisation simulés . . . . .	102
43	Géométrie de la diffusion Thomson . . . . .	104

## Liste des tableaux

1	Évolution de l'Univers selon la nature de l'espèce dominante. . . . .	13
2	Propriétés des particules dans l'Univers selon leur masse et leur nature . . .	33
3	Estimations des paramètres cosmologiques . . . . .	86





## Introduction

C'était en 1964. Arno A. Penzias et Robert W. Wilson, des laboratoires Bell, utilisaient la plus sensible des antennes radio de l'époque pour des travaux de recherche sur la communication par satellite. Contre toute attente, ils découvrirent un signal parasite d'origine inexplicable, provenant de toutes les directions du ciel et constant dans le temps. Après avoir réexaminé soigneusement toutes les sources possibles de bruit (Voie Lactée, Soleil, défauts de connection dans l'antenne et même guano de pigeon), le signal persistait, un an après. La nouvelle s'est répandue lorsque Penzias discuta de cet excès de température avec Bernard Burke, du M.I.T. Ce dernier avait entendu parler des travaux de P.J.E. Peebles du groupe de R.H. Dicke à Princeton sur le rayonnement dans l'Univers. À cette époque, ils étudiaient un modèle d'Univers oscillant avec une phase très dense et très chaude. Ils pensaient que si le rayonnement présent à cette époque était suffisamment intense, alors il devrait être observable aujourd'hui — ils calculèrent que l'Univers devrait être rempli d'un rayonnement de corps noir d'une température de l'ordre de 10 K. La collaboration entre Penzias, Wilson et le groupe de Princeton donna naissance à deux lettres dans la revue *Astrophysical Journal Letters* ; voici un extrait de celle de Penzias & Wilson (1965), annonçant leur découverte :

### A MEASUREMENT OF EXCESS ANTENNA TEMPERATURE AT 4080 Mc/s

Measurements of the effective zenith noise temperature of the 20-foot horn-reflector antenna at the Crawford Hill Laboratory, Holmdel, New Jersey, at 4080 Mc/s have yielded a value of about 3.5 K higher than expected. This excess temperature is, within the limits of our observations, isotropic, unpolarized, and free from seasonal variations (July, 1964 — April, 1965). A possible explanation for the observed excess noise temperature is the one given by Dicke et al. (1965) in a companion letter in this issue.

L'article de Dicke et de ses collaborateurs explique la provenance de ce rayonnement dans le cadre d'un Univers en expansion à partir d'un état très dense et très chaud. La découverte de ce rayonnement fossile (qui se trouve dans le domaine submillimétrique) a fait la "une" du *New York Times* du 21 mai 1965.

Depuis, de très nombreuses expériences dédiées à la détection de ce rayonnement ont été mises en place pour confirmer les mesures de Penzias et Wilson, avec succès : l'Univers est rempli d'un rayonnement de corps noir à une température d'environ 3 K. La première prédiction théorique de ce rayonnement est due à Gamow (1948) puis à Alpher & Herman (1948). Ainsi prirent fin, de façon pratiquement définitive, les luttes intestines entre les partisans du modèle de l'état stationnaire (Hoyle notamment) et ceux du *Big-Bang* (Gamow). Les inquiétudes qu'avait Fred Hoyle quand il déclarait en 1955 dans "Frontières de l'astronomie" : "*Il est suspect que dans ce modèle d'explosion aucune relique d'un état superdense de l'Univers ne*

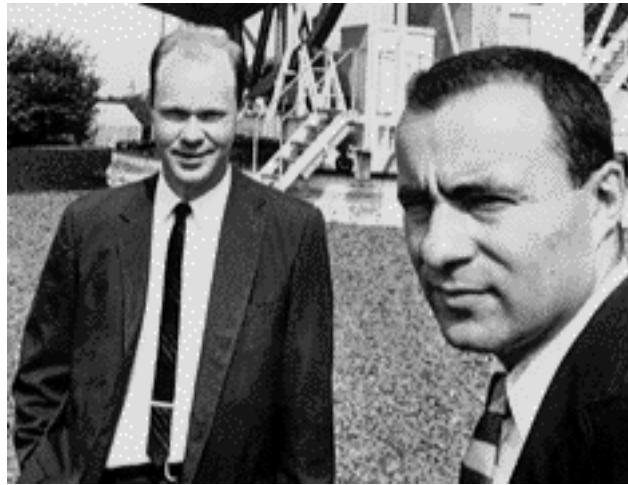


FIGURE 1 – Penzias et Wilson en 1964, devant l’antenne des laboratoires Bell avec laquelle ils ont découvert le CMB.

*puisse être trouvée.*”, sont donc levées, et sa théorie — déjà malmenée — perdait de plus en plus de crédibilité au profit de celle du *Big-Bang*. Pour cette raison, nous nous placerons dans la suite exclusivement dans le cadre de la théorie du *Big-Bang*.

Une trentaine d’années s’est écoulée depuis la découverte du rayonnement fossile et le nombre d’expériences de tous types (au sol, en ballon ou embarquées à bord d’un satellite) ne cesse de s’accroître. Cet engouement pour l’étude du CMB (c’est l’acronyme anglais de *Cosmic Microwave Background*, que nous utiliserons toujours dans la suite) est justifié : ayant été émis quelques centaines de milliers d’années après le *Big-Bang*, il contient une très grande quantité d’informations sur les conditions qui régnaient à cette époque, comme, par exemple, la densité de baryons, la densité de photons, la densité de matière noire... Les premières observations sur de grandes portions de ciel ont montré que ce rayonnement est très homogène : les fluctuations de température ne sont que de  $10^{-5}$  en valeur relative, mais c’est justement dans ces fluctuations qu’est inscrite toute la physique de l’Univers tel qu’il était il y a une quinzaine de milliards d’années. C’est pourquoi la mesure précise des fluctuations du CMB permet de contraindre très fortement les différents modèles cosmologiques en compétition pour expliquer la formation des structures.

La première partie de ce document décrit certains aspects essentiels du modèle standard ; dans un premier temps, nous nous restreindrons à décrire un Univers rigoureusement homogène et isotrope. Nous présenterons la relativité générale, le lien entre matière et énergie d’une part et géométrie de l’Univers d’autre part et les paramètres importants utilisés pour caractériser notre Univers, dits “paramètres cosmologiques”. Nous élargirons ensuite notre propos pour considérer des petites inhomogénéités, nécessaires pour rendre compte des observations. Nous aborderons le problème de la génération de ces inhomogénéités puis étudierons leur évolution dans un Univers dynamique ; ces inhomogénéités se couplent au rayonnement et se traduisent en fluctuations dans sa température, celles que nous observons dans le CMB. On s’attend à ce que ce rayonnement soit polarisé. Nous montrerons pour quelle raison il en est ainsi et nous définirons les paramètres de Stokes, qui permettent de la quantifier. Les propriétés de symétrie des paramètres de Stokes nous amèneront à introduire les champs de polarisation  $E$  et  $B$  : ce sont eux que l’on utilise lorsque l’on veut extraire la

physique contenue dans la polarisation du CMB. La mesure de cette polarisation, très délicate, est de grande importance puisqu'elle permettra éventuellement la détection des ondes gravitationnelles primordiales s'identifiant avec les fluctuations tensorielles de la métrique.



# 1 L'Univers homogène et isotrope

## 1.1 Le principe cosmologique

L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur l'Univers consiste à dire qu'il est homogène (invariance par translation) et isotrope (invariance par rotation) à grande échelle : c'est le principe cosmologique. Quelque soit la direction dans laquelle on regarde, on constate que l'Univers est *statistiquement* identique. Il est bien évident qu'à petite échelle l'Univers est loin de l'homogénéité. C'est en partie pour vérifier ce principe que des équipes sondent l'Univers sur des distances de plus en plus grandes. Si, sur des échelles de l'ordre de 100 Mpc

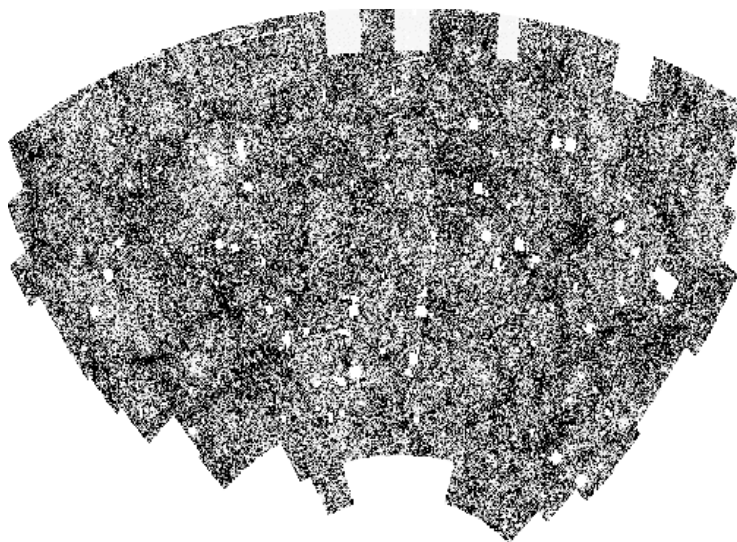


FIGURE 2 – Répartition de 2 millions de galaxies autour du pôle Sud galactique. La taille de cette portion de ciel est de  $50^\circ$  sur  $100^\circ$  correspondant à  $1/10$  du ciel. La qualité des mesures permet de sonder jusqu'à 1 Gpc environ. (APM survey. Steve Maddox, Will Sutherland, George Efstathiou and Jon Loveday, Astrophysics Dept, Oxford University).

les galaxies semblent réparties de façon inhomogène suivant une structure filamentaire, il n'en est plus de même aux échelles de l'ordre du Gpc (et au-delà). Les catalogues de galaxies se complètent grâce à des collaborations comme le SDSS ("Sloan Digital Sky Survey") ou le 2dF ("2 degrees Fields"). L'Univers est sondé sur des distances de plus en plus profondes et nous nous rapprochons de plus en plus d'une distribution homogène des galaxies. L'uniformité est bien plus flagrante si l'on considère une carte du ciel du CMB, correspondant à une distance supérieure à 6 Gpc : la température du ciel est la même quelque soit la ligne de visée à  $10^{-5}$  près (voir FIG. 3). D'un point de vue théorique, l'acceptation de ce principe réduit considérablement le nombre de cosmologies possibles. La théorie utilisée pour décrire l'évolution de l'Univers est la relativité générale. Nous allons en voir certains aspects dans la section suivante.

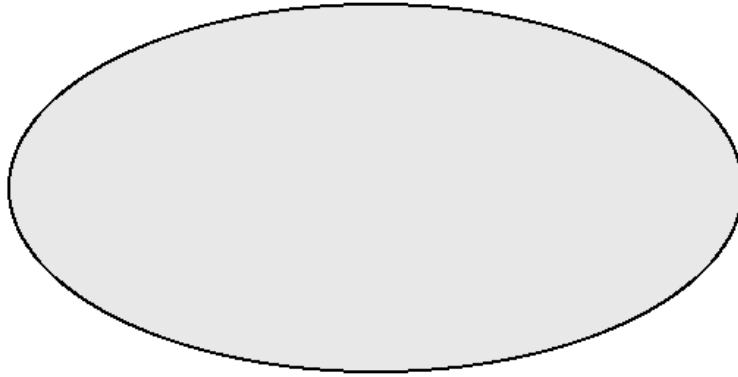


FIGURE 3 – **Le rayonnement fossile, en faveur du principe cosmologique.** Cette carte est celle du rayonnement fossile, avec une échelle linéaire de couleurs telle que le noir vaut 0 et le gris 2.73. C'est une image de l'Univers tel qu'il était quelques centaines de milliers d'années après le *Big-Bang*, correspondant à une distance de quelques Gpc par rapport à nous. Les fluctuations ne sont que de quelques centièmes de millièmes autour de 2.73 et sont invisibles ici, ce qui constitue l'un des arguments les plus forts en faveur du principe cosmologique.

## 1.2 La relativité

Dans la théorie du *Big-Bang*, l'Univers a été, dans sa jeunesse, très dense. À cette époque, mêmes les forces à très courte portée ont eu une influence sur sa structure. Cependant, cette période a peu duré par rapport à son âge total. Les interactions à longue portée sont celles qui étaient, sont et seront dominantes. Ce sont celles-ci qui déterminent la structure et l'évolution de l'Univers. Or des 4 interactions fondamentales, seules 2 sont à grande portée : la gravitation et l'électromagnétisme. Les forces nucléaires faibles et fortes sont à courte portée et ne peuvent donc jouer aucun rôle sur l'évolution de l'Univers à grande échelle. Quant à la force électro-magnétique, l'existence de charges électriques positives et négatives implique que la résultante des forces va être négligeable sur de grandes échelles (effet d'écrantage). Seule la gravitation est donc susceptible d'avoir *aujourd'hui* une influence sur l'évolution et la structure de l'Univers. La meilleure théorie de la gravitation dont nous disposons aujourd'hui est la relativité générale d'Einstein : elle n'a jusque là été contredite par aucune observation. Elle ne repose pas sur le principe cosmologique car c'est une théorie *locale* alors que le principe cosmologique émet des hypothèses *globales*.

### 1.2.1 Vers la relativité générale

Un *événement* est décrit dans l'*espace-temps* par 4 coordonnées : trois d'espace et une de temps. En relativité restreinte, on définit l'*intervalle* entre deux événements infiniment proches  $(t, x, y, z)$  et  $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$  par la quantité :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$ds$  est *invariant* par changement de coordonnées (groupe de Poincaré) et la trajectoire d'un rayon lumineux est caractérisée par l'équation :

$$ds = 0. \quad (1)$$

La trajectoire de particules matérielles entre deux événements quelconques est telle que la quantité :

$$\int_{\text{trajectoire}} ds \quad \text{est **stationnaire**.} \quad (2)$$

Cette intégrale est minimale quand la trajectoire suivie minimise la distance à parcourir pour aller d'un événement à l'autre : c'est la ligne droite. Ceci s'applique à toutes les particules *libres*, c'est-à-dire ne subissant pas l'influence de forces extérieures comme la gravitation ou l'électromagnétisme. En présence de ces forces, la trajectoire diffère de la ligne droite. La caractéristique essentielle de la gravitation est qu'elle communique la même accélération à tous les corps, quelque soit leur masse. L'idée d'Einstein a donc été de dire que la gravitation s'inscrit dans la géométrie de l'Univers, qu'elle est due à la matière et que toutes les particules se déplacent *librement* dans cet espace-temps empreint de gravitation. L'espace-temps de Minkowski de la relativité restreinte (pseudo-euclidien) cède la place à un autre espace-temps dont les caractéristiques dépendent de la présence ou de l'absence d'un champ gravitationnel. La première étape consiste à généraliser la forme de la métrique.

### 1.2.2 Relativité générale

L'intervalle séparant deux événements de la relativité restreinte est modifiée : le nouvel intervalle doit faire intervenir la géométrie de l'espace-temps puisque nous voulons une théorie géométrique de la gravitation. Il s'écrit de la manière suivante<sup>1</sup> :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$g_{\alpha\beta}$  s'appelle le *tenseur métrique* et la valeur de ses composantes (10 sont indépendantes sur les 16 qu'il contient car il est symétrique) dépend de la gravitation. Nous voyons donc que la relativité générale est une théorie *géométrique* de la gravitation. Les équations d'Einstein ne nous fournissent que 6 équations indépendantes. Ceci est dû au fait que la physique est invariante par changement de coordonnées : c'est l'invariance de jauge. Les 4 degrés de liberté restants doivent être fixés, il faut choisir une jauge, c'est-à-dire choisir un système de coordonnées. Pour une particule libre ponctuelle, la trajectoire rendant l'intégrale 2 stationnaire s'appelle *géodésique* et obéit à l'équation :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \quad (3)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma &= 0 \\ u^\alpha &\equiv \frac{dx^\alpha}{ds} \\ u^2 &= 1 \end{aligned} \quad (4)$$

---

1. On utilise la convention des indices répétés ; les indices grecs vont de 0 à 3 et les indices latins de 1 à 3. Un événement s'écrit désormais formellement :  $x^\mu$  où  $x^0$  est la coordonnée de temps et  $x^1, x^2, x^3$  sont les coordonnées d'espace.

où  $u^\alpha$  est la quadri-vitesse de la particule.

Dans cette équation,  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  est un *symbole de Christoffel* et est relié au tenseur métrique par la relation<sup>2</sup> :

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\rho\beta,\gamma} + g_{\rho\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho}). \quad (5)$$

Le tenseur de Riemann-Christoffel est donné par :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (g_{\beta\gamma,\alpha\delta} + g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta}) + g_{\mu\nu} (\Gamma_{\alpha\delta}^\mu \Gamma_{\beta\gamma}^\nu - \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \Gamma_{\beta\delta}^\nu). \quad (6)$$

Les tenseur et scalaire de Ricci sont définis par :

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta} \quad (7)$$

$$= \Gamma_{\alpha\beta,\rho}^\rho - \Gamma_{\alpha\rho,\beta}^\rho + \Gamma_{\gamma\rho}^\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \Gamma_{\beta\gamma}^\rho \Gamma_{\alpha\rho}^\gamma \quad (8)$$

$$\text{et : } R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R_\alpha^\alpha. \quad (9)$$

La gravitation apparaît comme une courbure de l'espace-temps qui prend sa source dans la matière présente. Ceci est exprimé dans l'équation d'Einstein qui relie le tenseur de Ricci (purement géométrique, il rend compte de la courbure) et le tenseur énergie-impulsion (purement "physique", il décrit la distribution de matière). Cette équation s'écrit :

$$\boxed{R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi G T_{\alpha\beta}} \quad (10)$$

où  $T_{\alpha\beta}$  est le tenseur énergie-impulsion. Appliquée dans la limite du champ de gravitation faible, on retrouve l'équation de Poisson newtonienne :  $\Delta\phi = 4\pi G \rho$ . Lorsqu'Einstein a obtenu cette équation, il a remarqué qu'elle menait naturellement à un Univers *non statique*. Ce résultat étant contraire à ses convictions (croyances ?), il ajouta, sans aucune motivation physique, un terme capable de rendre l'Univers artificiellement statique : c'est la constante cosmologique. Quelques années plus tard, Hubble<sup>3</sup> a montré que l'Univers était en expansion (Hubble, 1929). Einstein l'apprenant, qualifia sa constante cosmologique de "plus grande erreur de [sa] vie" : il aurait pu prédire que l'Univers n'était pas statique avant les observations de Hubble. S'il avait vécu jusqu'à aujourd'hui, peut-être reviendrait-il à nouveau sur sa constante cosmologique, qui n'est probablement pas nulle (voir page 19). Mathématiquement, la constante cosmologique se traduit par l'apparition du terme  $\Lambda g_{\alpha\beta}$  dans le membre de droite de l'équation 10.

Les identités de Bianchi, qui sont des relations purement géométriques puisqu'elles ne font intervenir que le tenseur métrique, s'écrivent :

$$\left( R^\alpha_\beta - \frac{1}{2} g^\alpha_\beta R \right)_{;\alpha} = 0 \quad (11)$$

---

2. La virgule symbolise la dérivation par rapport à la variable écrite juste derrière :

$$A^\mu_{;\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\nu A^\mu.$$

3. Lemaître avait trouvé ce résultat peu de temps avant avec les données de Hubble.



et entraînent la conservation du tenseur énergie-impulsion :

$$T^\alpha_{\beta ;\alpha} = 0 \quad (12)$$

où le point-virgule symbolise la dérivée covariante. On trouvera une description exhaustive de la relativité générale dans Weinberg (1972) et Misner et al. (1973) par exemple. Une très bonne introduction est donnée dans Peebles (1993).

### 1.3 L'Univers de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Nous souhaitons maintenant utiliser la relativité générale dans le cadre de la cosmologie. Pour cela, il nous faut construire la métrique qui nous permettra, par la suite, d'obtenir les équations de la dynamique dans un Univers régi par la gravitation. Pour construire cette métrique, nous allons lui imposer de respecter le principe cosmologique, c'est-à-dire de la contraindre en lui imposant de respecter des symétries.

#### 1.3.1 Métrique

L'adhésion au principe cosmologique revient à supposer qu'il existe une classe d'observateurs auxquels l'Univers apparaît homogène et isotrope. Dans la suite, nous appellerons ces observateurs *observateurs fondamentaux*. Un autre observateur, en translation rectiligne et uniforme par rapport à ces observateurs fondamentaux, verra un Univers anisotrope. On utilise donc le système de coordonnées des observateurs fondamentaux  $(t, x^i)$ . Nous allons traduire en termes géométriques les notions d'isotropie et d'homogénéité. L'intervalle entre deux événements s'écrit :

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{0i} dt dx^i - \sigma_{ij} dx^i dx^j$$

où  $\sigma_{ij}$  est une métrique spatiale définie positive. On adopte un système d'unités dans lequel  $c = 1$ . L'isotropie de l'espace implique que les composantes  $g_{0i}$  s'annulent et donc qu'il n'existe aucune direction privilégiée définie par le 3-vecteur  $g_{0i}$ . Pour ce qui est de la composante temporelle, nous la définissons de telle manière que  $g_{00} = 1$ . L'intervalle d'espace-temps s'écrit donc :

$$ds^2 = dt^2 - \sigma_{ij} dx^i dx^j = dt^2 - dl^2$$

L'isotropie signifie qu'il existe un système de coordonnées tel qu'en tout point de l'Univers on ait une symétrie sphérique et donc la métrique peut être écrite :

$$dl^2 = a(t)^2 (f^2(r) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) .$$

La fonction  $f$  dépendant de  $r$  s'obtient en écrivant que la courbure spatiale  $R_i^i$  est constante dans l'espace. On trouve alors que :

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{R_i^i}{6} .$$

$\kappa \in \{-1; 0; 1\}$  est la courbure spatiale selon que l'Univers est ouvert (hyperbolique), plat ou fermé (sphérique). La métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker s'écrit donc :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) . \quad (13)$$

Le facteur d'échelle  $a$  est une fonction du temps dépendant du contenu de l'Univers et que l'on détermine à partir des équations d'Einstein. Une fonction  $a$  croissante correspond à un Univers en expansion, décroissante à un Univers en contraction et constante, à un Univers statique.

### 1.3.2 Dynamique

Munis de cette métrique, intéressons-nous au facteur d'échelle  $a$  dans un Univers rempli d'un fluide parfait. Le tenseur énergie-impulsion d'un tel fluide s'écrit :

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} \quad (14)$$

$p$  et  $\rho$  sont les pression et densité d'énergie (constantes) du fluide et  $u^\alpha$  sa quadri-vitesse. Dans le système de coordonnées des observateurs fondamentaux, le fluide est au repos partout. Ce système est celui des coordonnées comobiles. Le calcul des tenseurs de courbure et l'équation d'Einstein donnent les équations de Friedmann :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (15)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (16)$$

$$\text{avec } \dot{a} \equiv \frac{da}{dt}.$$

On peut réécrire la première de la façon suivante :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_{\text{courbure}} + \rho_{\text{vide}})$$

avec

$$\rho_{\text{courbure}} = -\frac{3\kappa}{8\pi G a^2} \quad \text{et} \quad \rho_{\text{vide}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}.$$

La conservation du tenseur énergie-impulsion (Eq. 12) donne :

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (17)$$

La densité d'énergie  $\rho$  intervenant ici est celle de toute la matière : relativiste ( $\rho^{\text{R}}$ ) et non-relativiste ( $\rho^{\text{NR}}$ ); on a donc  $\rho = \rho^{\text{R}} + \rho^{\text{NR}}$ . Les densités d'énergie associées à la courbure et à la constante cosmologique ( $\rho_{\text{courbure}}$  et  $\rho_{\text{vide}}$ ) *n'entrent pas dans*  $\rho$ . Cette équation est équivalente à celle obtenue en appliquant le premier principe de la thermodynamique à un volume  $V$  d'Univers en expansion :

$$d(\rho V) + V dp = 0 = d((\rho + p)a^3) - a^3 dp. \quad (18)$$

Elle traduit la conservation de l'entropie au cours de l'expansion de l'Univers (voir aussi page 31, où ce résultat est démontré pour une espèce de particules soumises à l'expansion). Comme seules 2 parmi les 3 équations 15, 16 et 17 sont indépendantes (on trouve l'Eq. 17 en dérivant par rapport au temps l'Eq. 15 et en faisant apparaître l'Eq. 16), on ne peut pas déterminer à la fois  $\rho(t)$ ,  $p(t)$  et  $a(t)$ . Il nous faut en plus une équation d'état de la matière  $p = p(\rho)$ .

On peut alors résoudre pour différentes équations d'état :

– **domination de la matière non-relativiste :**

$p^{\text{NR}} = 0$ ,  $\rho^{\text{NR}} \gg \rho^{\text{R}}$ . L'Eq. 17 devient :

$$\dot{\rho}^{\text{NR}} = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho^{\text{NR}} \quad (19)$$

c'est-à-dire :

$$\rho^{\text{NR}} \propto a^{-3}.$$

Dans un Univers dominé par la matière non-relativiste, la densité d'énergie est, comme on pouvait s'y attendre, inversement proportionnelle au volume. Connaissant cette dépendance, on est en mesure de résoudre l'équation de Friedmann 15, *en supposant en plus que la courbure est négligeable, ainsi que la constante cosmologique :*

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\text{matière}}$$

soit

$$\boxed{a(t) \propto t^{2/3}} \text{ pour la solution en expansion uniquement.}$$

Il existe une solution décrivant un Univers en contraction<sup>4</sup> mais elle ne correspond pas à notre Univers actuel, nous l'oublions donc par la suite.

– **domination du rayonnement :**

$p^{\text{R}} = \rho^{\text{R}}/3 \gg \rho^{\text{NR}}$ . De même, l'Eq. 17 devient :

$$\dot{\rho}^{\text{R}} = -4\frac{\dot{a}}{a}\rho^{\text{R}}$$

c'est-à-dire :

$$\rho^{\text{R}} \propto a^{-4}.$$

En supposant de plus que la courbure est négligeable (ce qui est valable pour des valeurs faibles du facteur d'échelle  $a$ ), ainsi que la constante cosmologique, l'équation de Friedmann 15 s'écrit :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho^{\text{R}}$$

soit

$$\boxed{a(t) \propto t^{1/2}} \text{ pour la partie en expansion uniquement.}$$

De même, il existe une solution décrivant un Univers en contraction<sup>5</sup> et, comme précédemment, nous ne nous y intéresserons pas.

– **domination de la courbure (cas d'un Univers ouvert) :**

$\rho_{\text{courbure}} \gg \rho$  et  $\rho_{\text{vide}}$ . Le cas d'un Univers ouvert correspond à une valeur de  $\kappa$  négative pour que  $\rho_{\text{courbure}} > 0$ . L'équation de Friedmann 15 s'intègre facilement en :

$$\boxed{a(t) \propto t} \text{ (puisque } \dot{a} = \sqrt{-\kappa} = \text{constante positive).}$$

---

4. Elle s'écrit  $a \propto (t_d - t)^{2/3}$ .

5. Elle s'écrit  $a \propto (t_d - t)^{1/2}$ .

– **domination de la constante cosmologique :**

$\rho_{\text{vide}} \gg \rho$  et  $\rho_{\text{courbure}}$ . Le terme  $\rho_{\text{vide}}$  est  $\Lambda/(8\pi G)$ . L'équation de Friedmann 15 se simplifie en :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} \equiv H^2$$

qui s'intègre en :

$$\boxed{a(t) \propto e^{\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right)} = e^{Ht}}.$$

Un Univers dominé par une constante cosmologique positive croît de façon exponentielle.

**Remarque sur la constante cosmologique.** Comme nous l'avons vu précédemment, l'équation d'Einstein 10 la plus générale peut s'écrire :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi G T_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

ou encore

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi G \tilde{T}_{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad \tilde{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\alpha\beta} = -\tilde{p}g_{\alpha\beta} + (\tilde{p} + \tilde{\rho})u_{\alpha}u_{\beta}.$$

Les pression et densité d'énergie effectives sont :

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= p - \frac{\Lambda}{8\pi G} \\ \text{et} \quad \tilde{\rho} &= \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} \end{aligned}$$

Les équations de Friedmann 15 et 16 s'écrivent avec ces nouvelles variables :

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi}{3}G(\tilde{\rho} + 3\tilde{p}) \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\tilde{\rho} - \frac{\kappa}{a^2}; \end{aligned}$$

la constante cosmologique n'intervient plus explicitement, elle est absorbée dans  $\tilde{p}$  et  $\tilde{\rho}$ . Einstein, qui souhaitait un Univers statique, a dû imposer que  $\dot{a} = 0$  et  $\ddot{a} = 0$ . Ceci est possible si :

$$\tilde{\rho} = -3\tilde{p} = \frac{3\kappa}{8\pi G a^2}.$$

Pour un Univers matériel dans lequel  $p = 0$ , on obtient dans ce cas,

$$\Lambda = \frac{\kappa}{a^2} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{\kappa}{4\pi G a^2}.$$

Puisque  $\rho > 0$ , on doit avoir  $\kappa = +1$  et donc  $\Lambda > 0$ . La valeur de  $\Lambda$  qui rend l'Univers statique est donc :

$$\Lambda_{\text{Einstein}} = 4\pi G \rho.$$

Cet Univers, dit Univers d'Einstein, est en fait instable car la constante cosmologique tend à agrandir l'espace (force répulsive) alors que la gravitation tend à le rétrécir (force attractive).

Un équilibre local peut bien sûr être atteint — c’est ce que nous venons de montrer — mais une légère fluctuation donnant l’avantage à l’un des deux suffit à écarter l’Univers de plus en plus d’un état d’équilibre, ce qui a pour effet d’accroître d’avantage la fluctuation etc : l’Univers n’est plus statique. Bien que cette constante cosmologique n’ait eu aucune raison d’être (elle a été introduite “à la main” par Einstein), aucune observation ne peut exclure les modèles cosmologiques dans lesquels  $\Lambda \neq 0$ , bien au contraire.

L’Univers de de Sitter quant à lui décrit l’évolution d’un Univers vide ( $p = 0$ ,  $\rho = 0$ ) et plat ( $\kappa = 0$ ). On trouve dans ce cas :

$$\tilde{p} = -\tilde{\rho} = -\frac{\Lambda}{8\pi G},$$

qui, injectée dans l’équation de Friedmann 15, donne :

$$\dot{a}^2 = \frac{\Lambda}{3} a^2.$$

Cette équation a une solution exponentielle :

$$a(t) \propto e^{\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right)} = e^{Ht}.$$

Dans cet Univers particulier, la constante de Hubble est une vraie constante, elle ne dépend pas du temps. Le facteur d’échelle croît de manière exponentielle. Jusqu’à il y a une vingtaine d’années, cet Univers de de Sitter n’avait que peu d’intérêt car il décrit un Univers vide. Il a maintenant une grande importance puisque les modèles d’inflation font intervenir des périodes durant lesquelles l’expansion de l’Univers est exponentielle ; ceci se produit lorsque le fluide dominant a pour équation d’état  $p = -\rho$ . On pense que notre Univers a connu une telle phase d’expansion, appelée *inflation* dans ses tout premiers instants (voir page 50).

Nous avons vu que la densité d’énergie de matière variait en  $a^{-3}$  alors que la densité de rayonnement variait en  $a^{-4}$ . Il existe donc un instant  $t_{eq}$  auquel les densités de matière et de rayonnement étaient égales. C’est l’instant d’*égalité matière-rayonnement*. Avant cette transition le rayonnement dominait. Le tableau 1 résume les résultats seulement pendant une période de temps où l’espèce considérée est dominante.

TABLE 1 – Évolution de l’Univers selon la nature de l’espèce dominante.

équation d’état	domination	$\rho$	$a$	époque
$p = \rho/3$	radiation	$\propto 1/a^4$	$\propto t^{1/2}$	avant $t_{eq}$
$p = 0$	matière	$\propto 1/a^3$	$\propto t^{2/3}$	après $t_{eq}$
—	courbure $\kappa/a^2$ , $\kappa > 0$	—	$\propto t$	aujourd’hui ?
$p = -\rho$	vide	—	$\propto e^{Ht}$	inflation <sup>1</sup>

---

1. Les résultats des supernovæ de type Ia (voir page 19) tendent à indiquer que nous sommes actuellement dans un Univers dominé par la constante cosmologique, donc que nous sommes dans une période d’inflation éternelle.

### 1.3.3 Loi de Hubble et *redshift*

Nous allons dans cette partie étudier l'effet de l'expansion de l'Univers sur les distances et introduire la notion de *redshift*. Nous allons voir qu'il existe différentes façons de définir la distance dans un Univers dynamique.

**Loi de Hubble.** Nous allons tout d'abord définir la *distance propre*. Imaginons qu'une infinité d'observateurs se trouvent sur la géodésique reliant deux points distincts  $P$  et  $P_0$ . Supposons ensuite qu'au même instant  $t$ , tous ces observateurs fassent leur mesure de distance infinitésimale et qu'un coordinateur fasse la somme de tous les résultats. Alors la distance ainsi obtenue est la distance propre séparant les points  $P$  et  $P_0$ . Elle a un sens physique bien défini mais elle n'est pas mesurable. Formellement, on reprend la métrique de l'Eq. 13 dans laquelle on pose  $dt = 0$ ,  $d\theta = 0$  et  $d\phi = 0$  :

$$d_{\text{propre}}(t) = \sqrt{|ds^2|} = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \kappa r'^2}} = a(t) g(r)$$

où

$$g(r) = \begin{cases} \arcsin r, & \text{si } \kappa = 1 \\ r, & \text{si } \kappa = 0 \\ \operatorname{argsinh} r, & \text{si } \kappa = -1 \end{cases} .$$

Nous voyons que la distance propre entre deux observateurs fondamentaux peut varier dans le temps à cause du facteur d'échelle. Leur distance *comobile*,  $g(r)$  est par contre constante. Si  $t_0$  désigne l'instant présent :

$$d_{\text{propre}}(t_0) = a(t_0) g(r) = \frac{a(t_0)}{a(t)} d_{\text{propre}}(t).$$

La vitesse radiale de  $P$  par rapport à  $P_0$  est :

$$v_r(t) = \dot{a} g(r) = H(t) d_{\text{propre}}(t). \quad (20)$$

où la fonction  $H = \dot{a}/a$ , est la constante de Hubble (bien qu'elle dépende du temps). Sa valeur actuelle ( $H(t_0) = H_0$ ) est connue avec une précision assez faible :

$$50 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1} \leq H_0 \leq 80 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1} ;$$

nous utiliserons principalement le paramètre  $h$  défini par :

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}}.$$

*Redshift.* En pratique, on parle des distances entre objets en utilisant une grandeur directement observable : le *redshift* (décalage vers le rouge). En 1929, Edwin Hubble présente ses mesures de distances d'objets qu'il appelle "nébuleuses" (il s'agissait en fait de galaxies) et montre qu'elles s'éloignent les unes des autres dans toutes les directions (Hubble, 1929). Il a en effet remarqué que les spectres de ces objets étaient presque systématiquement décalés vers le rouge ; l'interprétation de ce résultat en terme d'effet Doppler montre que ces objets

s'éloignent de celui qui les observe. Il a montré plus tard non seulement que ces objets étaient des galaxies mais aussi que le *redshift* d'une galaxie est proportionnel à sa distance à l'observateur. L'interprétation en terme d'effet Doppler n'est valable qu'aux faibles distances, auxquelles on a approximativement :

$$z \sim \frac{v}{c} = \frac{Hd}{c}. \quad (21)$$

D'une façon générale, le *redshift*  $z$  se définit de la manière suivante. Considérons un observateur situé en  $O$  à l'instant  $t_0$ . Cet observateur est l'origine du système de coordonnées. Considérons une source lumineuse se trouvant à la coordonnée comobile fixe  $r$ . L'observateur reçoit de cette source à l'instant  $t_0$  une onde dont la longueur est  $\lambda_0$ . Cette onde a été émise par la source à l'instant  $t_e < t_0$  avec une longueur d'onde  $\lambda_e$ . L'onde lumineuse émise se propage suivant une géodésique (voir Eq. 1), on a donc :

$$ds = 0 \implies \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \kappa r'^2}} = g(r). \quad (22)$$

La crête suivante de l'onde a été émise par la source à  $t_e + \delta t_e$ ; elle arrive à l'observateur à l'instant  $t_0 + \delta t_0$ . Comme source et observateur sont immobiles l'un par rapport à l'autre (en terme de coordonnée comobile  $r$ ), on a :

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = g(r) = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}.$$

Pour les ondes lumineuses, les intervalles de temps  $\delta t_e$  et  $\delta t_0$  sont très petits, de l'ordre de  $10^{-14}$  s, de sorte que l'on peut considérer que le facteur d'échelle reste approximativement constant sur de si courtes durées<sup>6</sup>. On obtient ainsi :

$$\frac{\delta t_0}{a_0} = \frac{\delta t_e}{a_e}, \quad (23)$$

soit, avec  $\delta t_e = 1/\nu_e$  et  $\delta t_0 = 1/\nu_0$  ( $\nu_e$  et  $\nu_0$  sont les fréquences émises et reçues respectivement),

$$\nu_e a_e = \nu_0 a_0$$

ou encore

$$\frac{a_e}{\lambda_e} = \frac{a_0}{\lambda_0}.$$

Ce qui nous donne la définition du *redshift* :

$$\boxed{1 + z = \frac{a_0}{a_e}} \quad \text{ou} \quad \boxed{z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}}. \quad (24)$$

Les Eqs. 20 et 21 reliant la vitesse d'un objet avec sa distance montrent que plus un objet est loin d'un observateur donné et plus il s'en éloigne vite; si cet objet est suffisamment loin, il peut même s'éloigner de l'observateur avec une vitesse supérieure à celle de la lumière. Le

---

6. On montre que cette approximation est correcte si  $\delta t_e \ll 2/H(t_e)$  soit  $\delta t_e \ll 2t_U/\alpha$  si  $a(t) \propto t^\alpha$ .  $t_U$  est ici l'âge de l'Univers.  $\delta t_e \sim 10^{-14}$  s donc l'approximation est valable dès le début de l'Univers, toujours dans l'hypothèse où l'on a  $a(t) \propto t^\alpha$ .

principe de relativité n'est cependant pas violé puisque cette vitesse ne correspond pas à un échange d'information physique. La FIG. 4 montre la corrélation entre la vitesse de supernovæ (on a en fait accès directement à leur *redshifts* mais ceux-ci étant faibles, on peut les associer à une vitesse par  $v \sim cz$ ) et leur distance de luminosité (voir sa définition page 19). Pour des objets proches, comme ces supernovæ, la distance de luminosité et la distance propre sont pratiquement identiques. Les données proviennent de Hamuy et al. (1996).

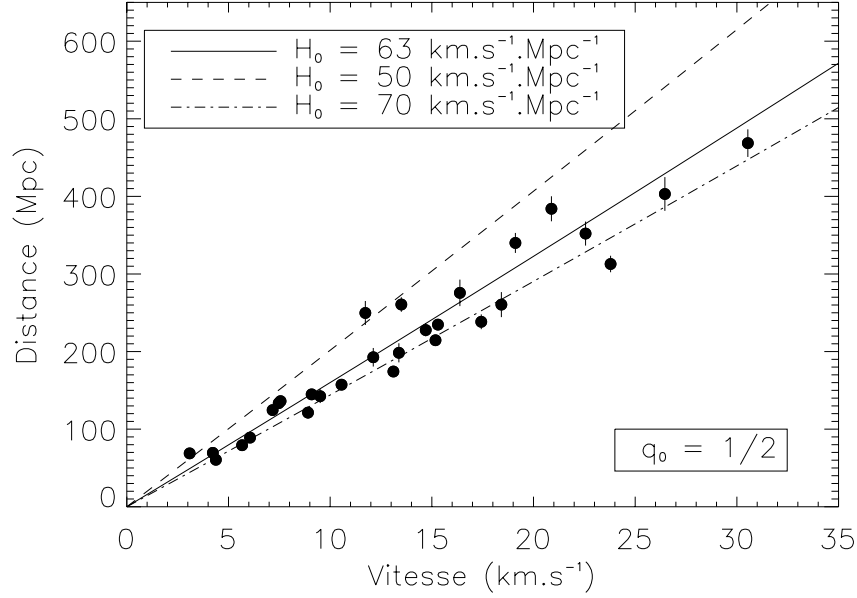


FIGURE 4 – **Loi de Hubble**. La vitesse des supernovæ en abscisse est en fait le produit du *redshift*  $z$  (voir Eq. 24) par la vitesse de la lumière  $c$ . Cette approximation est relativement correcte pour les  $z$  faibles (c'est-à-dire associer le *redshift* d'un objet à un effet Doppler). Il existe bien une constante de proportionnalité entre la distance de luminosité et la vitesse, cette constante est  $1/H_0$  où  $H_0$  est la constante de Hubble. Trois droites sont superposées aux valeurs expérimentales pour différentes valeurs de  $H_0$ . La valeur de  $63 \pm 8 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$  est le meilleur fit de Hamuy et al. (1996). Dans ces trois cas, le paramètre de décélération  $q_0$  (voir page 18) est  $1/2$ .

### 1.3.4 Paramètres cosmologiques

Si l'Univers était spatialement plat et sans constante cosmologique, l'équation de Friedmann 15 prendrait la forme :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 \frac{\rho}{\rho_c},$$

ce qui définit la densité critique :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

La densité critique actuelle,  $\rho_{c0}$ , est égale à

$$\rho_{c0} \sim 10^{-29} h^2 \text{ g.cm}^{-3}, \quad (25)$$



équivalent à 11 protons par mètre cube environ. Si  $\rho > \rho_c$ , l'Univers est fermé à courbure positive, et ouvert à courbure négative dans le cas contraire. On note habituellement  $\Omega_m$  le rapport  $\rho/\rho_c$  de la densité d'énergie (matière *et* rayonnement) à la densité critique.

D'une façon plus générale, en présence de courbure et de constante cosmologique, on a :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 \frac{\rho}{\rho_c} - H^2 \frac{\kappa}{a^2 H^2} + H^2 \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (26)$$

On introduit alors les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Omega_\kappa &= \frac{\kappa}{a^2 H^2} \\ \text{et } \Omega_\Lambda &= \frac{\Lambda}{3H^2}, \end{aligned}$$

de sorte que l'équation de Friedmann devient :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 (\Omega_m - \Omega_\kappa + \Omega_\Lambda)$$

soit :

$$\boxed{\Omega_\kappa = \Omega_m + \Omega_\Lambda - 1}. \quad (27)$$

La courbure de l'Univers  $\Omega_\kappa$  est donc directement liée à la densité de matière et de rayonnement  $\Omega_m$  et à la constante cosmologique  $\Omega_\Lambda$ . On voit clairement que si  $\Omega_m + \Omega_\Lambda > 1$  alors l'Univers est fermé ( $\kappa = 1$ ), si  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$  l'Univers est plat ( $\kappa = 0$ ) et ouvert si  $\Omega_m + \Omega_\Lambda < 1$  ( $\kappa = -1$ ). La connaissance de la somme  $\Omega_m + \Omega_\Lambda$  nous permettra de prédire l'avenir de l'Univers. On peut exprimer ces équations en fonction du *redshift*. Il suffit pour cela d'écrire les dépendances en  $z$  des différents  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \Omega_m = \Omega^R + \Omega^{\text{NR}} = \frac{H_0^2}{H^2} (\Omega_0^R (1+z)^4 + \Omega_0^{\text{NR}} (1+z)^3) \\ \Omega_\Lambda = \frac{H_0^2}{H^2} \Omega_{0\Lambda} \\ \Omega_\kappa = \frac{H_0^2}{H^2} (1+z)^2 \Omega_{0\kappa} \end{cases} \quad (28)$$

où l'exposant R représente la contribution des espèces relativistes à la densité de matière et NR représente celle des espèces non relativistes. Les contributions relativistes et/ou non relativistes de la matière noire sont incluses dans ces  $\Omega$ . Le terme  $\Omega_0^R$  apparaît avec un facteur  $(1+z)^4$  car la densité d'énergie de particules relativistes est proportionnelle à la puissance quatrième de leur température, elle-même inversement proportionnelle au facteur d'échelle  $a$  (voir page 32). De même, le terme  $\Omega_0^{\text{NR}}$  apparaît avec un facteur  $(1+z)^3$  car la densité d'énergie d'une espèce non-relativiste est tout simplement proportionnelle à l'inverse du volume comobile  $1/a^3$ . Notons que pour des *redshifts* grands, la densité d'énergie des particules relativistes domine, suivie par celle des particules non-relativistes. Il existe un *redshift* pour lequel ces deux densités sont égales, on l'appelle *redshift* d'égalité matière-rayonnement et nous le notons  $z_{\text{eq}}$ . La densité de matière non-relativiste est donnée par :

$$\rho_m = \rho_{c0} (1+z)^3 \Omega_0^{\text{NR}} \quad \text{avec} \quad \rho_{c0} \sim 1.88 \times 10^{-26} h^2 \text{ kg.m}^{-3},$$

tandis que celle des espèces relativistes s'écrit :

$$\rho_r = \frac{\pi^2}{30} \frac{k^4}{\hbar^3 c^3} g_*(T) T^4 = \rho_{0r} \frac{g_*(T)}{g_*(T_0)} (1+z)^4 \quad \text{avec} \quad \rho_{0r} \sim 4.64 \times 10^{-31} \text{ kg.m}^{-3},$$

où la fonction  $g_*(T)$ , définie page 32, est égale au nombre effectif de degrés de liberté (le facteur de spin) des espèces relativistes lorsque la température de l'Univers était égale à  $T$  (ici, on n'a considéré que la contribution du rayonnement fossile, en oubliant les neutrinos fossiles).  $z_{\text{eq}}$  s'obtient facilement en égalant ces deux densités d'énergie, et on aboutit à :

$$\boxed{1 + z_{\text{eq}} = \frac{\rho_r}{\rho_m} \sim 4 \times 10^4 \Omega_0^{\text{NR}} h^2}.$$

Pour des valeurs standard de  $\Omega_0^{\text{NR}}$  ( $\sim 0.3$ ) et de  $h$  ( $\sim 0.7$ ), on trouve  $z_{\text{eq}} \sim 5\,800$ . Un calcul plus précis en prenant en compte les neutrinos donnerait  $z_{\text{eq}} \sim 3\,500$ .

Les Eqs. 28 nous permettent d'écrire l'équation de Friedmann sous la forme :

$$\begin{aligned} H^2 &= H_0^2 \times \underbrace{(\Omega_0^{\text{R}}(1+z)^4 + \Omega_0^{\text{NR}}(1+z)^3 - \Omega_{0\kappa}(1+z)^2 + \Omega_{0\Lambda})}_{E(z)^2} \\ &= H_0^2 \times E(z)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

Cette expression est exacte et a le mérite de faire apparaître explicitement toutes les densités d'énergie à travers les  $\Omega$ . On utilise également un autre paramètre, noté  $q$ , qui quantifie le taux d'accélération ou de décélération de l'Univers. Sa valeur actuelle,  $q_0$ , s'exprime simplement en fonction des paramètres cosmologiques. Il est défini par l'équation :

$$a(t) = a_0 \left( 1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \right) \quad (30)$$

où  $t$  est proche de  $t_0$  et avec :

$$q_0 = q(t = t_0) \hat{=} - \frac{\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}(t_0)^2} a_0.$$

Son expression en fonction des paramètres cosmologiques s'obtient en écrivant l'équation de Friedmann 16 à notre époque ( $t = t_0$ ) :

$$\frac{\ddot{a}_0}{a_0} = -\frac{4\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3}$$

puisque notre Univers actuel n'est plus dominé par le rayonnement ( $p \sim p_{\text{matière}} = 0$ ). On a donc :

$$\frac{\ddot{a}_0}{a_0} = -\frac{1}{2} H_0^2 \Omega_{m0} + \frac{\Lambda}{3} \quad \text{avec} \quad \Omega_{m0} \sim \Omega_0^{\text{NR}},$$

soit :

$$\boxed{q_0 = \frac{1}{2} \Omega_0^{\text{NR}} - \Omega_{\Lambda 0}}. \quad (31)$$

Cette expression montre que la matière tend à freiner l'expansion alors qu'une constante cosmologique positive tend à l'accélérer.

Un des buts de la cosmologie est de mesurer les paramètres cosmologiques que nous venons de présenter ; voici un bref état des lieux :

- **la constante de Hubble  $H_0$** . Sa mesure est très difficile à cause de nombreux biais systématiques. L'intervalle de valeur communément admis pour  $H_0$  est  $[65 - 75] \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$  (voir Madore et al. (1999) par exemple).
- **la densité de matière  $\Omega_m$** . En observant la dynamique des galaxies et des amas de galaxies, on peut donner des contraintes sur la quantité de matière nécessaire pour reproduire une telle dynamique. Les estimations actuelles donnent une valeur de  $\Omega_m$  de l'ordre de 0.3, et ceci en utilisant des méthodes indépendantes; voir Carlberg et al. (1996) pour la méthode basée sur la dispersion de vitesse dans les amas et Ma et al. (1998) pour celle sur le superamas Corona Borealis, par exemple.
- **la constante cosmologique  $\Omega_\Lambda$** . Récemment, Riess et al. (1998) ont montré que  $\Omega_\Lambda > 0$  à 99% de niveau de confiance, en supposant que  $\Omega_m > 0.2$ . De même, Perlmutter et al. (1999) ont trouvé que  $\Omega_\Lambda = 0$  était exclu à 99% (leur meilleur fit donne  $\Omega_m = 0.3$  et  $\Omega_\Lambda = 0.7$  en supposant un Univers critique et  $\Omega_m = 0.73$  et  $\Omega_\Lambda = 1.32$  sinon, voir FIG. 5). Leur étude est basée sur 42 supernovæ de type Ia de grand *redshift* et suppose que ces supernovæ n'évoluent pas (c'est-à-dire qu'une supernova proche à petit  $z$  a les mêmes caractéristiques qu'une autre à grand  $z$ ). Notons que Riess et al. (1999) ont trouvé un effet d'évolution des supernovæ qui pourrait modifier ces résultats. D'autre part, la présence de poussières dans le milieu intergalactique pourrait en partie expliquer les résultats des supernovæ sans faire intervenir de constante cosmologique, mais cela reste encore très incertain (Aguirre, 1999).
- **le paramètre de décélération  $q_0$** . Perlmutter et al. (1999) trouvant une constante cosmologique positive, leur  $q_0$  est négatif (puisque l'Univers est dans ce cas en accélération) et égal à  $q_0 = \Omega_m/2 - \Omega_\Lambda = -0.55$ . Là encore, en supposant qu'il n'y a pas d'évolution des supernovæ (c'est-à-dire qu'elles sont des chandelles standard) et qu'il n'y a pas d'effet systématique comme la poussière.

### 1.3.5 Distances et temps écoulé

Nous avons rencontré jusque là la distance propre, qui n'est pas une observable physique. Les seules observables sont les distances angulaire et de luminosité. Celles-ci dépendent des paramètres cosmologiques et nous allons voir que leur étude permet de contraindre ces derniers. Pour cela, nous allons établir les expressions de ces distances à partir de la fonction  $E(z)$  de l'Eq. 29 :

$$E(z) = (\Omega_0^R(1+z)^4 + \Omega_0^{NR}(1+z)^3 - \Omega_{0\kappa}(1+z)^2 + \Omega_{0\Lambda})^{1/2}.$$

En partant de l'équation de propagation des photons ( $ds = 0$ ), on peut démontrer l'équation suivante :

$$\int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \kappa r'^2}} = \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}.$$

Le membre de gauche de cette équation est intégrable analytiquement, ce qui nous permet d'en déduire l'expression donnant  $r$  :

$$r = S \left( \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right), \quad (32)$$

où la fonction  $S$  est l'identité si  $\kappa = 0$ , sinus si  $\kappa = 1$  et sinus hyperbolique si  $\kappa = -1$ . Cette équation est *exacte* et *complètement générale*, aucune approximation ni aucune supposition sur les paramètres cosmologiques n'ont été faites.

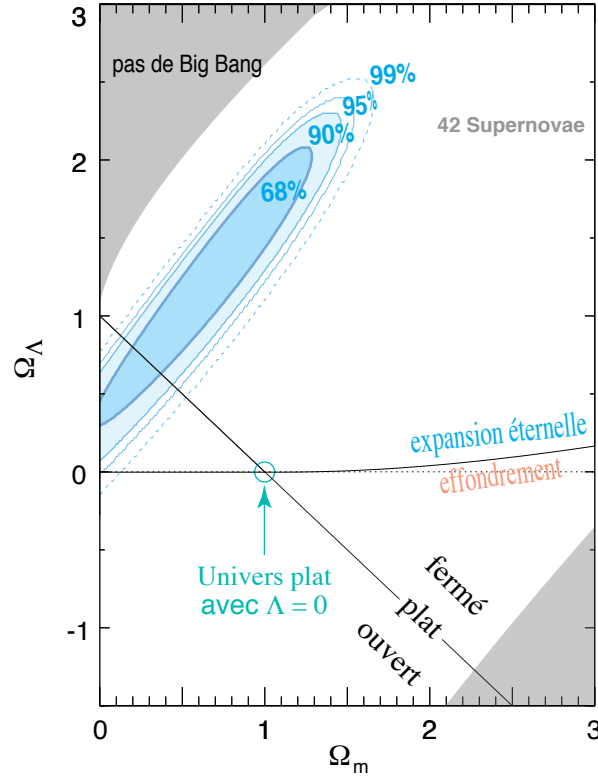


FIGURE 5 – Isocontours obtenus à partir de 42 supernovæ de grand  $z$ . Les modèles avec  $\Omega_\Lambda = 0$  sont rejetés avec un niveau de confiance de 99%. Le cas d’un Univers plat mène à  $\Omega_m = 0.3$  et  $\Omega_\Lambda = 0.7$ . La figure est adaptée de Perlmutter et al. (1999).

Pour des *redshifts* proches de 0 caractérisant des objets proches de nous, l’intégrale sur  $z$  s’écrit, à l’ordre 2 :

$$\int_0^z \frac{dz'}{E(z')} = z - \frac{4\Omega_0^R + 3\Omega_0^{NR} - 2\Omega_{0\kappa}}{4} z^2 + o(z^2). \quad (33)$$

**Distance angulaire.** La distance angulaire peut servir à discriminer entre plusieurs modèles cosmologiques (voir FIG. 6). Sa définition, comme celle de la distance de luminosité, est issue de ce que l’on observerait dans un Univers euclidien. On attribue à un objet de dimension physique  $d\ell$  vu sous un angle  $d\theta$  une distance dite “distance angulaire” telle que :

$$D_{\text{ang}} = \frac{d\ell}{d\theta}.$$

On peut aussi la comprendre comme étant la distance apparente de deux objets se trouvant au même *redshift*. La taille physique propre de l’objet observé se calcule en considérant les coordonnées d’espace-temps des extrémités de l’objet et celles de l’observateur présentées dans la FIG. 7 ; on trouve  $d\ell = a(t)r d\theta$ .

On obtient donc :

$$D_{\text{ang}} = a(t)r = \frac{a_0 r}{1+z}, \quad (34)$$

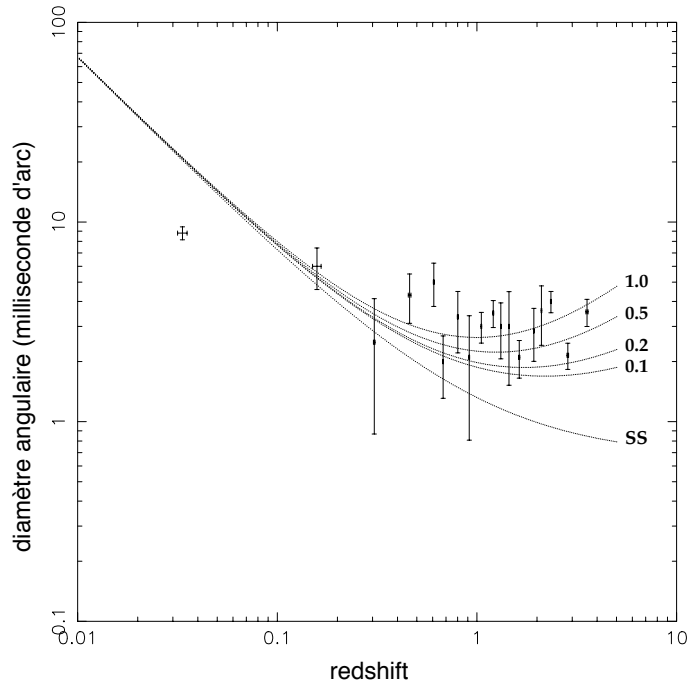


FIGURE 6 – **Diagramme diamètre angulaire/*redshift***. Élaboré à partir de radio-sources compactes regroupées (de 18 à 19 sources par point sur le graphe) pour des *redshifts* allant de 0.011 à 4.72. Différents modèles théoriques sont tracés, avec des paramètres  $q_0$  différents (voir page 18). Le modèle de l'état stationnaire (courbe indiquée par SS, pour “Steady State”) est nettement rejeté. La figure est adaptée de Gurvits et al.(1998).

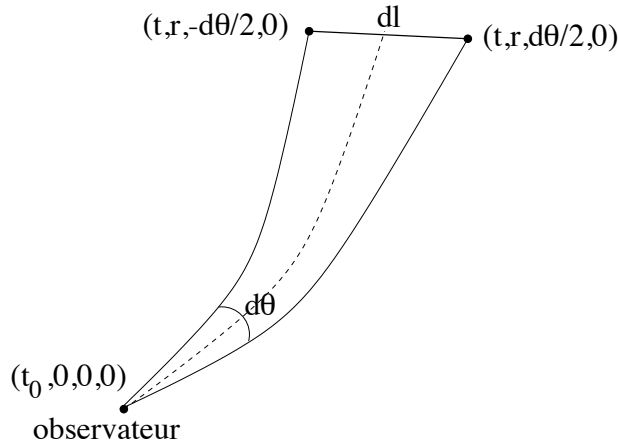


FIGURE 7 – **Calcul de la distance angulaire**. Dans un Univers euclidien, cette distance est tout simplement  $dl/d\theta$ . Nous prolongeons cette définition dans un Univers courbe. Les coordonnées indiquées sont celles des variables  $(t, r, \theta, \phi)$  de la métrique.

$r$  pouvant être calculé à partir de l'Eq. 32. Pour des objets proches,  $z \ll 1$ , et on trouve que quelque soit la valeur de  $\kappa$  (car  $\sin x \sim x$  et  $\sinh x \sim x$ )<sup>7</sup> :

$$D_{\text{ang}} = \frac{cz}{H_0} + o(z) \quad (\text{on retrouve ici la loi de Hubble, avec } v \sim cz).$$

7. Ces relations valables pour des distances proches montrent que l'on ne peut tester la courbure de l'Univers que sur de grandes distances.

Le diamètre angulaire quant à lui devient, pour  $z \ll 1$  :

$$d\theta = \frac{d\ell}{D_{\text{ang}}} \propto \frac{1}{z},$$

comportement que l'on observe dans la FIG. 6 : moins un objet de taille fixée est proche de nous, plus son diamètre angulaire diminue ; c'est un résultat auquel nous sommes habitués. Par contre, pour de grandes valeurs de  $z$ , l'intégrale sur  $E(z)$  de l'Eq. 32 converge vers une limite finie donc :

$$D_{\text{ang}} \propto \frac{1}{1+z} \quad \text{d'où} \quad d\theta \propto 1+z,$$

ce que l'on observe également dans la FIG. 6. Il est ici surprenant de prime abord que des objets de plus en plus lointains nous apparaissent avec des diamètres angulaires de plus en plus grands. Ce comportement apparemment paradoxal s'explique de la façon suivante : un objet ayant un très grand *redshift* a émis la lumière que nous recevons il y a très longtemps, c'est-à-dire lorsque l'Univers était beaucoup plus petit que maintenant ; l'observateur que nous sommes se trouvait donc à une distance beaucoup plus petite de la source, de sorte qu'elle nous apparaît avec un grand diamètre angulaire.

**Distance de luminosité.** Considérons un objet de luminosité absolue  $L_e$  (en  $\text{W.s}^{-1}$ ) éclairant un récepteur situé à la coordonnée comobile  $r$  par rapport à lui et à  $t = t_0$ . La source envoie de la lumière avec le flux :

$$\phi_e = L_e \frac{d\Omega_e}{4\pi}$$

où  $d\Omega_e$  est l'angle solide sous lequel la source voit le récepteur. La surface réceptrice est donc telle que :

$$dS = r^2 a_0^2 d\Omega_e. \quad (35)$$

La lumière émise a été dégradée car les photons ont été "redshiftés" par l'expansion de l'Univers et sont reçus avec une période plus longue, donc le flux d'énergie émis par la source pendant l'intervalle de temps  $dt_e$  est lié à celui reçu par l'observateur pendant l'intervalle de temps  $dt_0$  selon :

$$\frac{dE_0}{dt_0} = \frac{dE_0}{dE_e} \frac{dE_e}{dt_e} \frac{dt_e}{dt_0} = \frac{dE_e}{dt_e} \frac{1}{(1+z)^2},$$

où l'on a utilisé l'Eq. 23. On en déduit la relation entre les luminosités :

$$L_0 = \frac{L_e}{(1+z)^2}.$$

Le flux observé est donné quant à lui par :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= L_0 \frac{d\Omega_e}{4\pi} = \frac{\phi_e}{(1+z)^2} \\ &= \frac{L_e}{(1+z)^2} \frac{d\Omega_e}{4\pi} \equiv L_e \frac{dS}{4\pi D_L^2}. \end{aligned}$$

Cette dernière relation *définit* la distance de luminosité. Étant donnée la relation 35, on peut l'écrire de la façon suivante :

$$\boxed{D_L = (1+z) a_0 r = (1+z)^2 D_{\text{ang}}}. \quad .$$

Les distances propre, angulaire et de luminosité représentent donc la même grandeur physique pour  $z = 0$ .

**Temps écoulé.** Nous voulons mesurer le temps écoulé  $t_0 - t(z)$  correspondant à un objet se trouvant à un *redshift*  $z$ . Pour cela, nous partons de l'équation de Friedmann en fonction de  $E(z)$  :  $\dot{a}/a = H_0 E(z)$ . En séparant les variables, on obtient :

$$t_0 - t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')E(z')}. \quad (36)$$

Le développement de cette expression pour  $z \ll 1$  donne :

$$t_0 - t(z) = \frac{1}{H_0} \left( z - \frac{4\Omega_0^R + 3\Omega_0^{\text{NR}} - 2\Omega_{0\kappa} + 2}{4} z^2 + o(z^2) \right).$$

L'expression analogue obtenue à partir du développement mathématique formel du facteur d'échelle (Eq. 30) s'écrit :

$$t_0 - t(z) = \frac{1}{H_0} \left( z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 + o(z^2) \right).$$

En identifiant ces deux dernières expressions, on obtient :

$$1 + \frac{q_0}{2} = \Omega_0^R + \frac{3}{4}\Omega_0^{\text{NR}} - \frac{1}{2}\Omega_{0\kappa} + \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad q_0 = \Omega_0^R + \frac{1}{2}\Omega_0^{\text{NR}} - \Omega_{0\Lambda},$$

résultat identique à ce que nous avons trouvé page 18 où l'on avait négligé  $\Omega_0^R$ .

On peut calculer par exemple à quel moment  $t_{\text{eq}}$  a eu lieu l'égalité matière-rayonnement. Il suffit pour cela d'écrire l'Eq. 36 en prenant comme limites  $t_{\text{eq}}$  et  $z_{\text{eq}}$  :

$$t_{\text{eq}}(z = z_{\text{eq}}) - 0(z = +\infty) = \frac{1}{H_0} \int_{z_{\text{eq}}}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z)E(z)}.$$

Il est légitime dans cette intégrale de remplacer  $E(z)$  par :

$$E(z) = \left( \Omega_0^{\text{NR}} \frac{(1+z_{\text{eq}})^3}{(1+z_{\text{eq}})^4} (1+z)^4 \right)^{1/2}$$

puisque l'Univers est dominé par le rayonnement entre  $z = +\infty$  et  $z = z_{\text{eq}}$  et que pour  $z = z_{\text{eq}}$ , on a  $\Omega_0^R(1+z_{\text{eq}})^4 = \Omega_0^{\text{NR}}(1+z_{\text{eq}})^3$ . Le calcul se fait ensuite facilement et on trouve :

$$t_{\text{eq}} = \frac{1}{2H_0} \Omega_0^{\text{NR}-1/2} (1+z_{\text{eq}})^{-3/2} \sim 10^3 (\Omega_0^{\text{NR}} h^2)^{-2} \text{ ans} \sim 10^{10} (\Omega_0^{\text{NR}} h^2)^{-2} \text{ s}. \quad (37)$$

Pour  $\Omega_0^{\text{NR}} = 0.3$  et  $h = 0.7$ , on trouve  $t_{\text{eq}} = 46\,000$  ans. L'égalité matière-rayonnement a donc eu lieu très tôt, relativement à son âge estimé, dans l'histoire de l'Univers.

### 1.3.6 Horizons et rayon de Hubble.

Dans la littérature, on rencontre souvent les termes d'horizon des "particules" et d'horizon des "événements". Cette distinction est superflue puisqu'il s'agit exactement de la même chose mais regardée soit vers le passé ou vers le futur, respectivement.

**Horizon des particules.** La vitesse de la lumière est finie, sa valeur est fixée par convention<sup>8</sup>. Une particule se déplaçant à cette vitesse va donc parcourir en un *temps fini* une *distance finie*. Notre vision de l'Univers est donc limitée (dans les modèles d'Univers que nous avons vus précédemment) : nous ne pouvons pas voir des régions se trouvant à une distance supérieure au produit de la vitesse de la lumière par l'âge de l'Univers. Il est assez naturel d'employer le mot *horizon* pour qualifier la limite au-delà de laquelle nous ne pouvons plus rien voir. Formellement, un observateur situé en  $r = 0$  à  $t = t_0$  ne pourra recevoir de signaux que de points situés à une distance comobile  $r$  telle que  $r < r_1$ , où  $r_1$  est la coordonnée comobile pour laquelle le signal émis à  $t = t_1$  atteint l'observateur à  $t = t_0$  (voir Weinberg (1972)). On détermine  $r_1$  à partir de la formule 22 :

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

Si l'intégrale sur le temps diverge dans la limite  $t_1 \rightarrow 0$  (cette limite correspond à la limite  $a(t) \rightarrow 0$ , c'est au moment du *Big-Bang*), alors l'observateur a déjà reçu des signaux de n'importe quel point dans l'Univers (c'est le cas de l'Univers de de Sitter où le facteur d'échelle a une croissance exponentielle), voir la FIG. 8. Par contre, si cette intégrale est

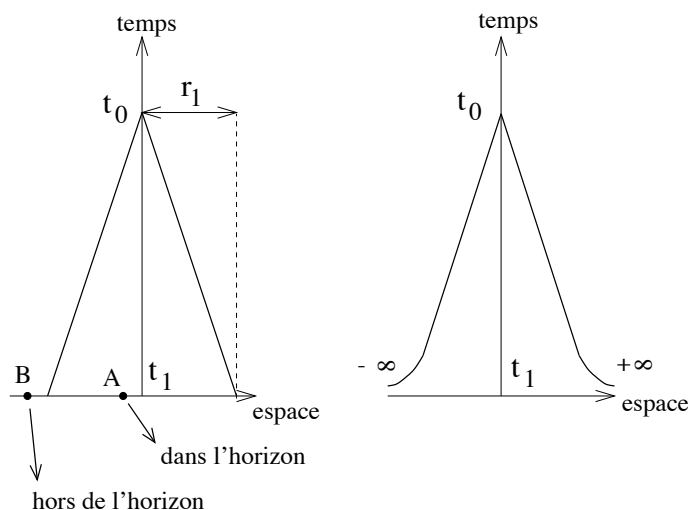


FIGURE 8 – **Horizon des particules.** Ces deux diagrammes d'espace-temps montrent comment évolue l'horizon des particules pour un observateur situé en  $r = 0$  au temps  $t_0$ . Ces dessins supposent un Univers plat ( $\kappa = 0$ ) mais cette restriction ne change rien aux conclusions. Si l'intégrale 38 converge lorsque  $t_1$  tend vers 0 (figure de gauche) alors l'horizon est fini car l'intersection du cône de lumière passé de l'observateur coupe l'hyperplan d'espace en  $t = 0$  en des points situés à une distance finie de l'origine (par exemple le point A fait partie de cet horizon). Tout point situé hors de cet horizon (comme le point B) n'a pas encore communiqué avec l'observateur, il est donc pour le moment hors de son horizon. Par contre, si l'intégrale diverge (figure de droite), tous les points ont envoyé de l'information à l'observateur au temps  $t_0$ .

convergente quand  $t_1 \rightarrow 0$  — cela se produit pour  $a(t) \propto t^{1/2}$ (radiatif) ou  $2/3$ (matériel), voir section 1.3.2 — alors l'observateur ne pourra recevoir de signal que de points se trouvant à

8.  $c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$



l'intérieur d'une sphère de rayon comobile  $r_{\text{Hor}}(t_0)$  défini par :

$$\int_0^{r_{\text{Hor}}(t_0)} \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} = \int_{t_1 \rightarrow 0}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (38)$$

La distance propre de cet horizon est donc :

$$d_{\text{Hor}}(t_0) = a(t_0) r_{\text{Hor}}(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}.$$

*L'horizon des particules est donc directement lié à notre cône de lumière passé.*

**Horizon des événements.** Nous venons de voir qu'il pouvait exister des particules que nous ne pouvons voir. Dans certains modèles cosmologiques, il existe même des événements que nous ne pouvons pas voir. Un événement se produisant à  $r = r_1$  et à  $t = t_1$  deviendra visible pour l'observateur à  $r = 0$  à l'instant  $t$  donné par :

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} = \int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')}.$$

Si l'intégrale en  $t'$  diverge pour  $t \rightarrow t_{\text{max}}$  ( $t_{\text{max}}$  est  $+\infty$  si l'Univers est ouvert ou plat ou une valeur finie définie comme l'instant du prochain effondrement quand  $a(t) \rightarrow 0$  dans le cas d'un Univers fermé) alors il sera possible de recevoir des signaux de tous les événements de l'Univers pourvu d'attendre suffisamment longtemps. Par contre, si cette intégrale converge, on ne recevra de signaux que d'événements tels que :

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} \leq \int_{t_1}^{t_{\text{max}}} \frac{dt'}{a(t')}.$$

Ces événements, visibles tôt ou tard, constituent l'horizon des événements. Une symétrie par rapport à l'axe d'espace passant par l'observateur en  $t_0$  de la FIG. 8 donne la figure associée à l'horizon des événements. On rencontre aussi cet horizon dans les trous noirs.

**Rayon de Hubble.** La loi de Hubble de l'Eq. 20 montre que plus un objet comobile est lointain, plus il s'éloigne vite, par rapport à un observateur comobile donné. La sphère de Hubble est la distance atteinte par un objet comobile se déplaçant à la vitesse de la lumière. En appliquant la relation de Hubble :  $v = H(t) d_{\text{propre}}(t)$  avec  $v = c$ , on obtient :

$$d_{\text{Hubble}}(t) = \frac{c}{H(t)} = c \frac{a}{\dot{a}}.$$

Cette distance est aussi la distance propre parcourue par la lumière pendant le temps de Hubble (c'est le temps caractéristique d'expansion) défini par :

$$\tau_H = \frac{1}{H}. \quad (39)$$

La sphère de Hubble et l'horizon des particules sont deux quantités distinctes. La sphère de Hubble définie à l'instant  $t$  ne dépend que du moment  $t$  alors que l'horizon des particules dépend de l'histoire passée de l'observateur *jusqu'à* l'instant  $t$ . Ainsi, un objet peut se trouver

hors de la sphère de Hubble d'un observateur mais à l'intérieur de son horizon des particules. De plus, une fois dans l'horizon des particules d'un observateur, un objet ne peut plus en sortir, contrairement à la sphère de Hubble : un objet peut être à l'intérieur à un certain instant, en sortir plus tard et y entrer à nouveau encore plus tard (c'est ce qui se produit lors de l'inflation). La sphère de Hubble est parfois appelée *horizon cosmologique effectif* car c'est la grandeur pertinente dans les processus physiques pouvant se produire à une échelle donnée ; si une structure a une dimension caractéristique supérieure au rayon de Hubble, seuls les effets d'expansion de l'Univers feront évoluer la structure à travers la métrique. Si sa taille est inférieure, ce sont les processus causaux de la physique qui la feront évoluer. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces discussions plus tard, quand nous mettrons des perturbations dans l'Univers pour créer des galaxies (voir page 55).

Dans ces premières pages, nous avons supposé que la gravitation était la force dominante à grande échelle, régissant l'évolution de l'Univers. Nous avons choisi — et c'est le seul choix pertinent à ce jour — la relativité générale pour la décrire. En adhérant au principe cosmologique, nous avons obtenu la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker dans laquelle est apparu le facteur d'échelle  $a$  dépendant du temps. La résolution des équations d'Einstein (Eq. 10) nous a donné deux équations différentielles simples en  $a$ , ce sont les équations de Friedmann (Eqs. 15 et 16). Nous avons montré ensuite qu'il existait une solution correspondant à un facteur d'échelle  $a$  constant, c'est-à-dire donnant un Univers statique — ceci grâce à la constante cosmologique — mais il s'avère que cette solution est instable. Le premier résultat fondamental est donc que l'Univers évolue. Nous avons étudié ensuite quelques unes de ses propriétés : la loi de Hubble, le *redshift* et les différentes définitions de la distance. Nous avons introduit des quantités très pertinentes pour synthétiser le contenu de l'Univers et trouvé une relation entre elles : ce sont les paramètres cosmologiques, dont la mesure constitue l'une des tâches principales de la cosmologie observationnelle. Il est maintenant acquis que l'Univers est en expansion et les résultats des supernovæ de type Ia indiquent que cette expansion est accélérée. La section suivante décrit le modèle du *Big-Bang* ; nous allons étudier le comportement de particules dans un Univers dynamique et définir la *température de l'Univers*. Nous verrons qu'elle décroît avec le temps, donc que l'Univers était plus chaud dans le passé.

## 1.4 Le modèle du *Big-Bang*

### 1.4.1 Historique et propriétés

**Cinématique et expansion.** Nous allons commencer par établir des résultats essentiels pour comprendre comment se fait l'évolution de photons ou de particules dans l'Univers. La première étape est d'étudier la cinématique de particules *libres* (massives ou de masse nulle) ; la tri-impulsion  $\vec{p}$  d'une particule libre dans l'Univers en expansion ne reste pas constante. Pour le montrer, nous allons tout d'abord reprendre l'équation de la géodésique, sous une forme un peu différente de l'Eq. 4 :

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu u^\nu u^\alpha = 0.$$

On peut exprimer la quadri-vitesse d'une particule en fonction de sa tri-vitesse  $v_i$  et de son facteur de Lorentz  $\gamma = 1/\sqrt{1 - |\vec{v}|^2}$ , avec  $|\vec{v}|^2 = h_{ij}v^i v^j$ ,  $h_{ij}$  étant la partie espace-espace de

la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (voir Kolb & Turner (1990)). On peut donc écrire  $u^\mu$  sous la forme :

$$u^\mu = (u^0, u^i) = (\gamma, \gamma v^i).$$

L'équation de la géodésique écrite pour  $\mu = 0$  est :

$$\frac{du^0}{ds} + \Gamma^0_{\nu\alpha} u^\nu u^\alpha = 0.$$

Or dans notre métrique,  $\Gamma^0_{\nu\alpha} = \Gamma^0_{ij} = (\dot{a}/a)h_{ij}$  (voir Eq. 5), les autres termes sont nuls. On a de plus  $h_{ij}u^i u^j = |\vec{u}|^2$ ; on peut donc écrire :

$$\frac{du^0}{ds} + \frac{\dot{a}}{a} |\vec{u}|^2 = 0.$$

La relation  $u^\mu u_\mu = 1$  nous donne  $u^{02} - |\vec{u}|^2 = 1$  d'où :

$$\frac{1}{u^0} \frac{d|\vec{u}|}{ds} + \frac{\dot{a}}{a} |\vec{u}| = 0. \quad (40)$$

Enfin, comme  $u^0 = dt/ds$ , on a finalement :

$$\frac{\frac{d|\vec{u}|}{dt}}{|\vec{u}|} = -\frac{\dot{a}}{a}$$

soit  $|\vec{u}| \propto \frac{1}{a}$  et  $\boxed{|\vec{p}| \propto \frac{1}{a}}$ . (41)

La norme du tri-moment d'une particule massive se propageant librement décroît en  $1/a$ .

**Remarque :** le facteur  $ds$  s'élimine grâce au terme  $1/u^0 = ds/dt$  dans l'Eq. 40; l'Eq. 41 reste donc valable pour les particules de masse nulle, caractérisées par  $ds = 0$ . Ainsi, pour les photons par exemple, on a :

$$E = h\nu = p^0 = |\vec{p}| \propto \frac{1}{a} \quad \text{ou encore} \quad \lambda \propto a. \quad (42)$$

On voit donc que la fréquence du rayonnement électromagnétique dans un Univers en expansion diminue proportionnellement au facteur d'échelle  $a$ , ou encore que son spectre est décalé vers les basses fréquences : c'est le décalage vers le rouge, le *redshift*, que nous avons déjà rencontré précédemment (voir Eq. 24 page 15). On voit mieux ici que le *redshift* cosmologique, celui qui est dû à l'expansion, n'est pas lié à un effet Doppler (voir FIG. 9).

Considérons maintenant une population de photons libres suivant une distribution de corps noir  $n(\nu, T)$  et émettant dans un volume  $V$ . L'écriture de la conservation du nombre de photons nous donne :

$$V_0 n_0(\nu_0, T_0) d\nu_0 = V n(\nu, T) d\nu,$$

où les grandeurs indexées par "0" sont celles considérées dans le système de référence de l'observateur. À cause de l'expansion, le volume et la fréquence des photons sont modifiés :

$$V_0 = V (1 + z)^3 \quad \text{et} \quad d\nu_0 = \frac{d\nu}{1 + z},$$

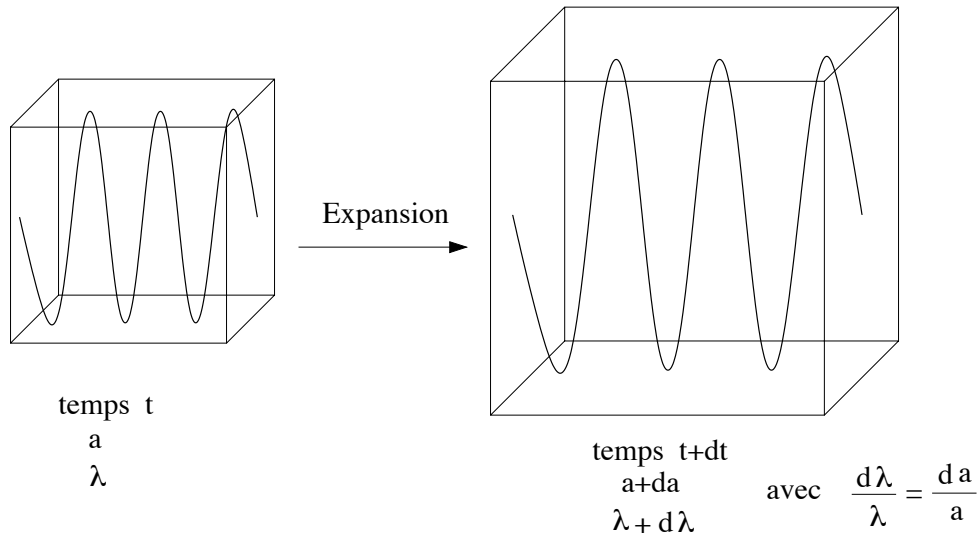


FIGURE 9 – **Illustration du redshift cosmologique.** Une boîte de volume  $V$  d’Univers se dilate au cours de l’expansion d’un facteur  $(1 + da/a)^3$ . Une onde de longueur d’onde  $\lambda$  est elle aussi dilatée mais d’un facteur  $1 + da/a$ .

et on obtient la relation suivante entre les fonctions de distribution :

$$n_0(\nu_0, T_0) = \frac{n(\nu, T)}{(1+z)^2} \quad \text{avec} \quad n(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

soit

$$n_0(\nu_0, T_0) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3 (1+z)^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \equiv \frac{8\pi \nu_0^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_0(1+z)}{kT}} - 1} = \frac{8\pi \nu_0^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_0}{kT_0}} - 1}.$$

Les photons gardent donc une distribution de corps noir mais leur température diminue :

$$\boxed{T_0 = \frac{T}{1+z}}. \quad (43)$$

L’Univers étant en expansion, le facteur d’échelle  $a$  augmente, la température d’un rayonnement de corps noir lié à l’expansion diminue.

En reprenant les résultats que nous avons démontré dans cette partie, la température ne cesse de décroître avec l’expansion de l’Univers. En remontant le cours du temps, la température augmente : l’Univers était plus chaud dans le passé. Le physicien et abbé Georges Lemaître s’inspira de ce résultat et constuisit entre 1927 et 1933 la première théorie du *Big-Bang* : c’était son hypothèse de l’atome primitif. Il pensait que l’Univers était issu d’un unique atome primordial qui pouvait se diviser pour engendrer toute la matière présente dans l’Univers. Il écrivit en 1920 : “*L’évolution de l’Univers ressemble à un feu d’artifice qui vient de s’éteindre. Il en reste quelques étincelles, des cendres et de la fumée, et debout sur ces cendres refroidies nous voyons les soleils qui s’éteignent lentement, et nous tentons de nous souvenir de la brillance évanouie de l’origine des mondes.*” Lemaître a eu du mal à défendre sa théorie, notamment à cause d’une remarque qu’Einstein lui adressa lors du congrès Solvay de 1927 : “*Vos calculs sont justes mais votre intuition physique est abominable.*” Cependant, une question restée sans réponse jusque là (celle de l’origine des éléments chimiques : d’où venaient-ils ? Pourquoi y a-t-il 90 % d’hydrogène, 9 % d’hélium et 1 % d’éléments plus

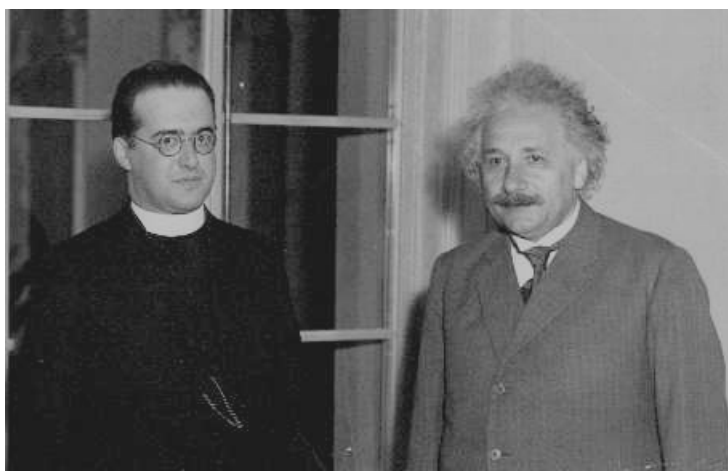


FIGURE 10 – Lemaître et Einstein vers les années 30.

lourds?) allait bientôt être élucidée dans le cadre de la théorie de l'atome primordial. Le physicien allemand Carl Friedrich von Weizsäcker montra en 1938 que les étoiles n'étaient pas suffisamment chaudes pour fusionner les éléments légers en éléments lourds. Il suggérait qu'une boule de feu primordiale extrêmement chaude aurait pu synthétiser ces éléments chimiques (les légers comme les lourds) : c'est la *nucléosynthèse primordiale* (celle des années 30-40). Dans le développement de son idée, il apparut qu'elle avait beaucoup de points communs avec la théorie de Lemaître. Par la suite, dans les années 40-50, George Gamow reprit le flambeau ; il montra que tous les éléments de l'Univers ont dû être formés dans les 20 minutes suivant le *Big-Bang* (Gamow, 1946; Alpher et al., 1948). Une des conclusions de ces travaux était que la grande majorité de la matière devait être de l'hydrogène, suivi par l'hélium, prédiction conforme aux observations. Une autre conclusion essentielle était la prédiction d'un fond de rayonnement de corps noir correspondant à une température de 5 K (Alpher & Herman (1948), suite à Gamow (1948)). C'est la première fois qu'une telle prédiction est faite. Avec les progrès de la physique nucléaire, on a bien mieux compris les processus en cours lors de la synthèse des éléments. Aujourd'hui, on pense que les éléments légers (H, He et Li) ont été produits pendant la nucléosynthèse primordiale et que les éléments lourds ont été synthétisés beaucoup plus tard dans les étoiles.

**Notion de découplage.** La notion de *découplage* est fondamentale pour bien comprendre les étapes importantes de l'évolution de l'Univers. Considérons une population de particules. Celles-ci sont soumises à des interactions qui les thermalisent et qui les transmutent (par exemple  $p + e^- \leftrightarrow n + \nu$ ). L'expansion de l'Univers va diluer ces particules. L'échelle de temps associée à cette expansion est le temps de Hubble  $\tau_H = H^{-1}$  (voir Eq. 39). L'équilibre chimique des particules peut être rompu si les réactions sont trop lentes ou les collisions trop rares (c'est-à-dire si les particules sont trop diluées par l'expansion). Formellement, on introduit le taux de réaction par :

$$\Gamma = \sigma n v, \quad (44)$$

où  $\sigma$  est la section efficace de la réaction,  $n$  la densité volumique des particules cible et  $v$  leur vitesse relative. Une particule ne reste en équilibre avec les autres que si le temps moyen

entre deux collisions est inférieur au temps de Hubble à cet instant :

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} < \tau_H.$$

Si l'intervalle de temps séparant deux collisions est plus grand que le temps de Hubble, on dit que la particule (ou plutôt l'espèce associée) est gelée. Les particules de cette espèce sont alors découplées du reste de l'Univers et sont libres. Cette manière de voir le découplage est assez simplifiée mais elle donne de bons résultats qualitatifs (pour des estimations quantitatives, il faudrait intégrer l'équation de Boltzmann dans le cadre de la relativité générale).

**Entropie et expansion.** Considérons différentes espèces de particules  $A^9$  de masses  $m_A$  présentes dans l'Univers homogène et isotrope à l'instant  $t$ . On voudrait connaître les fonctions de distribution de ces espèces en équilibre cinétique,  $f_A(|\vec{p}|, t)$ , où  $\vec{p}$  est la tri-impulsion de la particule. Si les réactions entre ces particules se font avec un taux plus grand que celui d'expansion de l'Univers (ce qui revient à dire que le libre parcours moyen des particules est plus petit que le rayon de Hubble), alors ces particules seront à l'équilibre thermodynamique. Il est donc possible de définir une température d'équilibre  $T(t)$  que nous appelons "température de l'Univers" ; ainsi, tant qu'il existe des particules à l'équilibre la température de l'Univers est bien définie. Les interactions en jeu sont toutes à courte portée (effective pour l'électromagnétisme à cause du phénomène d'écrantage), leur rôle est de thermaliser les espèces et nous pouvons supposer qu'elles ne vont pas modifier la *forme* des fonctions de distribution, de Bose-Einstein (-1) ou de Fermi-Dirac (+1), selon le spin des particules :

$$f_A(|\vec{p}|, t) = \frac{g_A}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\frac{E-\mu_A}{T_A(t)}} \pm 1} \quad \text{avec} \quad E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_A^2}, \quad (45)$$

où  $g_A$  est le facteur de spin de l'espèce  $A$ ,  $\mu_A$  son potentiel chimique. Si les espèces sont en plus en équilibre chimique, les potentiels chimiques ne sont pas indépendants. S'il arrive un moment où le taux d'interaction ne suffit plus à maintenir l'équilibre, il y a découplage de l'espèce  $A$ . Celle-ci quitte l'équilibre et va évoluer indépendamment du reste de l'Univers. Pour ces particules désormais libres, nous avons montré comment évoluait la norme de leur tri-impulsion (voir Eq. 41) ; sachant que la forme de la fonction de distribution reste la même, les particules découplées sont décrites par :

$$f_{\text{dec}}(|\vec{p}|, t) = f_A \left( |\vec{p}| \frac{a(t)}{a(t_{\text{dec}})}, t_{\text{dec}} \right), \quad \text{pour } t > t_{\text{dec}}.$$

Progressivement, avec l'expansion, la température de l'Univers diminue et de plus en plus d'espèces de particules quittent l'équilibre, jusqu'à ce qu'elles soient toutes découplées. Les dernières espèces de particules à l'équilibre étaient les photons, les baryons et les électrons (c'était quelques centaines de milliers après le *Big-Bang*). Lors de la recombinaison, lorsque les électrons se lient aux protons pour former des atomes neutres (voir section 2.2 page 45), l'équilibre est rompu et il n'y aura alors plus d'équilibre (du moins tant que l'Univers est en expansion). On définit alors la température de l'Univers comme étant celle du rayonnement de corps noir des photons qui sont les dernières particules à s'être découplées.

---

9.  $A \in \{1, 2, 3, \dots, n_{\text{espèces}}\}$

Maintenant que nous connaissons la fonction de distribution des particules  $A$ , nous sommes en mesure de calculer leur densité volumique  $n$ , leur pression  $p$  et leur densité d'énergie  $\rho$  (voir Padmanabhan (1993)) :

$$\begin{aligned} n &= \int f(|\vec{p}|) d^3|\vec{p}| \\ p &= \int \frac{1}{3} \frac{|\vec{p}|^2}{E} f(|\vec{p}|) d^3|\vec{p}| \\ \rho &= \int E f(|\vec{p}|) d^3|\vec{p}|. \end{aligned}$$

À partir de ces équations et de l'expression de  $f$ , on montre que<sup>10</sup> :

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\rho + p}{T} + nT \frac{d}{dT} \left( \frac{\mu}{T} \right), \quad (46)$$

ce qui nous permet, en utilisant la conservation de la partie espace-espace du tenseur énergie-impulsion (Eq. 18), d'obtenir :

$$d(sa^3) = d \left( \frac{\rho + p - n\mu}{T} \right) = - \left( \frac{\mu}{T} \right) d(na^3). \quad (47)$$

Où l'on introduit en la définissant la quantité  $sa^3$ . Dans les cas qui nous concernent ici, la matière est non-dégénérée (le nombre d'états quantiques disponible est bien plus grand que le nombre de particules) c'est-à-dire  $T \gg \mu$ , soit  $na^3 = N_{\text{particules}} \sim C^{\text{te}}$  et donc la quantité  $sa^3$  est une constante au cours de l'expansion de l'Univers. Dans l'hypothèse où  $T \gg \mu$ , l'Eq. 47 devient  $s = (\rho + p)/T$ . Le calcul de  $Td(sa^3)$  se fait sans difficulté et on arrive à :

$$Td(sa^3) \sim d(\rho a^3) + p d(a^3),$$

c'est-à-dire que l'on peut identifier la quantité  $sa^3$  avec l'entropie, en comparant avec le principe de thermodynamique  $TdS = dU + p dV$ . L'entropie  $S$  des particules  $A$  est constante au cours de l'expansion de l'Univers. L'isentropie impliquant l'adiabaticité<sup>11</sup>, l'expansion de l'Univers est adiabatique.

Il est intéressant de calculer  $n, p$  et  $\rho$  dans certains cas limites :

– **cas ultra-relativiste** :  $\mathbf{T} \gg \mathbf{m}$

on suppose en plus que  $T \gg \mu$ ; dans ce cas,

	$n$	$\rho$	$p = \rho/3$
bosons	$\frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_B T^3$	$\frac{\pi^2}{30} g_B T^4$	$\frac{\pi^2}{90} g_B T^4$
fermions	$\frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_F T^3$	$\frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_F T^4$	$\frac{7}{8} \frac{\pi^2}{90} g_F T^4$

10. utiliser le fait que

$$\frac{df}{dT} = \left( \frac{1}{T} \frac{d\mu}{dT} + \frac{E - \mu}{T^2} \right) e^{\frac{E - \mu}{T}} f^2(|\vec{p}|) \quad \text{et que} \quad f^2 = - \frac{ET}{|\vec{p}|} \frac{df}{d|\vec{p}|} e^{-\frac{E - \mu}{T}}.$$

11. Ainsi que la réversibilité.

et donc

$$\rho_{\text{total}} = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4 \quad \text{avec} \quad g_*(T) = \sum_{i \in \text{bosons}} g_{\text{Bi}} \left( \frac{T_{\text{Bi}}}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i \in \text{fermions}} g_{\text{Fi}} \left( \frac{T_{\text{Fi}}}{T} \right)^4. \quad (48)$$

Le fait que des températures  $T_i$  apparaissent dans cette expression montre que nous prenons en compte *toutes* les espèces relativistes, mêmes celles qui ne sont plus à l'équilibre, c'est-à-dire qui sont découplées. Pour elles seulement,  $T_i \neq T$ . Si toutes les espèces sont à l'équilibre, alors  $T_i = T$  et :

$$g_* = \sum_{i \in \text{bosons}} g_{\text{Bi}} + (7/8) \sum_{i \in \text{fermions}} g_{\text{Fi}}.$$

La pression des espèces relativistes est  $p = \rho/3 \propto T^4$  donc  $(\rho + p)/T \propto T^3$  d'où :

$$S = g_{*S}(T) a^3 T^3 = C^{\text{te}} \quad (49)$$

est conservée avec

$$g_{*S}(T) = \sum_{i \in \text{bosons}} g_{\text{Bi}} \left( \frac{T_{\text{Bi}}}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i \in \text{fermions}} g_{\text{Fi}} \left( \frac{T_{\text{Fi}}}{T} \right)^3.$$

Comme au cours de l'expansion de plus en plus d'espèces de particules quittent le régime relativiste,  $g_*(T)$  et  $g_{*S}(T)$  sont décroissantes quand  $T$  décroît, ou quand  $t$  croît.

– **cas non relativiste :  $T \ll m$**

on trouve dans ce cas :

	$n$	$\rho$	$p$ ( $p \ll \rho$ )
bosons <i>et</i> fermions	$g \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m-\mu}{T}}$	$n m$	$n T$

La densité d'énergie des espèces non relativistes décroît en  $e^{-m/T}$  par rapport à celle des espèces relativistes. C'est pour cette raison que dans la période de domination de la radiation, on néglige la contribution des espèces non relativistes.

Nous sommes désormais en mesure de décrire le comportement d'une espèce de particules  $A$ , de masse  $m_A$ . Supposons-la dans un premier temps en équilibre thermodynamique avec le reste de l'Univers. Sa fonction de distribution est de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac et sa température — c'est aussi celle de l'Univers par définition — est donnée par :

$$T \propto \frac{g_{*S}(a)^{-1/3}}{a} \quad \text{avec} \quad g_{*S}(a) = \sum_{i \in \text{bosons}} g_{\text{Bi}} \left( \frac{T_{\text{Bi}}}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i \in \text{fermions}} g_{\text{Fi}} \left( \frac{T_{\text{Fi}}}{T} \right)^3.$$

Supposons ensuite qu'à  $t = t_{\text{dec}}$  (ou  $T(t_{\text{dec}}) = T_{\text{dec}}$ ), l'espèce  $A$  se découple tandis qu'elle est ultra-relativiste, c'est-à-dire  $T_{\text{dec}} \gg m_A$ . Sa fonction de distribution restera *toujours* de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac pour des particules ultra-relativistes *même quand  $T_A$  deviendra inférieure à  $m_A$* . La température  $T_A(t)$  de cette espèce découplée, qui est à partir de maintenant différente de celle de l'Univers, est donnée par :

$$T_A(t) = T_{\text{dec}} \frac{a(t_{\text{dec}})}{a(t)}, \quad \text{avec} \quad t > t_{\text{dec}},$$



qui décroît en  $a^{-1}$  exactement. Il arrivera un moment où  $T_A < m_A$ , l'espèce  $A$  n'est plus relativiste mais garde une distribution de particules ultra-relativistes. Par contre, sa densité d'énergie change et prend sa forme non relativiste,  $\rho_A = n_A m_A$ . Remarquons que la température de l'Univers décroît moins vite que celle de l'espèce découplée pendant qu'elle était ultra-relativiste car :

$$\frac{T(t)}{T_A(t)} = \left( \frac{g_{*S}(a(t))}{g_{*S}(a(t_{\text{dec}}))} \right)^{-1/3} \text{ est plus grand que 1.}$$

Le cas que nous venons d'étudier s'applique par exemple aux neutrinos fossiles. Il est facile d'étendre le raisonnement que nous venons de faire à d'autres types de particules (massives ou de masse nulle) et se découplant à des moments différents. Nous résumons ces résultats dans le tableau 2.

TABLE 2 – Synthèse des densités d'énergie  $\rho_A$ , des fonctions de distributions  $n_A$  et de la température  $T_A$  des particules dans l'Univers selon leur masse, leur nature, la température de découplage  $T_{\text{dec}}$  s'il a eu lieu et la température de l'Univers  $T$ .

masse	découplage	$T_{\text{dec}}$	$T_A$	$n_A$ <sup>1</sup>	$\rho_A$
0	non	—	$T_A = T$ $\propto g_{*S}(a)^{-1/3} a^{-1}$	BE ou FD avec $m = 0$	$\propto T^4$
0	oui	$T_{\text{dec}}$	$T_A \propto a^{-1}$	BE ou FD avec $m = 0$	$\propto T_A^4$
$m_A$	non	—	$T_A = T$ $\propto g_{*S}(a)^{-1/3} a^{-1}$	BE, FD ou MB selon $T/m_A$	$\propto T^4$ si $T \gg m_A$ $n_A m_A$ si $T \ll m_A$
$m_A$	oui	$T_{\text{dec}} \gg m_A$	$T_A \propto a^{-1}$	BE ou FD avec $m = 0$	$\propto T_A^4$ tant que $T_A > m_A$ puis $n_A m_A$
$m_A$	oui	$T_{\text{dec}} \ll m_A$	$T_A \propto a^{-2}$	MB	$n_A m_A$

### 1.4.2 Scénario du *Big-Bang*

En utilisant le modèle standard de physique des particules et en allant vers le passé, on peut reconstituer l'histoire chimique de l'Univers. On ne peut remonter qu'au temps de Planck, soit  $10^{-43}$  s après le *Big-Bang*, époque à laquelle les conditions extrêmes de température et de densités contraignent la gravitation et la mécanique quantique à fusionner. À l'heure actuelle, aucune théorie n'y est parvenu avec succès. La FIG. 11 présente les étapes les plus remarquables de l'histoire de l'Univers.

- **T ~ 3 K.** Commençons par l'époque actuelle. Nous observons des structures, telles que des galaxies, amas et superamas. L'Univers n'est pas homogène à petite échelle.

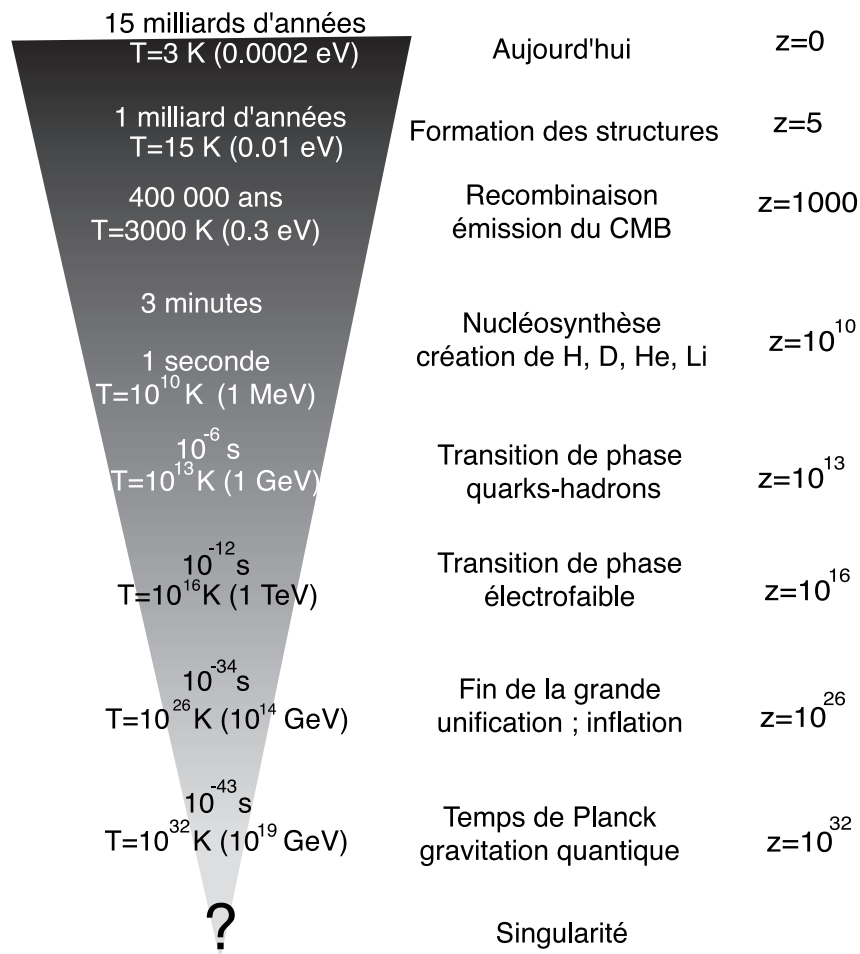


FIGURE 11 – **Évolution de l’Univers, du temps de Planck jusqu’à aujourd’hui.** Résumé des étapes importantes dans l’histoire de l’Univers. Les valeurs de  $z$  données ne sont que des ordres de grandeurs.

Notre Univers est baigné par un rayonnement de corps noir homogène, isotrope, d’une température de  $2.728 \pm 0.004$  K à 95 % de niveau de confiance, voir FIG. 12 et Fixsen et al. (1996). Des anisotropies ont été détectées au niveau de  $\delta T/T \sim 10^{-5}$ , germes des structures actuelles. Nous y reviendrons en détail dans la suite.

- **T ~ 15 K.** Les structures se forment. Le processus de formation n’est pas complètement compris mais on pense que les protogalaxies se sont formées en premier, puis, par accrétion, ont donné les amas et les superamas. C’est le scénario “bottom-up”, qui nécessite la présence de matière noire froide, c’est-à-dire non relativiste au moment de son découplage.
- **T ~ 3000 K.** La température est suffisamment basse pour que les électrons puissent se lier aux noyaux : les premiers atomes se forment. Les photons, qui interagissaient principalement avec ces électrons par diffusion Thomson, vont pouvoir désormais se propager librement car leur libre parcours moyen devient très grand devant le rayon de Hubble. Les photons se découplent. L’Univers, opaque jusqu’à maintenant, devient transparent aux photons. C’est ce rayonnement que nous observons aujourd’hui sous

1. BE : Bose-Einstein ; FD : Fermi-Dirac ; MB : Maxwell-Boltzmann.

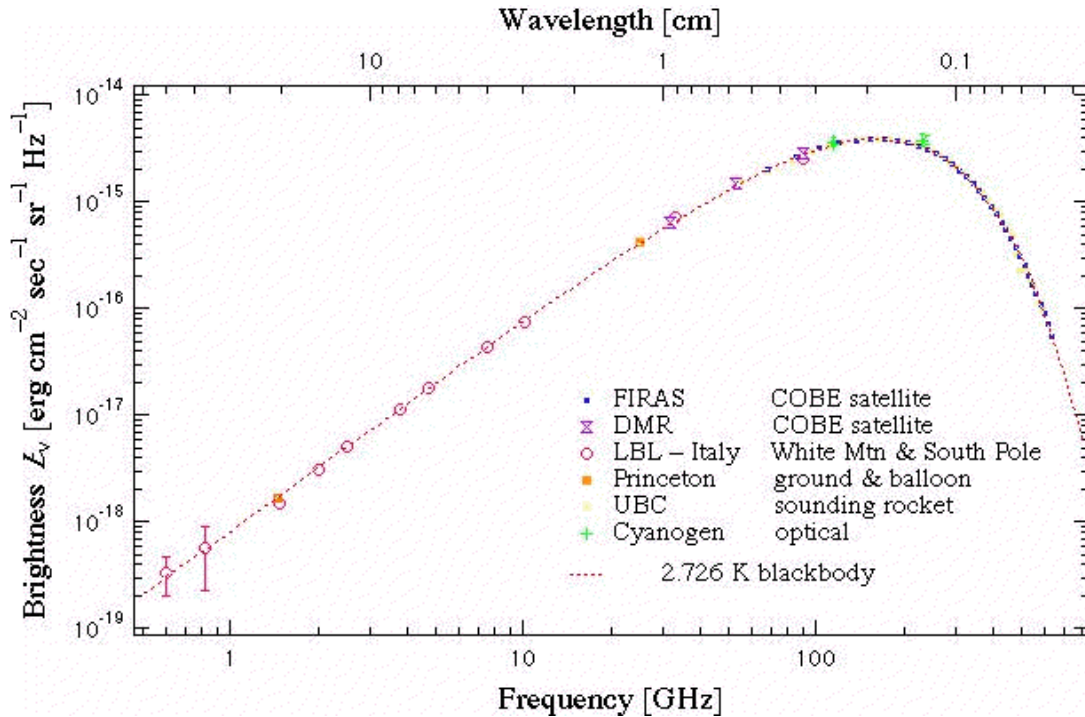


FIGURE 12 – Spectre du CMB obtenu avec l'instrument FIRAS du satellite COBE. L'accord avec une distribution de Planck est excellent. Le meilleur fit donne  $T = 2.728 \pm 0.004$  K à 95 % de niveau de confiance (Fixsen et al., 1996).

la forme du rayonnement de fond à 3K. Le fait que ce soit un corps noir signifie qu'il a eu le temps de se thermaliser avant que les photons ne se découplent. À ce moment, la température est de 0.3 eV ( $\sim 3400$  K). Curieusement, ce n'est pas à  $E_I = 13.6$  eV (énergie d'ionisation de l'hydrogène) que le découplage a eu lieu. Ceci est dû au fait que la courbe du corps noir de température donnée est relativement étalée autour de son maximum (voir FIG. 12) et que les photons sont très supérieurs en nombre aux baryons ( $\sim 10^{10}$  fois plus nombreux) : même à des températures inférieures à 13.6 eV, il reste suffisamment de photons d'énergie supérieure pour ioniser toute la matière. Il faudra attendre que l'expansion l'ait refroidi jusqu'à environ 0.3 eV pour que les électrons puissent se lier aux baryons. L'Univers est vieux de quelques centaines de milliers d'années.

- $T \sim 65\,000$  K. C'est l'égalité matière-rayonnement. Nous en avons déjà parlé page 23. Avant cette époque, l'Univers est dominé par les particules relativistes ; l'Univers est âgé d'environ 1000 ans. Le facteur d'échelle  $a$  passe du régime  $a \propto t^{1/2}$  à  $a \propto t^{2/3}$ .
- $T \sim 10^{11} - 10^9$  K. Les premiers noyaux atomiques se forment dans l'intervalle approximatif  $10^{-2}$  s  $\rightarrow$   $10^2$  s. Le paramètre fondamental du modèle de nucléosynthèse primordiale est le rapport  $\eta$  du nombre de baryons sur le nombre de photons ; c'est un paramètre fondamental car il est constant dans le temps. Il est de l'ordre de  $10^{-10}$  et l'on utilise plutôt le paramètre  $\eta_{10} = \eta/10^{-10}$ . À cette température, les protons et neutrons ne sont plus à l'équilibre et commencent, par collision, à synthétiser du deutérium :  $n + p \rightarrow D + \gamma$ . Pour  $T \sim 10^9$  K, le tritium, hélium 3 et 4 se forment et enfin le lithium 6 et 7. Les abondances (fractions de masse pour  $Y_P = \text{He}/\text{H}$  et numérique pour les autres rapports) prédites à l'issue de cette phase de nucléosynthèse sont (Sarkar,

1996; Hogan, 1997) :

$$\begin{aligned}
Y_P &= 0.235 + 0.012 \ln \left( \frac{\eta_{10}}{2} \right) \left[ \left( \frac{\eta_{10}}{2} \right)^{-0.2} \right. \\
&\quad \left. + 0.011 \left( 1 - \left( \frac{\eta_{10}}{2} \right)^{-0.2} \right) \pm 0.0006 \right] \\
\left( \frac{D}{H} \right) &= 15.6 \times 10^{-5 \pm 0.03} \left( \frac{\eta_{10}}{2} \right)^{-1.6} \\
\left( \frac{{}^7\text{Li}}{H} \right) &= 1.06 \times 10^{-10} \pm 0.1 \left[ \left( \frac{\eta_{10}}{2} \right)^{-2.38} + 0.28 \left( \frac{\eta_{10}}{2} \right)^{2.38} \right],
\end{aligned}$$

avec  $Y_P = m_{\text{He}}/m_{\text{tot}}$ . Les erreurs apparaissant ici sont celles sur les taux de réaction. Ces prédictions sont montrées sur la FIG. 13 tirée de Olive (1999). Pour la densité de baryons :

$$\boxed{0.01 \leq \Omega_b h^2 \leq 0.025} \quad (\text{intervalle qui peut varier un peu selon les auteurs}) \quad (50)$$

soit, pour une valeur “raisonnable” de  $H_0$  (prenons  $70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ ),

$$\begin{aligned}
0.02 &\leq \Omega_b \leq 0.05 \quad \text{voir Olive et al. (1999),} \\
0.033 &\leq \Omega_b \leq 0.043 \quad \text{voir Burles et al. (1999).}
\end{aligned}$$

Précisons que la nucléosynthèse est un des plus grands succès de la théorie du *Big-Bang* puisqu’elle prédit et explique toutes les abondances des éléments légers, en accord avec les observations. Il existe une valeur de  $\eta_{10}$  qui rend théorie et observations compatibles ; ce paramètre permet de mesurer  $\Omega_b h^2$ . Pendant cette époque, les neutrinos se découplent. Ils constituent un fond de rayonnement analogue à celui des photons mais leur température n’est que de 1.96 K.

- **T  $\sim 10^{13}$  K.** Après avoir vu la synthèse des premiers atomes (recombinaison) puis la synthèse des premiers noyaux (nucléosynthèse), voici l’époque de la synthèse des nucléons. Nous sommes ici à la transition de phase quark-hadrons. La température, trop basse, ne permet pas aux quarks de rester libres. Ils préfèrent se confiner en hadrons car l’énergie d’une particule colorée isolée est infinie. Leur regroupement en hadrons (nucléons et autres particules sensibles à l’interaction forte) les rend stables. À température supérieure, l’état stable est un plasma de quark et de gluons, que l’on cherche activement à reproduire dans les accélérateurs.
- **T  $\sim 10^{16}$  K.** À cette température ( $\sim 300 \text{ GeV}$ ), se produit la transition de phase électrofaible. Cela signifie que les interactions faibles et électromagnétiques sont décrites par une seule et même force, c’est l’interaction électrofaible. Le mécanisme de Higgs brise la symétrie  $SU(2) \otimes U(1)$  ce qui différencie par la suite les deux forces.
- **T  $\sim 10^{26}$  K.** Au dessus de cette température, toutes les interactions sont unifiées. Toutes? Non, seule la gravitation résiste encore. À plus basse température, le mécanisme de Higgs brise la symétrie et donne l’habituel  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$  du modèle standard de la physique des particules. Il est possible que l’asymétrie matière-antimatière apparaisse ici. Bien que les modèles de grande unification (GUT) diffèrent sur quelques points, ils sont tous des théories de jauge contenant un ou plusieurs champs scalaires  $\phi$  (champ de Higgs). Le comportement de ce champ est gouverné par un potentiel  $V$  qui a un minimum pour une valeur non nulle de  $\phi$  et dont la

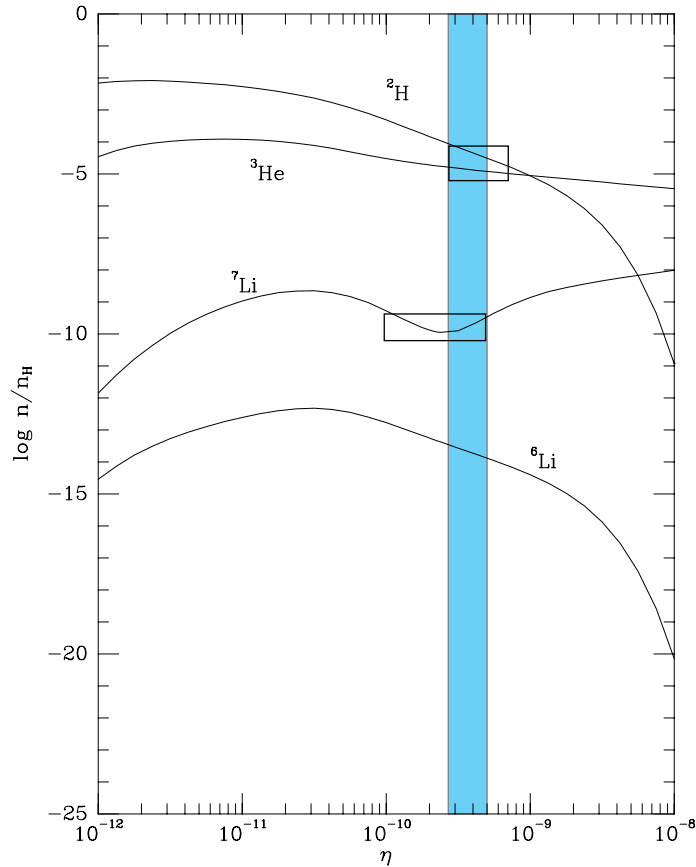


FIGURE 13 – **Abondances des éléments légers en fonction de  $\eta$ .** Les abondances théoriques sont représentées par les courbes : les mesures sont les rectangles dessinés sur celles de  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^2\text{H}$  et  ${}^3\text{He}$ . Théorie et expérience sont compatibles pour  $\eta \sim 3.5 \times 10^{-10}$  (domaine grisé).

forme dépend de la température. Celle-ci diminuant, le potentiel  $V$  présente des minimums secondaires pour une certaine valeur critique  $T_c$ . Il peut arriver que le champ reste dans un minimum secondaire, c'est un état métastable, analogue à la surfusion en physique macroscopique. La densité d'énergie est alors constante, analogue à une constante cosmologique. L'Univers connaît alors une phase d'expansion exponentielle, c'est l'*inflation* (voir section 2.3 page 50). La température continuant de diminuer, le champ va revenir à un minimum absolu autour duquel il va osciller ; ces oscillations s'amortissent par création des particules usuelles et à cause de l'expansion (Lyth et Riotto, 1999; Kolb et Turner, 1990).

Dans ce premier chapitre, nous avons vu que l'histoire globale de l'Univers était comprise d'une façon assez satisfaisante. Certains points particuliers de son évolution ont demandé une amélioration du modèle sans jamais le remettre en cause dans sa nature. Cependant, nous avons fait l'hypothèse que l'Univers était rempli d'un fluide homogène et isotrope. Or un tel Univers, complètement homogène ne peut pas produire les structures que nous observons aujourd'hui. Il nous faut revoir notre définition du principe cosmologique, en introduisant les notions d'homogénéité et d'isotropie *statistiques*.



## 2 Fluctuations dans l'Univers

### 2.1 Observations

#### 2.1.1 Extension du principe cosmologique

Le principe cosmologique stipule que l'Univers est parfaitement homogène et isotrope. Cette hypothèse, associée avec la relativité générale fournit la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Cependant, comme nous l'avons déjà vu page 5, les observations sont en contradiction avec ce principe : manifestement, l'Univers n'est pas homogène car nous observons des structures comme par exemple des galaxies, des amas, des superamas... L'Univers nous apparaît homogène sur des échelles supérieures au Gpc. Rappelons que l'observation d'un fond diffus cosmologique homogène — le CMB — est la plus importante confirmation du bien-fondé du principe cosmologique. Nous devons permettre des inhomogénéités dans l'Univers (qui sont déjà présentes dans le CMB), perturbations par rapport à un ensemble statistiquement homogène. Ces inhomogénéités se traduiront notamment par des fluctuations de la métrique qui ne sera plus de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. On pense que les petites inhomogénéités se sont développées sous l'effet de la gravitation en structures de plus en plus importantes, jusqu'à former les structures observées.

#### 2.1.2 Méthode statistique

L'étude du mécanisme responsable de la distribution des galaxies dans l'Univers est un sujet de recherche très actif, notamment depuis que les ordinateurs permettent de simuler l'évolution d'un ensemble de points en interaction, comme des inhomogénéités localisées. Si ce mécanisme ne contredit pas le principe cosmologique, il doit avoir opéré de façon uniforme : on devrait avoir la même probabilité d'avoir une galaxie dans un volume donné indépendamment de l'endroit considéré. Les observations montrent que les galaxies ont une nette tendance à se regrouper en amas. Ces deux propriétés nécessaires pour rendre compte des observations se traduisent par une fonction mathématique qui doit vérifier :

$$\begin{aligned} 1) \quad & P = \bar{n} dV \\ \text{et } 2) \quad & P_{12}(dV_1, dV_2) = \bar{n}^2 (1 + \xi_{gg}(r)) dV_1 dV_2, \end{aligned}$$

où  $\bar{n}$  est la densité moyenne de galaxies par unité de volume,  $dV_1$  et  $dV_2$  des éléments de volumes infinitésimaux,  $P_{12}(dV_1, dV_2)$  la probabilité de trouver une galaxie dans le volume  $dV_1$  et une autre dans le volume  $dV_2$  et  $\xi_{gg}(r)$  est la fonction de corrélation à deux points, positive pour exprimer le fait que les galaxies préfèrent s'apparenter. Cette fonction ne dépend que du module  $r$  de la séparation entre les galaxies puisque nous voulons décrire un Univers statistiquement isotrope.

On peut exprimer cette corrélation entre galaxies en terme de corrélation du contraste de densité. Le contraste de densité numérique local de galaxies, défini par :

$$\delta g = \frac{n(\vec{r}) - \bar{n}}{\bar{n}},$$

nous permet d'écrire sous une nouvelle forme la fonction de corrélation :

$$\langle \delta g(\vec{r}_1) \delta g(\vec{r}_2) \rangle = \xi_{gg}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|).$$

Il est naturel de penser que la répartition des galaxies est corrélée à celle de la masse. On introduit pour cela le contraste de densité de masse défini par :

$$\delta(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \quad (51)$$

et le champ aléatoire associé dont la corrélation est donnée par :

$$\langle \delta(\vec{r}_1) \delta(\vec{r}_2) \rangle = \xi(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|).$$

Dans les modèles les plus simples, les corrélations de masse et de galaxies sont égales. On peut permettre aux galaxies d'être plus ou moins corrélées avec la densité de masse. On introduit alors le facteur de biais  $b$  en posant :

$$\xi_{gg} = b^2 \xi.$$

Il est commode de travailler dans l'espace de Fourier. L'Eq. 51 s'écrit dans cet espace :

$$\delta(t, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \delta_{\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Les vecteurs  $\vec{k}$  ont pour norme le nombre d'onde comobile ( $k = 2\pi/\lambda$ ). Les modes de Fourier  $\delta_{\vec{k}}(t)$  sont des variables aléatoires de moyenne nulle et de variance :

$$\langle \delta_{\vec{k}_1} \delta_{\vec{k}_2} \rangle = (2\pi)^3 P(k) \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad \text{où l'on a posé : } P(k) = \int d^3r \xi(r) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (52)$$

La fonction  $P(k)$  est le *spectre de puissance*, c'est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation à deux points.  $P$  ne dépend que du module de  $\vec{k}$  car  $\xi$  ne dépend que du module de  $\vec{r}$ , en vertu du principe cosmologique. Les mesures de ce spectre de puissance sont présentées dans la FIG. 14. La puissance du mode  $\vec{k}$  est donnée par  $|\delta(t, \vec{k})|^2$ . Les modes de Fourier se trouvant dans l'intervalle  $[k; k + d^3k]$  contribuent à raison de :

$$d^3k |\delta_k|^2 \propto k^2 dk |\delta_k|^2 = d(\ln k) (k^3 |\delta_k|^2).$$

La connaissance des propriétés statistiques des fluctuations de densités sont cruciales pour contraindre les théories de formation des structures. Deux d'entre elles, l'inflation et les défauts topologiques, prédisent des distributions différentes (respectivement gaussiennes et non-gaussiennes) pour ces fluctuations. Les observations favorisent nettement l'inflation, donc des fluctuations ayant une distribution gaussienne. Sous cette hypothèse,  $\delta_{\vec{k}}$  et  $\delta(t, \vec{r})$  sont des variables aléatoires gaussiennes. Notons que la fonction  $\xi$  est liée à la distribution de masse sans tenir compte de sa nature : on inclut ici la contribution de la matière baryonique (noire et lumineuse) au même titre que celle de la matière noire non-baryonique.



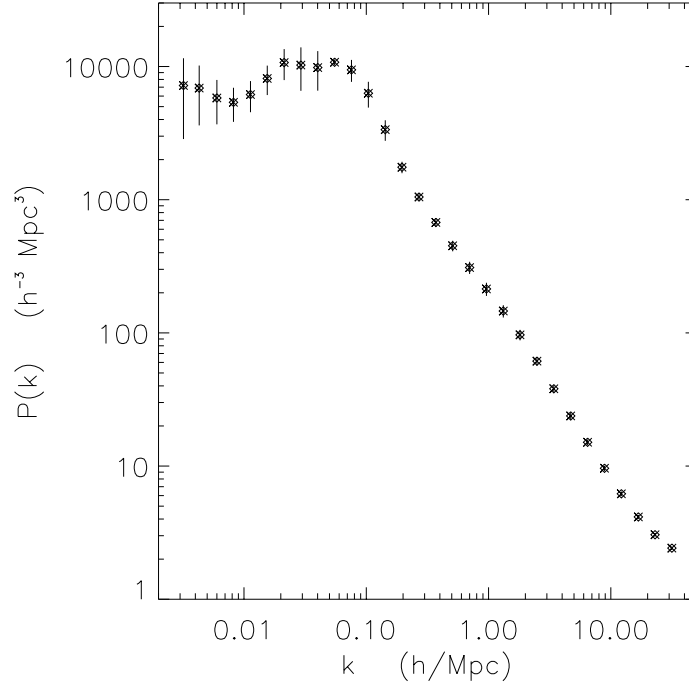


FIGURE 14 – **Spectre de puissance de la distribution des galaxies.** Les données sont issues de Gaztañaga & Baugh (1998).

### 2.1.3 La matière noire

**Preuves de sa présence.** D'un point de vue observationnel, le problème de la matière noire est intimement lié à la comparaison de la masse d'une structure avec la connaissance que nous avons de son contenu. Du voisinage du soleil jusqu'à l'Univers dans son ensemble, en passant par les halos des galaxies et les amas, il existe toujours trop peu de matière observable pour rendre compte des effets dynamiques observés, en supposant que la gravitation newtonnienne est correcte. Par exemple, lorsque l'on calcule la vitesse de rotation d'une étoile située en périphérie d'une galaxie, on trouve que cette vitesse décroît en raison inverse de la racine carrée de la distance au centre de la galaxie. Les observations (voir FIG. 15) sont en désaccord avec ces prédictions puisque les vitesses restent constantes. Zwicky (1933) est le premier à avoir subodoré l'existence de la matière noire ; dans cet article la densité moyenne de masse dans l'amas Coma estimée est 400 fois plus grande que celle calculée en ne comptant que la masse lumineuse. Cette estimation est basée sur une valeur de  $H_0$  de  $558 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ , estimation de l'époque, bien supérieure aux valeurs typiques admises aujourd'hui. Avec une valeur beaucoup plus vraisemblable (environ  $70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ ), on trouve un facteur 50 au lieu de 400, mais toujours bien plus grand que 1. Le rapport masse sur luminosité ( $M/L$ ) est un bon indicateur de la présence de matière noire. Par convention, le rapport masse sur luminosité du soleil  $M_\odot/L_\odot$  vaut 1. Ostriker et al. (1974) ont montré que le  $M/L$  des galaxies augmentait avec la distance au centre et que la masse manquante (c'est-à-dire la matière noire) pouvait jouer un rôle cosmologique. Oort (1940) a montré que le rapport  $M/L$  était de l'ordre de 250 dans les régions extérieures de NGC 3115. Comme dans le cas de Zwicky, ce nombre peut être divisé par 10 environ, compte-tenu de la précision médiocre des mesures de

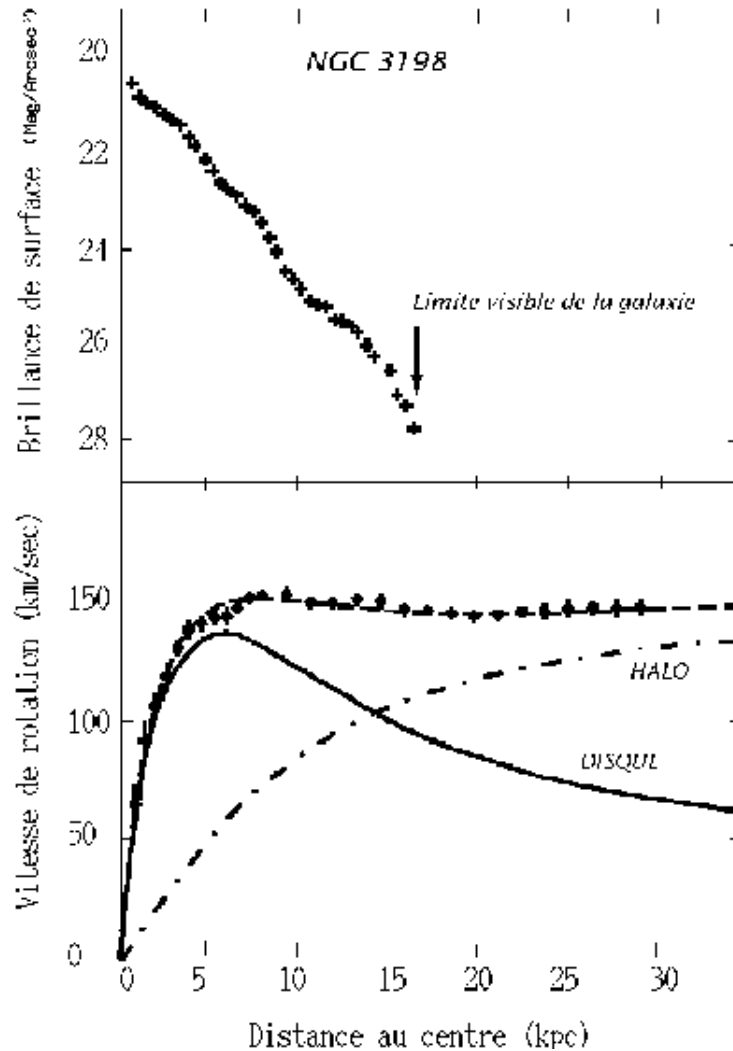


FIGURE 15 – Vitesse de rotation des étoiles autour du centre de NGC3198.

Graphe du haut : profil de luminosité de NGC3198. La répartition de matière lumineuse est directement liée à la distance au centre de la galaxie.

Graphe du bas : les points sont des mesures de vitesses de rotation d'étoiles autour du centre de la galaxie. Si l'on suppose que toute la matière de la galaxie est la matière lumineuse déterminée par le profil de luminosité et en appliquant les lois de la mécanique newtonnienne, alors les vitesses de rotation des étoiles devraient se trouver sur la courbe labellée par "DISQUE". On voit qu'au lieu de décroître, ces vitesses restent constantes. On arrive à reproduire les mesures en ajoutant à la galaxie un halo sphérique de matière noire (non-lumineuse). La masse de la galaxie augmente avec la distance au centre, contrairement à la masse lumineuse.

distance des galaxies à cette époque. Dans le proche voisinage du Soleil (quelques pc), on a  $M/L \sim 1.7$ . À l'échelle de la galaxie, il est déjà de l'ordre de quelques dizaines et de quelques centaines à l'échelle des amas de galaxies (voir Padmanabhan (1993)). Ma et al. (1998) ont trouvé un  $M/L$  de  $560h$  pour le superamas Corona Borealis en étudiant la dynamique et les *redshifts* de 528 galaxies liées à ce superamas.

Nous voyons que le rapport masse sur luminosité croît avec le volume dans lequel on l'estime. Plus on considère de grands volumes, plus la matière noire est en excès par rapport à la matière lumineuse. La nucléosynthèse prédit que la contribution des baryons à la densité critique se trouve entre 2 % et 5 %; les estimations sur la contribution des étoiles (matière lumineuse et baryonique) donnent une valeur de l'ordre de 0.5 %. La matière baryonique serait donc constituée d'environ 10 % de matière lumineuse sous forme d'étoiles et de 90 % de matière sombre. Nous avons vu d'autre part (voir page 19) que les estimations sur  $\Omega_m$  (matière baryonique et non-baryonique) donnaient une contribution de l'ordre de 30 %. Il apparaît donc que la matière baryonique ne contribue que peu (quelques pourcents) à la densité de matière. Il existe donc de la matière noire non baryonique, largement dominante.

Une autre explication possible serait de modifier la théorie de la gravitation et de faire en sorte que la force décroisse moins vite que  $r^{-2}$  à grande distance (Begeman et al., 1991; Mannheim, 1993). Les observations sur l'effet de lentille gravitationnelle devraient mettre des contraintes très fortes sur de telles théories. Nous considérons ici que la théorie de la gravitation est correcte. Une autre alternative pour expliquer le problème de la matière noire est la théorie de la nucléosynthèse inhomogène (Applegate et al., 1987); ce scénario est maintenant abandonné.

Enfin, nous pouvons faire appel à la physique des particules qui regorge de particules inobservées à ce jour et qui pourraient être de très sérieux candidats pour expliquer cette matière noire, nous y reviendrons quand nous aborderons la matière noire non-baryonique.

## Nature de la matière noire.

**Matière noire baryonique.** Comme nous ne la voyons pas sous forme lumineuse, il faut la chercher ailleurs que dans les étoiles. Une première piste est celle des corps massifs et compacts du halo galactique, dénommés MACHOs<sup>12</sup> en anglais. Cette catégorie inclut notamment les naines brunes, les jupiters, les naines blanches et les étoiles à neutrons. Les naines brunes sont des boules d'hydrogène et d'hélium trop légères ( $M \leq 0.08 M_\odot$ ) pour que les réactions thermonucléaires se déclenchent. Les jupiters sont aussi des naines brunes mais leur masse est encore plus faible :  $M \sim 0.001 M_\odot$ . Les naines brunes étaient récemment encore les meilleurs candidats. La détection de ces objets se fait par effet de microlentille gravitationnelle (Paczynski, 1986; Griest, 1991). Les résultats, pas complètement stabilisés, montrent qu'au plus 50 % de la masse du halo serait sous la forme de MACHOs avec une masse de l'ordre de  $0.5 M_\odot$  et que les objets de masse comprise entre  $10^{-4} M_\odot$  et  $0.003 M_\odot$  contribueraient au mieux à 20 % de la masse du halo. Les expériences à l'origine de ces résultats, MACHO et EROS (Alcock et al., 1997; Alcock et al., 1998; Afonso et al., 1999) ne convergent pas vers les mêmes conclusions mais sont en accord sur les limites supérieures. Les nuages moléculaires froids et denses sont de bons candidats. Ils sont recherchés depuis

---

12. "Massive Halo Compact Objects".

longtemps mais ont été détectés pour la première fois par Valentijn & van der Werf (1999). Les mesures ont été prises par le satellite ISO et ont prouvé la présence de nuages d'hydrogène moléculaire dans le disque de la galaxie NGC 891. Les auteurs en ont déduit que les nuages d'hydrogène moléculaire sont présents dans la totalité du disque et que la masse d'hydrogène moléculaire serait entre 5 et 15 fois plus grande que la masse d'hydrogène atomique. Ce surplus de masse, jusqu'alors inconnu, suffirait pour résoudre le problème de la matière noire, au moins dans la partie optique du disque. Il reste à confirmer ces résultats très encourageants.

**Matière noire non baryonique.** L'existence de ce type de matière noire ne fait pas de doute. Elle en est même la forme dominante (puisque  $\Omega_m$  est proche de 0.3 et  $0.02 \leq \Omega_b \leq 0.05$ ). Parmi les espèces non baryoniques, on distingue les espèces chaudes (HDM) des espèces froides (CDM). Un candidat constitue de la matière noire chaude (froide) s'il était relativiste (non relativiste) à l'époque de la formation des structures. Cette distinction est très importante pour ce qui est des scénarios de formation des structures dans l'Univers ; en effet, la matière noire chaude efface toute trace de fluctuations à petite échelle et favorise ainsi la formation des grandes structures en premier qui, plus tard, peuvent se fragmenter en amas et en galaxies, c'est le scénario "top-down". Dans ce cas, on devrait observer une coupure (brusque baisse de puissance) dans le spectre de la FIG. 14 aux petites échelles spatiales (c'est-à-dire aux grandes valeurs de  $k$ ) ce qui n'est pas le cas (White et al., 1983). Ce modèle de formation des structures par de la matière noire chaude est donc pratiquement abandonné.

Inversement, la matière noire froide, avec sa vitesse de dispersion faible, amplifie les fluctuations sur de petites échelles et favorise ainsi la formation des petites structures en premier (galaxies et amas) qui coalescent en grandes structures, c'est le scénario "bottom-up", qui ne génère pas de coupure dans le spectre de puissance et qui n'est pas contredit par les observations (voir FIG. 14). La distinction entre le cas de la matière noire chaude ou froide peut donc se faire en étudiant le spectre de puissance de la distribution spatiale des galaxies. On peut cependant construire des modèles intéressants en ne mettant qu'une fraction de matière noire chaude (25 %) et le reste de matière noire froide. Dans ces modèles, un candidat sérieux pour la matière noire chaude est un neutrino léger<sup>13</sup>, mais cette hypothèse semble de plus en plus fragile. Si un tel neutrino existait, sa densité d'énergie associée serait  $\Omega_\nu h^2 = \sum m_i / (93.5 \text{ eV})$  pour avoir un rôle cosmologique important, où la somme porte sur les différentes espèces de neutrinos. Depuis les résultats de l'expérience Super-Kamiokande (Fukuda et al., 1998), on pense que les neutrinos pourraient avoir une masse non nulle. La différence de masse entre les neutrinos  $\mu$  et  $\tau$  est de :

$$5 \times 10^{-4} \text{ eV}^2 < \delta m^2 < 6 \times 10^{-3} \text{ eV}^2.$$

En supposant que  $\nu_e \ll \nu_\mu \ll \nu_\tau$ , alors  $m_\tau^{\text{max}} \sim 7.7 \times 10^{-2} \text{ eV}$ , beaucoup trop faible pour jouer un rôle dans la formation des structures.

Quant à la matière noire froide, on doit faire appel aux théories situées à des énergies au-delà de celles du modèle standard de la physique des particules. Ce dernier, basé sur la symétrie de jauge  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , ne propose aucun candidat à la matière noire. Les théories comme la symétrie PQ (Peccei-Quinn), la supersymétrie, les théories de grande

---

13.  $m \leq 100 \text{ eV}$

unification (GUTs), les supercordes proposent des particules reliques des premiers instants de l'Univers. Les axions (issus de la symétrie PQ) et des particules massives interagissant faiblement (WIMPs, pour Weakly Interacting Massive Particles, issus des théories supersymétriques) sont les candidats les plus étudiés. La masse de l'axion doit se situer aux alentours de  $10^{-5}$  eV. S'il existe, il devrait jouer un rôle important dans le bilan d'énergie de l'Univers. Parmi les WIMPs, on peut citer le neutralino, particule supersymétrique la plus légère (la plus stable), de masse comprise entre 10 GeV et 3 TeV et sa section efficace avec la matière ordinaire est de l'ordre de celles des interactions faibles (voir Jungman et al. (1996) pour une revue très complète de la matière noire supersymétrique).

Les modèles d'Univers avec matière noire froide sont, de loin, les plus prometteurs. Lorsque nous invoquerons dans la suite de la matière noire, il s'agira toujours de matière noire froide.

Les inhomogénéités que nous observons aujourd'hui sous la forme de structures sont vraisemblablement présentes dans l'Univers primordial. L'Univers étant opaque avant la recombinaison, on ne peut espérer observer de structures au mieux jusqu'au rayonnement de fond cosmologique.

## 2.2 Généralités sur le rayonnement de fond cosmologique

Nous voulons dans cette partie énoncer certaines propriétés fondamentales très générales concernant le rayonnement de fond cosmologique.

Le CMB a été émis suite à l'association des électrons aux noyaux pour la première fois depuis le début de l'Univers lorsque la température permet à cette réaction chimique de se produire. Cette période s'appelle la recombinaison. Auparavant, la température de l'Univers était trop élevée par rapport à l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène et les atomes étaient immédiatement dissociés. Nous voulons savoir à quel moment de l'histoire de l'Univers cette période se situe. Nous supposons pour cela que le milieu est à l'équilibre thermodynamique. Ce milieu est un plasma essentiellement constitué de protons, d'électrons et de photons. La réaction chimique caractérisant l'équilibre entre ces espèces s'écrit :



Les densités numériques de chacune des espèces  $i$  sont données par :

$$n_i = g_i \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu_i - m_i}{T}}$$

où  $\mu_i$  est le potentiel chimique de l'espèce  $i$ ,  $m_i$  sa masse et  $g_i$  son facteur de dégénérescence (directement lié au spin).

La neutralité électrique du milieu nous assure que  $n_{e^-} = n_p$  et la conservation du nombre baryonique nous indique que  $n_B = n_p + n_H$ . On néglige les atomes d'hélium (on a en fait environ 1 atome d'hélium pour 10 d'hydrogène). Le coefficient  $g_i$  vaut 2 pour les protons et les électrons et 4 pour l'atome d'hydrogène (car fait de 2 particules de spin 1/2). L'équilibre chimique se traduit par le bilan des potentiels chimiques :

$$\mu_p + \mu_{e^-} = \mu_H.$$

Les photons, particules de masse nulle et qui sont leur propre antiparticule, sont à l'équilibre donc leur potentiel chimique est nul ; c'est pourquoi il n'intervient pas dans cette équation. On a la relation suivante entre les masses :

$$E_I = m_{e^-} + m_p - m_H = 13.6 \text{ eV}$$

où  $E_I$  est l'énergie d'ionisation de l'atome hydrogène. En éliminant les potentiels chimiques (exprimer pour cela de deux manières différentes  $e^{\frac{\mu_H - m_H}{T}}$ , une fois à partir de  $n_H$  et une autre à partir du produit  $n_{e^-} n_p$ ), on obtient :

$$n_H = \frac{g_H}{g_p g_{e^-}} n_p n_{e^-} \left( \frac{m_{e^-} T}{2\pi} \right)^{-3/2} e^{\frac{E_I}{T}},$$

où l'on a posé  $m_H \sim m_p$  dans le facteur précédant l'exponentielle. Pour caractériser la proportion d'atomes H par rapport aux baryons, on introduit le paramètre d'ionisation  $x$ , défini par :

$$x = \frac{n_p}{n_B} = \frac{n_p}{n_p + n_H}, \quad \text{il vérifie} \quad \frac{1-x}{x} = \frac{n_H}{n_p} = x \eta n_\gamma \left( \frac{m_{e^-} T}{2\pi} \right)^{-3/2} e^{\frac{E_I}{T}}$$

où l'on a posé  $n_B = \eta n_\gamma$ , avec  $\eta \sim 2.68 \times 10^{-8} \Omega_b h^2$  (voir Kolb & Turner (1990)). Tout l'intérêt de  $\eta$  est qu'il est que sa valeur est **constante** puisque  $n_B$  et  $n_\gamma$  varient tous les deux en  $1/a^3$ . On peut donc le mesurer aujourd'hui.  $n_\gamma$  est la fonction de distribution du corps noir, égale à  $2\zeta(3)T^3/\pi^2$ ; on obtient finalement :

$$\frac{1-x}{x^2} = \frac{4\sqrt{2}\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \eta \left( \frac{T}{m_{e^-}} \right)^{3/2} e^{\frac{E_I}{T}}. \quad (53)$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Saha, exprimée pour la variable d'ionisation  $x$ . Définir la température de recombinaison comme celle à laquelle 90 % des électrons se sont liés aux protons, revient à poser  $x = 0.1$  et de résoudre pour  $T$ . La relation entre température et *redshift* est  $T = (1+z) \times 2.728 \text{ K}$  (voir page 28); on trouve alors que la recombinaison s'est produite pour des *redshifts* compris entre 1200 et 1400 selon la valeur utilisée pour  $\Omega_b h^2$  (de 0.01 à 1, voir fig 16) :

$$\boxed{1200 \leq z_{\text{rec}} \leq 1400}.$$

Pour un *redshift* intermédiaire de 1300, on trouve une température de :

$$T_{\text{rec}} \sim 0.3 \text{ eV} \quad \text{soit} \quad 3600 \text{ K}.$$

Pour calculer l'âge de l'Univers correspondant, nous utilisons le fait que l'Univers est dominé par la matière (puisque  $z_{\text{rec}} \sim 1300$  et  $z_{\text{eq}} \sim 3500$ ) et que le temps écoulé depuis que la matière domine est beaucoup plus grand que le temps écoulé depuis le *Big-Bang* jusqu'à l'égalité matière-rayonnement. On fait donc l'approximation que l'Univers a toujours été dominé par la matière et donc que :

$$\begin{aligned} t_{\text{rec}} &= \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_0^{\text{NR}^{-1/2}} (1+z_{\text{rec}})^{-3/2} \\ &= 4 \times 10^{12} (\Omega_0^{\text{NR}} h^2)^{-1/2} \text{ s} \\ &= 140\,000 \times (\Omega_0^{\text{NR}} h^2)^{-1/2} \text{ ans} . \end{aligned}$$

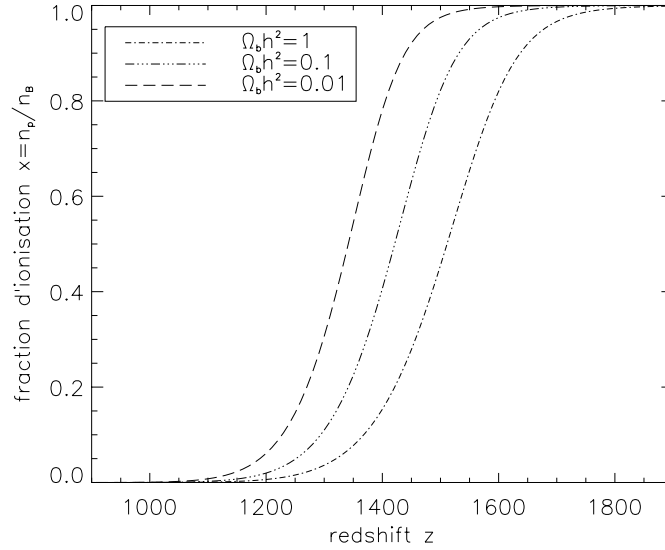


FIGURE 16 – **Variation de la fraction d'ionisation en fonction du redshift.** Pour 3 valeurs du produit  $\Omega_b h^2$ , on a représenté les variations de  $x$  en fonction de  $z$ . La recombinaison est définie comme étant le moment où  $x = 0.1$ , c'est-à-dire quand 90 % des électrons se sont liés aux protons. On trouve que, selon la valeur de  $\Omega_b h^2$ , la recombinaison s'est produite entre  $z = 1200$  ( $\Omega_b h^2 = 0.01$ ) et  $z = 1400$  ( $\Omega_b h^2 = 1$ ).

Pour des valeurs raisonnables de  $\Omega_0^{\text{NR}}$  (0.2) et de  $h$  (0.65), on trouve 500 000 ans.

Avec l'expansion, la température diminue et le libre parcours moyen des photons augmente. Le découplage des photons a lieu lorsque la distance moyenne séparant deux interactions est plus grande que la distance nous séparant de la surface de dernière diffusion (en d'autres termes l'intervalle de temps séparant deux interactions devient supérieur à l'intervalle de temps nous séparant du découplage, que l'on peut confondre avec l'âge de l'Univers aujourd'hui) :

$$\ell_\gamma \sim \frac{1}{n_{e^-} \sigma_T} \text{ cm} > c \times t_{\text{Univers}} \text{ cm},$$

où  $\sigma_T \sim 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$  est la section efficace de la diffusion Thomson et  $n_{e^-}$  est la densité volumique des électrons libres (c'est l'Eq. 44 avec  $v = c = 1$ ). Cette densité est donnée par :

$$n_{e^-} = x \eta n_\gamma \quad \text{avec} \quad n_\gamma = \frac{2k^3 \zeta(3)}{\pi^2 \hbar^3 c^3} T^3 \sim 400 (1+z)^3 \text{ cm}^{-3},$$

$\zeta$  étant la fonction de Riemann.

On en déduit :

$$\begin{aligned} n_{e^-} &= x \times 2.68 \times 10^{-8} \Omega_b h^2 \times 400 (1+z)^3 \text{ cm}^{-3} \\ &\sim x \times 10^{-5} \Omega_b h^2 (1+z)^3 \text{ cm}^{-3}. \end{aligned}$$

D'où le libre parcours moyen des photons :

$$\ell_\gamma \sim 10^{18} x^{-1} (\Omega_b h^2)^{-1} (1+z)^{-3} \text{ cm} \quad \text{avec} \quad x = x(z); \quad (54)$$

nous constatons qu'il augmente puisque la densité des électrons libre diminue au fur et à mesure que la recombinaison se poursuit. Pour comparer  $\ell_\gamma$  à l'âge de l'Univers, on fait la même approximation que dans le cas de la recombinaison et on trouve pour le découplage un âge de :

$$\begin{aligned} t_{\text{dec}} \sim t_{\text{Univers}} &= \frac{2}{3} H_0^{-1} (\Omega_0^{\text{NR}} h^2)^{-1/2} (1 + z_{\text{dec}})^{-3/2} \text{ s}, \\ &\sim 10^{17} (\Omega_0^{\text{NR}} h^2)^{-1/2} (1 + z_{\text{dec}})^{-3/2} \text{ s}. \end{aligned} \quad (55)$$

On peut donc tracer les courbes  $\ell_\gamma = g(1 + z)$  et  $t_{\text{Univers}} = f(1 + z)$  pour différentes valeurs des paramètres  $\Omega_0^{\text{NR}} h^2$  pour l'âge et  $\Omega_b h^2$  pour le libre parcours moyen (voir FIG. 17). Il faut également tenir compte de la dépendance en  $z$  du paramètre d'ionisation  $x(z)$  via l'équation de Saha 53. Cela nous permet de donner un intervalle pour  $z_{\text{dec}}$  :

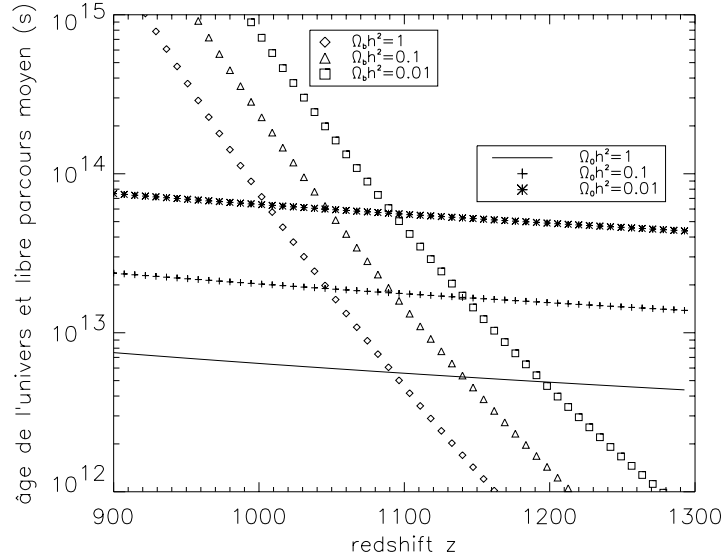


FIGURE 17 – *Redshift du découplage des photons*. Le découplage des photons a lieu lorsque leur libre parcours moyen (courbes les plus pentues en valeur absolue, dépendantes du paramètre  $\Omega_b h^2$ ) devient plus grand (en durée) que l'âge de l'Univers (courbes presque horizontales, dépendantes du paramètre  $\Omega_0^{\text{NR}} h^2$ ). Selon les valeurs de ces deux paramètres, le *redshift* de découplage se situe dans la région délimitée par les intersections des deux familles de courbes. Ce *redshift* est proche de 1100.

$$\boxed{1100 \leq z_{\text{dec}} \leq 1200}$$

correspondant à une température de :

$$T_{\text{dec}} \sim 3000 \text{ K} = 0.25 \text{ eV} \quad \text{et à un âge de} \quad t_{\text{dec}} \sim 200\,000 (\Omega_0^{\text{NR}} h^2)^{-1/2} \text{ ans.}$$

Pour  $\Omega_0^{\text{NR}} = 0.2$  et  $h = 0.65$ , on trouve  $t_{\text{dec}} = 600\,000$  ans. Une fois les photons découplés, ils se propagent librement. Nous les détectons aujourd'hui sous la forme d'un rayonnement de corps noir d'une température de  $2.728 \pm 0.004$  K à 95 % de niveau de confiance (Fixsen et al., 1996) ; c'est le CMB.



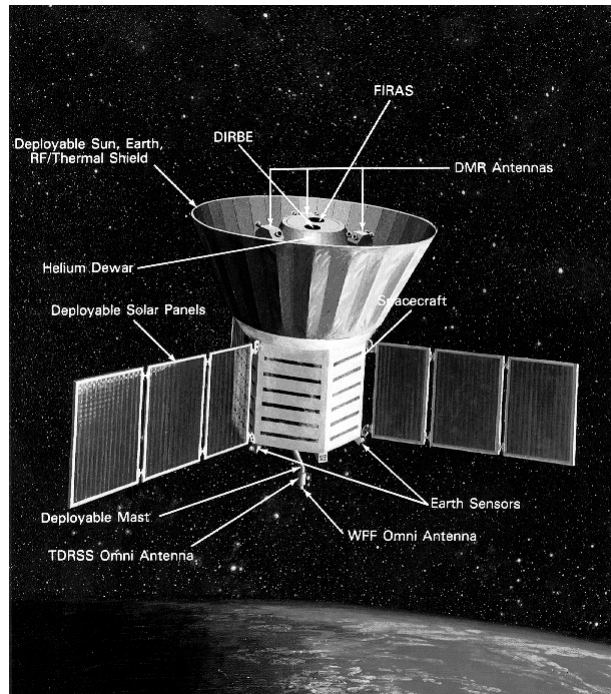


FIGURE 18 – **Instruments du satellite COBE.** Vue d’ensemble du satellite COBE. L’instrument DIRBE (“Diffuse Infrared Background Experiment”) était destiné à rechercher un fond diffus infrarouge (Puget et al., 1996).

Le CMB est une des prédictions génériques de la théorie du *Big-Bang*; c’est pour cette raison que de nombreuses expériences ont étudié ses principales caractéristiques, notamment son spectre afin de vérifier qu’il s’agit bien de celui d’un corps noir, sa température et son isotropie. Parmi ces expériences, citons la plus précise et la plus complète d’entre elles, le satellite américain COBE<sup>14</sup> lancé en 1989 (voir FIG. 18). Voici les mesures et résultats dus à COBE :

– **le dipôle**

Le système solaire est animé d’un mouvement relatif par rapport au CMB. Selon la direction dans laquelle nous observons le rayonnement, les photons ne seront pas vus avec la même énergie par effet Doppler. L’anisotropie de température associée (de l’ordre de  $10^{-3}$  K) n’est donc pas intrinsèque au CMB, c’est un effet Doppler pur et il convient de le retirer pour étudier le CMB lui-même. COBE a mesuré que le dipôle était dans la direction  $(l, b) = (264.31^\circ, 48.05^\circ)$  (coordonnées galactiques) avec une amplitude de 3.358 mK. L’anisotropie de température due au dipôle mesurée dans une direction faisant un angle  $\theta$  avec celle du dipôle est :

$$\frac{\Delta T(\theta)}{T_0} = \frac{3.358 \times 10^{-3}}{T_0} \cos \theta, \quad \text{avec } T_0 = 2.728 \text{ K.}$$

– **le spectre**

L’instrument FIRAS (“Far Infrared Absolute Spectrophotometer”) du satellite a mesuré la puissance rayonnée par le CMB à différentes fréquences ; Mather et al. (1994), ainsi que Fixsen et al. (1996) ont donc pu reconstruire le spectre du CMB. Il s’agit d’un

14. Pour un récit détaillé de la mission COBE et des expériences liées au CMB, on peut lire le livre de Smoot (1994), traduit en français, “Les rides du temps”, Flammarion 1994.

spectre de corps noir presque parfait de température  $T = 2.728 \pm 0.004$  K (il constitue en fait le meilleur corps noir que l'on connaisse actuellement ; même en laboratoire, on n'est pas capable d'en obtenir un meilleur).

– **les fluctuations de température**

L'instrument D.M.R. ("Differential Microwave Radiometer") a mesuré les *différences*

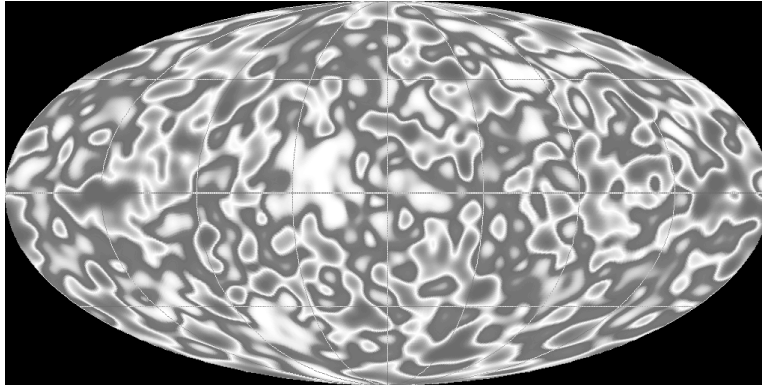


FIGURE 19 – **Anisotropies du CMB.** Le ciel, tel qu'il a été vu par COBE en utilisant 2 années de mesures. Le niveau moyen du ciel est  $2.728 \pm 0.004$  K à 95 % de niveau de confiance et les fluctuations autour de cette valeur moyenne ont une dispersion de  $30 \pm 5$   $\mu$ K. Les zones claires sont un peu plus chaudes et les sombres, un peu plus froides. La taille angulaire de la plus petite structure est de  $10^\circ$ .

de température entre deux points du ciel. Sa résolution angulaire est de  $10^\circ$ . Après avoir retiré toutes les sources de bruit et de contamination possibles par d'autres processus, Smoot et al. (1992) ont montré que le CMB n'était pas rigoureusement uniforme et qu'il existait des anisotropies intrinsèques de température. Ces fluctuations ont une dispersion de  $30 \pm 5$   $\mu$ K. Ce résultat très important signifie d'une part que le CMB a un haut degré d'homogénéité ( $\Delta T/T \sim 10^{-5}$ ), ce qui valide notre hypothèse du principe cosmologique (voir pour comparaison la FIG. 3 page 6). D'autre part, on pense que les fluctuations de température observées sont dues à des inhomogénéités de densité de matière déjà présentes lors du découplage et ont servi de germes pour la croissance des structures que nous observons aujourd'hui. Ces structures ont pu croître par instabilité gravitationnelle. La carte présentée dans la FIG. 19 a été construite à partir de 2 années de données de DMR après soustraction du dipôle et du plan galactique.

L'origine des inhomogénéités présentes dans la carte des fluctuations de température du CMB n'est pas encore complètement clarifiée. Deux théories de l'Univers primordial prétendent pouvoir générer de telles inhomogénéités : l'inflation et les défauts topologiques. Les mesures actuelles semblent favoriser très nettement celles provenant de l'inflation. Pour cette raison, nous n'aborderons pas les défauts topologiques.

## 2.3 Inflation

Nous avons commencé notre observation de l'Univers inhomogène par l'Univers actuel. Nous sommes remontés dans le temps, jusqu'à quelques centaines de milliers d'années, au moment de l'émission du CMB, où les traces des inhomogénéités sont déjà présentes. Nous nous intéressons maintenant à l'origine des fluctuations. Nous n'étudierons pas le mécanisme

de génération des fluctuations primordiales (qui reste encore un domaine assez controversé), nous en donnerons juste une idée phénoménologique. La prédiction essentielle de l’inflation — vérifiable expérimentalement — est que les fluctuations produites obéissent à une statistique *gaussienne*. Les expériences de mesure des anisotropies du CMB, en plus de mesurer les paramètres cosmologiques, se proposent de déterminer la statistique des fluctuations de température du CMB, afin de contraindre les mécanismes de fabrication des fluctuations primordiales.

L’inflation a été initialement proposée pour résoudre certains problèmes que le modèle standard ne parvenait pas à surmonter. Nous allons voir quels étaient ces problèmes. Pour cela, nous considérerons que l’inflation s’est produite suffisamment tôt pour pouvoir négliger la constante cosmologique à cette époque ; elle peut par contre être dominante aujourd’hui car l’expansion a diminué la valeur de la densité  $\rho$ .

### 2.3.1 Les problèmes de l’“ancien” modèle standard.

La théorie de l’inflation a été proposée pour la première fois par Alan Guth, en 1981 (Guth, 1981). Le titre de son article est : “*Inflationary Universe : A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*”. En effet, malgré les innombrables succès du modèle standard décrit par l’Eq. de Friedmann :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (56)$$

(c’est l’Eq. 15 *sans constante cosmologique*) il restait des points précis qui sont restés sans réponse, comme les problèmes de l’horizon et de la platitude (“flatness problem”). Il repose également sur certaines *conditions initiales* qu’on a dû supposer sans pouvoir les justifier et les expliquer. Ce modèle standard était en fait surtout celui des années 70 : l’ajout dans ce modèle de l’inflation est devenu pratiquement incontournable dans la communauté scientifique de sorte que dans le “modèle standard” moderne, on inclut l’inflation.

**le problème de la platitude.** Toute la discussion qui va suivre se place dans le contexte de l’ancien modèle standard, c’est-à-dire sans constante cosmologique.

On peut écrire l’équation de Friedmann sous la forme suivante (avec  $\Omega = \Omega_m$ ) :

$$|\Omega - 1| = \frac{|\kappa|}{H^2 a^2} = \frac{|\kappa|}{\dot{a}^2}. \quad (57)$$

L’expansion de l’Univers se fait en se ralentissant (c’est du moins ce qu’on croyait à cette époque), c’est-à-dire que  $|\dot{a}|$  est une fonction décroissante du temps. Or  $\dot{a}^2 = H^2 a^2$  ce qui signifie que  $|\Omega - 1|$  *s’éloigne de 0*. À partir de l’Eq. 29 page 18, on peut exprimer l’équation de Friedmann en  $z$  en fonction de cette même équation en  $z'$ , en ne considérant pas de constante cosmologique :

$$H(z')^2 = H(z)^2 \left( \Omega^R \left( \frac{1+z'}{1+z} \right)^4 + \Omega^{\text{NR}} \left( \frac{1+z'}{1+z} \right)^3 + (1-\Omega) \left( \frac{1+z'}{1+z} \right)^2 \right)$$

avec  $\Omega = \Omega^{\text{NR}} + \Omega^{\text{R}}$  et  $\Omega_\kappa = 1 - \Omega$ . De cette équation, on en déduit facilement celle gouvernant l'évolution de  $\Omega = \Omega^{\text{NR}} + \Omega^{\text{R}}$  :

$$\begin{aligned} \Omega' - 1 &= \frac{\Omega - 1}{1 - \Omega + \Omega^{\text{R}} \left( \frac{1+z'}{1+z} \right)^2 + \Omega^{\text{NR}} \left( \frac{1+z'}{1+z} \right)} \\ &= \frac{\Omega - 1}{1 - \frac{z-z'}{1+z} \underbrace{\left( \Omega^{\text{NR}} + \Omega^{\text{R}} \frac{2+z+z'}{1+z} \right)}_{\text{toujours positif}}}. \end{aligned} \quad (58)$$

Nous pouvons déduire de cette équation plusieurs conséquences importantes :

- pour des grandes valeurs de  $z'$ , c'est-à-dire quand on va vers le passé, *tous les modèles d'Univers tendent vers le modèle critique* :

$$|\Omega' - 1| \stackrel{z' \gg 1}{\sim} \frac{|\Omega - 1| (1+z)^2}{\Omega^{\text{R}} z'^2} \stackrel{z' \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 ;$$

- si, à un *redshift*  $z$  donné, on a la stricte égalité  $\Omega = 1$  alors quelque soit  $z'$  ( $z' < z$  ou  $z' > z$ ),  $\Omega' = 1$ . Un Univers plat sans constante cosmologique reste plat et a toujours été plat ;
- le point  $\Omega = 1$  est *instable*. Dans un Univers en expansion, supposons qu'à  $z$  on ait  $\Omega = 1 + \varepsilon$  avec  $0 < |\varepsilon| \ll 1$  ; si nous regardons l'évolution de  $\Omega$  avec le temps, alors sa valeur en  $z'$ , avec  $z > z'$ , vérifie d'après la première forme de l'Eq. 58 :

$$\Omega' \sim -\frac{\Omega^{\text{NR}}}{\varepsilon} \frac{1+z'}{1+z} \quad \text{et} \quad \Omega' \stackrel{z \gg z'}{\rightarrow} 0.$$

Avec l'expansion, l'Univers s'éloigne de plus en plus d'un Univers critique.

Dans un modèle sans constante cosmologique, il découle de ce qui précède que, dans l'hypothèse où  $\Omega_0 = \mathcal{O}(1)$  aujourd'hui (après une quinzaine de milliards d'années environ !), c'est que dans le passé  $\Omega$  a dû être extrêmement proche de 1 (c'est l'Eq. 58 avec  $z = 0$  et  $z' \gg 1$ ). On appelle cet ajustement “fine tuning” en anglais, illustré dans la FIG. 20. À partir du fait que  $\Omega_0 = \mathcal{O}(1)$  (aujourd'hui), on peut montrer que :

$$\Omega(z_{\text{Planck}}) - 1 = \mathcal{O}(10^{-60}) \quad (59)$$

à l'époque de Planck ( $t_{\text{Planck}} = \mathcal{O}(10^{-43})$  s ou  $z_{\text{Planck}} \sim 10^{32}$ ). Le fait que  $\Omega$  ait été aussi proche de 1 dans le passé revient à négliger complètement le terme de courbure  $\kappa/a^2$  ( $\Omega_\kappa = \mathcal{O}(10^{-60})$ ) dans l'Eq. 56. Dans le cadre de ce modèle standard, aucun mécanisme ne peut expliquer que  $\Omega$  soit égal à 1. Il faut considérer qu'il s'agit d'une *condition initiale*. Si l'Eq. 59 n'avait pas été vérifiée avec une telle précision à l'époque de Planck, soit l'Univers se serait recontracté depuis longtemps, soit il serait si dilué qu'aucune étoile n'aurait pu se former. Le problème de la platitude est donc de devoir *admettre comme condition initiale* que l'Univers a été, à l'époque de Planck, suffisamment proche de la platitude (à  $10^{-60}$  près) pour qu'aujourd'hui encore le terme de courbure soit toujours proche de 0.

**Le problème de l'horizon.** La taille observable de la région correspondant à l'époque de l'émission du CMB est donnée par l'intersection de notre cône de lumière passé avec

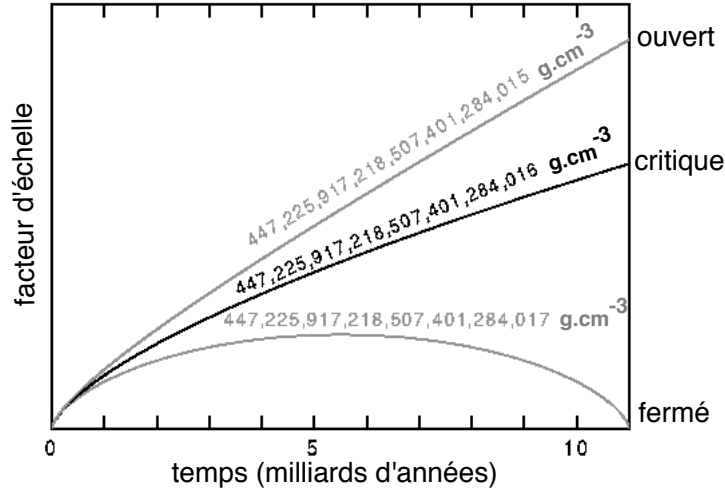


FIGURE 20 – **Problème de la platitude.** Même après 15 milliards d’années d’expansion il semble que nous soyons très proches aujourd’hui d’un Univers plat (critique). Ce fait observationnel implique qu’à  $10^{-9}$  s après le *Big-Bang*, la densité  $\rho$  de l’Univers a dû être proche de la densité critique à  $10^{-23}$  près; en extrapolant jusqu’au temps de Planck, cet ajustement a dû être vérifié à  $10^{-60}$  près. La figure est adaptée de [http://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmo\\_03.htm](http://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmo_03.htm).

le plan d’espace pris à  $t = t_{\text{dec}}$ . Nous notons cette taille  $d_{\text{passé}}(t_{\text{dec}})$ , c’est notre horizon observable. L’image, homogène (à  $10^{-5}$  près), est constituée par les photons provenant des points d’espace-temps situés dans notre horizon. L’homogénéité de ce rayonnement montre que toute la région observée a été en contact causal. Or la taille des régions causalement connectées à  $t = t_{\text{dec}}$  est bien plus petite que la région observable : il n’y a donc aucune raison, selon ce modèle, pour que le CMB nous paraisse homogène sur tout le ciel (voir FIG. 21).

Le problème de l’horizon réside dans le fait que la distance  $AA'$  est *beaucoup plus grande* que le cône de lumière futur  $d_{\text{futur}}(t_{\text{dec}})$  des régions  $Z1Z2$  et  $Z'1Z'2$ . Cette dernière distance est la distance maximale sur laquelle la physique causale a pu agir (c’est-à-dire thermaliser, homogénéiser). Les régions  $Z1Z2$  et  $Z'1Z'2$  sont donc, chacune d’entre elles et d’une façon *indépendante*, thermalisées. Il est donc surprenant que tout le ciel nous paraisse homogène alors que seules les petites régions  $Z1Z2$  et  $Z'1Z'2$  peuvent l’être. Nous allons calculer l’angle sous lequel est vu l’horizon à l’époque du découplage, dans le cas d’un Univers plat  $\Omega = 1$ . Nous devons pour cela calculer la taille physique de l’horizon à  $t = t_{\text{dec}}$ . Cette taille est donnée par (voir l’Eq. 32 page 19) :

$$d_{\text{Horizon}} = \frac{a_{\text{dec}}c}{a_0H_0} \left( \int_{z_{\text{dec}}}^{z_{\text{eq}}} \frac{dz}{E(z)} + \int_{z_{\text{eq}}}^{+\infty} \frac{dz}{E(z)} \right) \quad (60)$$

avec

$$E(z) \sim (\Omega_0^R(1+z)^4 + \Omega_0^{\text{NR}}(1+z)^3)^{1/2} \quad (61)$$

et

$$\Omega_0^R = \frac{\Omega_0^{\text{NR}}}{1+z_{\text{eq}}} \quad \text{par définition de } z_{\text{eq}}.$$

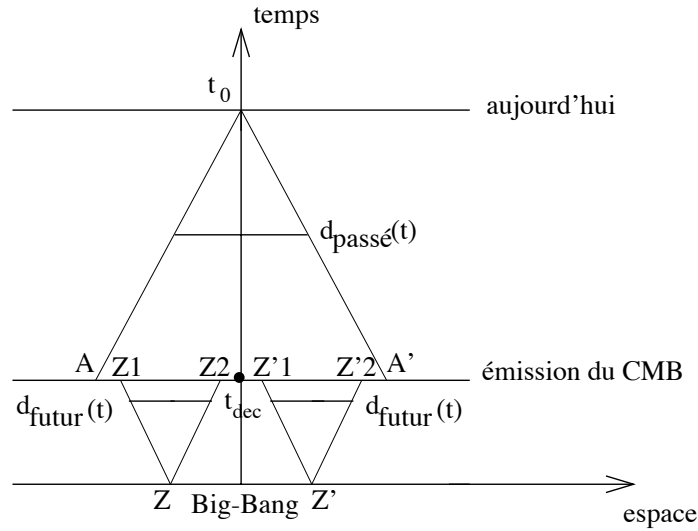


FIGURE 21 – **Problème de l’horizon.** La distance  $AA'$  (notre horizon visible actuel) est supérieure à la distance  $d_{\text{futur}}(t_{\text{dec}})$  des régions  $Z1Z2$  et  $Z'1Z'2$ . Le CMB n’a, dans ce modèle, aucune raison d’être homogène sur toute la sphère céleste puisque les points  $Z$  et  $Z'$  n’ont jamais été en contact causal.

En ne prenant que la partie dominante dans chacune des intégrales, on trouve pour l’horizon :

$$d_{\text{Horizon}} = \frac{a_{\text{dec}} c}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_0^{\text{NR}}}} \left( \frac{2}{\sqrt{1 + z_{\text{dec}}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + z_{\text{eq}}}} \right).$$

Nous avons ensuite besoin de calculer la distance angulaire. Elle est donnée par (voir Eq. 34 page 20) :

$$D_{\text{ang}} = \frac{a_{\text{dec}} c}{a_0 H_0} \int_0^{z_{\text{dec}}} \frac{dz}{E(z)} \quad (62)$$

soit

$$D_{\text{ang}} = \frac{2 c a_{\text{dec}}}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_0^{\text{NR}}}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + z_{\text{dec}}}} \right).$$

L’angle sous lequel nous voyons aujourd’hui l’horizon tel qu’il était à l’époque du découplage est donc :

$$\delta\theta \cong \frac{d_{\text{Horizon}}}{D_{\text{ang}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 + z_{\text{dec}}}} - \frac{1}{2\sqrt{1 + z_{\text{eq}}}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + z_{\text{dec}}}}}. \quad (63)$$

Pour les valeurs que nous avons rencontrées jusque là, c’est-à-dire  $z_{\text{dec}} \sim 1100$  et  $z_{\text{eq}} \sim 3500$ , on trouve un angle de  $1^\circ$ , c’est l’angle sous-tendu par chacune des régions  $Z1Z2$  et  $Z'1Z'2$  de la FIG. 21.

Le modèle standard de la cosmologie ne peut donc pas expliquer l’homogénéité du CMB sur *toute* la sphère céleste ( $180^\circ$  dans ces coordonnées sphériques) mais seulement sur  $1^\circ$ .

**Le problème de la génération des fluctuations.** L'Univers, nous l'avons vu, n'est pas homogène. Il existe des structures qui se sont formées par effondrement gravitationnel de petites inhomogénéités, celles que nous voyons dans le CMB. On peut décomposer ces fluctuations en modes de Fourier de longueur d'onde physique  $\lambda(t) = 2\pi a(t)/k$ . Il est intéressant d'étudier le comportement de cette perturbation dans un Univers dominé soit par la matière soit par le rayonnement. Dans un tel Univers,  $a(t) \propto t^n$  avec  $n = 1/2$  ou  $2/3$ .  $\lambda$  étant proportionnel à  $a$ , aura la même dépendance en  $t$ . Par contre, le rayon de Hubble,  $R_H(t) = H^{-1}(t) = t/n$ , croît plus rapidement que  $\lambda$ . La pente de la fonction  $R_H$  change lorsque  $t = t_{\text{eq}}$  (voir fig 22). On montre que si les perturbations s'étaient formées récemment

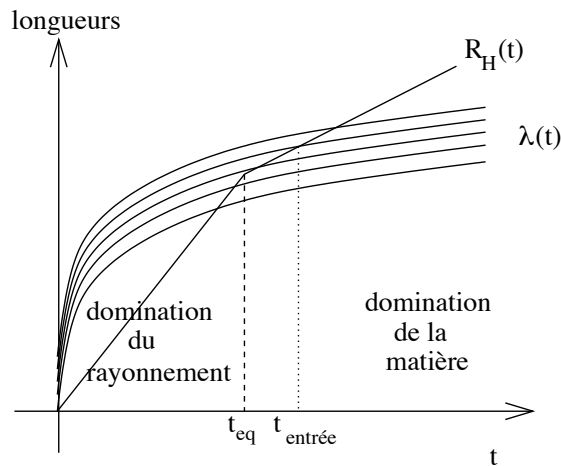


FIGURE 22 – **Problème de la formation des structures.** Dès les premiers instants, les perturbations (les courbes indexées par  $\lambda(t)$ ) sont situées au-delà de l'horizon. Toute échelle astrophysique pertinente aujourd'hui a été beaucoup plus grande que le rayon de Hubble à une certaine époque. La physique causale n'entre donc pas en ligne de compte pour ces échelles, seule la gravitation induite par la distribution à grande échelle (i.e. non connectées causalement) de matière peut influencer les perturbations. Celles-ci ne peuvent entrer dans l'horizon qu'aux instants  $t_{\text{entrée}}$ . Une fois à l'intérieur, la physique causale peut les faire évoluer.

et à l'intérieur du rayon de Hubble (c'est ce qui se produit dans le modèle que nous considérons ici), elles n'auraient pas eu le temps de s'effondrer pour donner les structures que nous observons aujourd'hui. Elles ont donc été produites bien plus tôt, et à l'extérieur du rayon de Hubble. À cette échelle, seule la gravitation induite par la densité globale a pu les former (puisque la physique causale locale n'a pas eu le temps de s'exprimer). Le mécanisme de formation des structures proposé dans ce contexte est celui des défauts topologiques, très défavorisé par les mesures à haute résolution angulaire du CMB. Il apparaît ainsi que le modèle standard n'est pas capable de produire des fluctuations ayant les bonnes propriétés, celles capables de former les structures existantes.

### 2.3.2 Le concept d'inflation ; solutions aux problèmes du modèle standard

Il est possible de résoudre les trois problèmes vus précédemment en supposant que l'expansion de l'Univers s'est faite de manière accélérée pendant sa prime jeunesse. Une telle expansion permettrait aux échelles physiques d'avoir été plus petites que le rayon de Hubble

à des époques suffisamment reculées. Expansion accélérée signifie  $\ddot{a} > 0$  (ou encore  $\dot{a}$  est croissante avec le temps, c'est ainsi que l'on *définit* l'inflation), ce que l'on n'a jamais avec une loi de croissance en  $t^n$ , avec  $0 < n < 1$ . Il faudrait donc une puissance  $n > 1$  ou bien, par exemple, une croissance exponentielle  $a(t) \propto e^{H(t_f - t_i)}$ , où  $H$  est constante pendant cette période. L'expansion de l'Univers serait alors due à la domination du rayonnement jusqu'au début de l'inflation (donc de  $t = 0$  à  $t = t_i$ , où  $t_i$  caractérise le début de l'inflation), puis commence une croissance exponentielle jusqu'à la fin de l'inflation ( $t = t_f$ ). Puis l'Univers est à nouveau dominé par le rayonnement jusqu'à  $t = t_{\text{eq}}$ . Les valeurs typiques sont  $t_i \sim 10^{-35}$  s,  $H \sim 10^{10}$  GeV et  $t_f \sim 70H^{-1} \sim 10^{-32}$  s. Dire que pendant l'inflation  $\ddot{a} > 0$  est équivalent à dire que :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{H^{-1}}{a} \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{\dot{a}} < 0 \quad (64)$$

ou encore que :

$$p < -\frac{\rho}{3}, \quad (65)$$

via l'équation de Friedmann 16 page 10. La forme 64 montre que *pendant l'inflation, le rayon de Hubble diminue* (mesuré en coordonnées comobiles à cause du facteur  $1/a$ , c'est-à-dire reste constant en coordonnées propres), alors qu'à toute autre époque, il augmente avec le temps (puisque alors  $\dot{a}$  est décroissante avec le temps). Pendant l'inflation, la longueur d'onde propre de la perturbation augmente tandis que le rayon de Hubble reste constant. Il est donc possible, et c'est ici que réside tout l'intérêt de l'inflation, que la perturbation soit à l'*intérieur du rayon de Hubble*, lui permettant ainsi d'évoluer selon la physique causale. Une perturbation caractérisée par son mode  $k$  croise le rayon de Hubble dès que :

$$\frac{k}{Ha(t_{\text{croise}})} = 2\pi. \quad (66)$$

Pendant l'inflation, la perturbation devient plus grande que le rayon de Hubble lorsque  $(2\pi/k)a(t_{\text{sortie}}) = H^{-1}$ . Après la fin de l'inflation, le rayon de Hubble augmente à nouveau et rattrape la perturbation à  $t = t_{\text{entrée}}(\lambda)$ . L'inflation permet à la perturbation d'être à l'intérieur du rayon de Hubble à deux moments différents : avant  $t_{\text{sortie}}(\lambda)$  et après  $t_{\text{entrée}}(\lambda)$  (voir FIG. 23). Toute perturbation générée par un processus physique causal avant  $t_{\text{sortie}}(\lambda)$  sera gelée entre  $t_{\text{sortie}}(\lambda)$  et  $t_{\text{entrée}}(\lambda)$  et pourra mener à des structures après  $t_{\text{entrée}}(\lambda)$ . L'inflation procure un mécanisme permettant aux perturbations d'évoluer par des processus causaux suffisamment tôt pour pouvoir former les structures observées.

Le problème de la platitude est naturellement résolu dans ce modèle. En effet, l'inflation est un mécanisme qui *implique*  $\Omega \rightarrow 1$  puisque le produit  $Ha = \dot{a}$  augmente avec le temps. Toute période d'inflation rapproche  $\Omega$  de 1 et donc d'un Univers *plat*  $\kappa = 0$ . En effet, un Univers avec constante cosmologique sera tel que :

$$\Omega' + \Omega'_\Lambda - 1 = \frac{\Omega + \Omega_\Lambda - 1}{1 - (z - z') \left( \frac{\Omega^{\text{NR}}}{1+z} + \Omega^{\text{R}} \frac{2+z+z'}{(1+z)^2} - \Omega_\Lambda \frac{2+z+z'}{(1+z')^2} \right)}.$$

$\Omega_\Lambda$  apparaît dans cette équation différemment des autres densités : d'une part elle vient avec le signe “-” et d'autre part elle fait intervenir le terme  $(1+z')^2$ . Si l'on considère que  $z$  est dans le passé de  $z'$ , alors  $z > z'$  et les termes en  $\Omega^{\text{NR}}$  et  $\Omega^{\text{R}}$  deviennent négligeables par



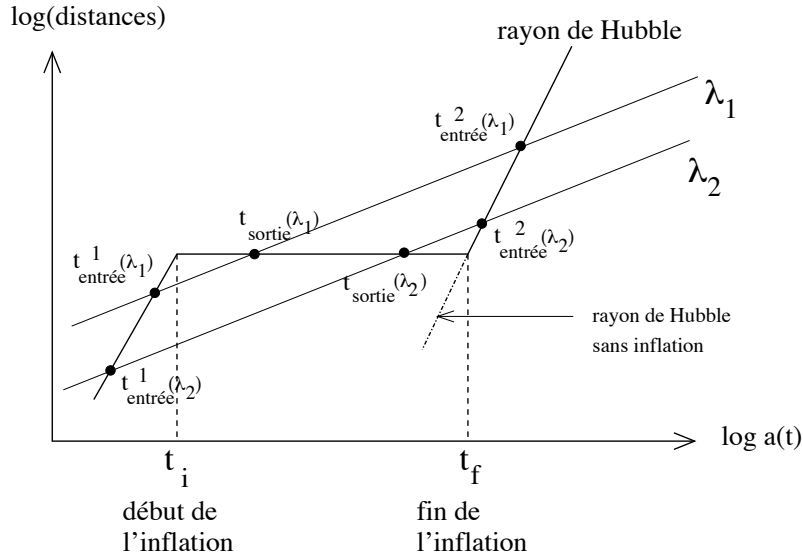


FIGURE 23 – **Formation des structures avec inflation.** Avant le début de l’inflation, l’Univers est dominé par le rayonnement : une perturbation donnée ( $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$ ) est encore située au-delà du rayon de Hubble, comme dans le cas d’un Univers non inflationnaire. Elle rentre dans le rayon de Hubble à  $t^1_{\text{entrée}}(\lambda_i) < t_i$  et peut évoluer selon les lois de la physique causale. Pendant l’inflation, le rayon de Hubble reste constant alors que les perturbations continuent de croître, leur permettant de sortir du rayon de Hubble à  $t = t_{\text{sortie}}(\lambda_i)$ . Elle est alors “gelée”, c’est-à-dire qu’elle n’évolue plus. Après l’inflation, le rayon de Hubble augmente à nouveau et plus rapidement que les perturbations, permettant à  $\lambda_i$  de rentrer dans le rayon de Hubble une deuxième fois à  $t = t^2_{\text{entrée}}(\lambda_i)$ ; elle continue son évolution pour former les structures.

rapport au terme en  $\Omega_\Lambda$  et il reste, si  $\Omega + \Omega_\Lambda \neq 1$  :

$$\frac{\Omega' + \Omega'_\Lambda - 1}{\Omega + \Omega_\Lambda - 1} \underset{z \gg z'}{\approx} \frac{(1 + z')^2}{\Omega_\Lambda z^2} \underset{z \gg z'}{\rightarrow} 0.$$

Un Univers avec constante cosmologique tend vers un Univers critique avec le temps.

Quant au problème de l’horizon, il est résolu en ce sens qu’une expansion exponentielle juste après le *Big-Bang* permet aux deux points  $Z$  et  $Z'$  de rentrer en contact causal, voir la FIG. 24.

### 2.3.3 Principe de la théorie de l’inflation

Nous avons vu que la condition d’avoir de l’inflation peut s’écrire (voir Eq. 65) :

$$\rho + 3p < 0.$$

Si la densité d’énergie de l’Univers est dominée par celle d’un champ scalaire, alors cette condition est automatiquement vérifiée. On montre que dans ce cas,  $p = -\rho$ . L’existence d’un tel champ scalaire est prédite par la physique des particules. Les champs scalaires décrivent les particules de spin 0. Ils apparaissent lors d’une brisure spontanée de symétrie : par exemple, celle de la symétrie électrofaible fait apparaître le boson de Higgs, décrit par un champ

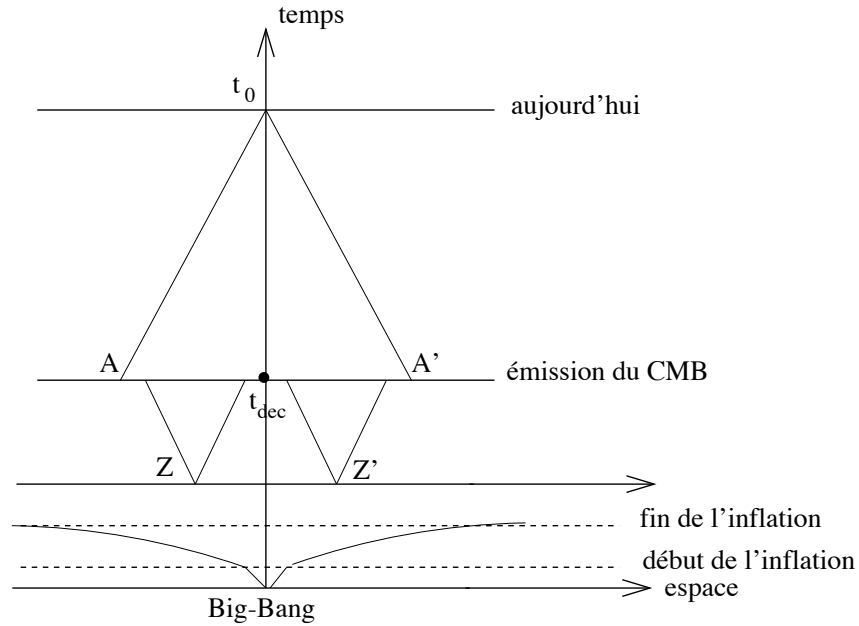


FIGURE 24 – **Solution au problème de l’horizon.** Une expansion accélérée de l’Univers peu de temps après le *Big-Bang* permet aux deux points  $Z$  et  $Z'$  d’avoir été en contact causal, donc d’être à la même température, ce qui n’est pas le cas sans inflation (comparer avec la FIG. 21). La température des régions issues de  $Z$  et  $Z'$  au moment du découplage sera donc aussi la même bien que les régions considérées ne soient pas en contact causal (car leur distance relative est supérieure à l’horizon). De cette façon, on explique pourquoi le CMB est homogène sur tout le ciel.

scalaire, le champ de Higgs. L’Univers primordial ayant été le théâtre de plusieurs brisures de symétrie, l’on s’attend à l’existence de champs scalaires à cette époque. À une température d’environ  $10^{14}$  GeV, les interactions forte et électrofaible sont unifiées. Dans la plupart des modèles, c’est à cette échelle qu’a lieu l’inflation. Il existe une grande variété de théories inflationnaires avec des champs scalaires (voir Lyth & Riotto (1999)). Nous allons décrire quelques aspects caractéristiques des théories inflationnaires (voir Padmanabhan (1993)).

L’évolution du champ scalaire  $\phi$  est gouvernée par son potentiel  $V(\phi)$  qui admet un minimum absolu pour  $\phi = \sigma \neq 0$  (c’est l’état fondamental du champ). La *forme* du potentiel dépend de la température d’équilibre  $T$  du système avec lequel il interagit, la position de l’état fondamental va donc lui aussi changer. Pour une température  $T$  supérieure à une certaine température critique  $T_c$ , le minimum du potentiel est en  $\phi = 0$  et *pas* en  $\phi = \sigma$  et la valeur du potentiel en ce point est de l’ordre de  $V(0) \sim (10^{14} \text{ GeV})^4$ . Pour  $T \sim T_c$ , un autre minimum apparaît à  $\sigma$ . Pour  $T \ll T_c$ ,  $\sigma$  est le vrai minimum (c’est-à-dire absolu) du potentiel :  $V(\sigma) = 0 \ll V(0)$ . Lors de la chute de température, le champ qui se trouvait en  $\phi = 0$  ne passe pas instantanément à  $\phi = \sigma$ , la transition peut demander un certain intervalle de temps pendant lequel la densité d’énergie du champ est constante, égale à  $V(0)$ . L’équation de Friedmann 56 nous montre que dans ce cas l’expansion de l’Univers est exponentielle. Le passage vers  $\phi = \sigma$  marque la fin de l’expansion (puisqu’alors la densité d’énergie du champ devient nulle). L’expansion exponentielle va diminuer la température jusqu’à quelques K. Plusieurs modèles existent, avec des potentiels différents, mais la plupart sont basés sur le fait que le champ  $\phi$  accède *lentement* à sa valeur d’équilibre absolu  $\sigma$ . Ceci est nécessaire pour que

l'inflation dure suffisamment longtemps pour résoudre les problèmes énoncés précédemment. On parvient à ces résultats en donnant au potentiel une forme assez plate pour que le champ le parcourt lentement : c'est le roulement lent ("slow-roll"). Lorsque le champ approche de son minimum absolu, il est soumis à un potentiel harmonique (développement limité du second ordre autour de  $\phi = \sigma$ ) et va osciller avec une pulsation  $\omega^2 = V''(\sigma)$ . Ces oscillations sont amorties par l'expansion de l'Univers, et par la décroissance du champ en d'autres particules en un temps de décroissance caractéristique  $\Gamma^{-1}$  (voir Kolb & Turner (1990)). Si  $\Gamma^{-1} \ll H^{-1}$  alors l'énergie interne du champ  $\rho = (1/2)\dot{\phi}^2 + V(\phi)$  est convertie en particules relativistes en un temps  $\Delta t \sim \Gamma^{-1}$ . L'Univers connaît alors une phase de réchauffement ("reheating") jusqu'à la température qu'il avait avant l'inflation (en ordre de grandeur).

La source des perturbations générées par l'inflation sont les fluctuations quantiques du champ scalaire. La difficulté majeure dans le calcul des fluctuations est le passage du domaine quantique au domaine classique et nous n'aborderons pas cette question ici. Le résultat fondamental est que les fluctuations générées obéissent à une *statistique gaussienne* (Bardeen et al., 1986; Kiefer et al., 1998). C'est une prédiction assez générale de l'inflation car la plupart des théories inflationnaires prédisent cette gaussianité. Les fluctuations produites vont être, à cause de l'expansion, étirées sur des échelles bien plus grandes que le rayon de Hubble et vont se traduire par des fluctuations dans la *métrie* (voir section 2.4.5, page 70). Leur amplitude est par contre très faible. Elle augmente jusqu'à devenir macroscopique lors du réchauffement quand les particules créées à ce moment se propagent dans cette métrique perturbée. Les fluctuations peuvent être décomposées en différentes catégories selon leur nature *géométrique*. On distingue les perturbations *scalaires* (correspondant aux fluctuations de densité de la matière), les perturbations *vectérielles* (correspondant à la vorticité de la matière) et les perturbations tensorielles (correspondant aux ondes gravitationnelles primordiales, *qui ne se couplent pas à la matière*). Nous verrons dans la suite que les perturbations vectorielles ne jouent aucun rôle significatif car leur amplitude diminue au cours de l'expansion. Les perturbations scalaires et tensorielles vont contribuer aux anisotropies observées dans le CMB et leur importance relative est caractérisée par leur spectre de puissance. L'étude des fluctuations du CMB, couplées à celles de la métrique, permet en principe de mesurer ou du moins de contraindre ces spectres de puissance, ainsi que certains paramètres des théories inflationnaires. Nous allons voir quels sont ces paramètres.

**Un peu de formalisme.** L'expression mathématique du potentiel fait apparaître des paramètres libres (par exemple le couplage du champ avec lui-même) qui peuvent être contraints par les mesures de spectre de puissance des anisotropies du CMB. C'est pourquoi l'on attend beaucoup des futures expériences précises comme MAP et PLANCK pour affiner les théories inflationnaires. Nous allons donner quelques résultats quantitatifs relatifs aux prédictions de l'inflation.

  partir du lagrangien, on peut calculer la densité d'énergie et la pression du champ scalaire ; ils sont donnés par :

$$\begin{aligned}\rho_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \\ p_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi).\end{aligned}$$

Par exemple, le champ de Higgs a un potentiel  $V(\phi) = \lambda(\phi^2 - M^2)^2$ , un champ scalaire massif a un potentiel  $V(\phi) = (1/2)m^2\phi^2$  et un champ auto-interagissant est décrit par  $V(\phi) = \lambda\phi^4$ . En remplaçant les valeurs de  $p$  et  $\rho$  dans les équations de Friedmann, on obtient :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right) \quad \text{et} \quad \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V',$$

où les points sont des dérivées par rapport au temps et le prime par rapport à  $\phi$ . On a négligé la courbure puisque nous avons vu qu'elle était très petite à cette époque. Cette dernière équation est équivalente à l'équation de conservation :

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) = -3H\dot{\phi}^2,$$

ce qui nous permet d'exprimer d'une façon générale  $\dot{H}$  en fonction de  $\dot{\phi}^2$  :

$$\dot{H} = -4\pi G\dot{\phi}^2. \quad (67)$$

On voit que  $H$  est une fonction décroissante du temps ; l'expansion est exponentielle (elle nous assure  $\ddot{a} > 0$ ) si  $H = \dot{a}/a = C^{te}$ , ce qui est réalisé d'après cette dernière équation si  $\dot{\phi} = C^{te}$ . Dans ce cas,  $\dot{\phi} \sim 0$  et  $V(\phi)$  constant : cela peut se produire si le champ est piégé dans un minimum local de son potentiel  $V$ .

La condition d'inflation  $\rho + 3p < 0$  (c'est-à-dire  $\ddot{a} > 0$ ) devient, en remplaçant par les expressions de  $p$  et  $\rho$ ,  $V > \dot{\phi}^2$  : l'énergie potentielle est supérieure à l'énergie cinétique. Il y a inflation lorsque la partie cinétique du champ scalaire est inférieure à sa partie potentiel. Nous voulons que l'inflation dure suffisamment longtemps pour que le CMB nous paraisse homogène et que  $\Omega$  soit suffisamment proche de 1 ; il faut pour cela que  $H$  varie lentement par rapport au taux d'expansion, soit :

$$\frac{|\dot{H}|}{H} \ll H \iff V > \dot{\phi}^2 \quad (68)$$

et pour que l'inflation dure suffisamment longtemps, il faut que l'accélération du champ soit lente devant le taux d'expansion :

$$\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \ll H. \quad (69)$$

Les deux dernières équations sont les équations de "roulement lent" ("slow-roll"). On introduit en général deux paramètres dits de roulement lent définis par :

$$\epsilon(\phi) = \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \quad \text{et} \quad \eta(\phi) = \frac{1}{8\pi G} \frac{V''(\phi)}{V(\phi)},$$

de sorte que les conditions de roulement lent deviennent :

$$\epsilon \ll 1 \quad \text{et} \quad |\eta| \ll 1.$$

Le paramètre  $\epsilon$  contraint la pente du potentiel tandis que  $\eta$  contraint sa courbure. L'inflation prend fin dès que l'un de ces deux paramètres est de l'ordre de 1. Dans le cas de roulement lent, les équations du mouvement deviennent :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V \quad (70)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{V'}{3H}. \quad (71)$$

Le paramètre  $\epsilon$  peut aussi servir à paramétrer l'équation d'état du champ scalaire ; pour cela, on écrit que  $p + \rho$  est égal à  $\dot{\phi}^2$  et l'on remplace  $\dot{\phi}$  par son expression donnée dans l'Eq. 71. On écrit ensuite  $H^2$  selon l'Eq. 70 et on trouve :

$$p = -\rho(1 - 2\epsilon/3).$$

De même, on obtient une forme particulièrement simple pour l'équation de Friedmann : on part de l'expression de  $\dot{H}$  en fonction de  $\dot{\phi}^2$  (Eq. 67) en remplaçant  $\dot{\phi}$  par l'Eq. 71 pour obtenir que  $\dot{H} = -(V'/V)^2/6$ , puis on utilise le fait que  $\ddot{a}/a = H^2 + \dot{H}$  pour obtenir :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon).$$

Le paramètre  $\epsilon$ , que l'on peut mesurer à partir des anisotropies de température du CMB, est donc très important pour caractériser le potentiel du champ scalaire. Il nous donne accès à sa forme et à l'équation d'état du champ. Tant que l'approximation de roulement lent est valide (on suppose que l'inflation commence à  $t_i$  et se termine à  $t_f$ ),  $\epsilon \ll 1$  et on a, puisque  $H$  est presque constant :

$$a(t) = a(t_i)e^{\int_{t_i}^t H(t) dt} \sim a(t_i)e^{H \times (t-t_i)} \quad \text{avec} \quad t_i < t < t_f,$$

et  $t_i = \mathcal{O}(10^{-34})$ ,  $t_f = \mathcal{O}(10^{-32})$ .

On caractérise la durée totale de l'inflation par le logarithme de l'accroissement du facteur d'échelle (c'est le nombre  $N$  de "e-folds") :

$$N = \ln \frac{a(t_f)}{a(t_i)} = \int_{t_i}^{t_f} H(t) dt \sim 2\sqrt{\pi G} \left| \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{d\phi}{\sqrt{\epsilon(\phi)}} \right| \sim -8\pi G \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} d\phi.$$

Pour résoudre les problèmes du modèle du *Big-Bang* standard dont nous avons parlé précédemment, on montre qu'il faut que  $N \geq 60$  (cette valeur change un peu selon les détails du modèle considéré : échelle d'énergie de l'inflation, durée du "reheating"...).

Nous avons vu que l'inflation permettait non seulement de combler certaines lacunes du modèle standard mais en plus fournissait un moyen de générer des fluctuations. Nous n'aborderons pas le mécanisme responsable de la transition entre les fluctuations quantiques du champ scalaire et les fluctuations classiques, responsables des anisotropies du CMB et de l'existence des structures. Les modèles les plus classiques d'inflation génèrent des fluctuations obéissant à une statistique gaussienne. Les fluctuations les plus importantes pour la cosmologie sont les fluctuations scalaires (d'amplitude  $\delta_H$ , que l'on peut identifier avec des fluctuations de densité) et tensorielles (d'amplitude  $A_G$ , décrivant les ondes gravitationnelles primordiales). Les fluctuations vectorielles, liées à la vorticité du fluide cosmique, ne jouent pas de rôle important en cosmologie car elles décroissent avec l'expansion (voir page 66). L'évolution d'une perturbation est gelée dès lors que sa longueur d'onde ( $\lambda = 2\pi a/k$ ) devient plus grande que le rayon de Hubble puisqu'aucun processus de physique causale ne peut la faire évoluer. Par définition, l'amplitude des fluctuations est l'amplitude évaluée lorsque la perturbation traverse le rayon de Hubble, c'est-à-dire pour  $k = aH$ . On montre que les amplitudes des fluctuations scalaires et tensorielles pour une onde de nombre d'onde  $k$  sont

données par :

$$\delta_H(k) \hat{=} \int \frac{\rho(x) - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle} e^{ikx} d^3k = \sqrt{\frac{512\pi}{75}} \frac{G^{3/2} V^{3/2}}{|V'|} \Big|_{k=aH} \quad (72)$$

$$A_G(k) = \sqrt{\frac{32}{75}} G V^{1/2} \Big|_{k=aH} \quad (73)$$

où  $k$  est le nombre d'onde comobile. Ces amplitudes dépendent du potentiel du champ et de sa dérivée première. À partir des modes de Fourier des perturbations, on peut définir leur spectre de puissance  $P$  de la manière suivante (Stewart et Lyth, 1993) :

$$\langle \mathcal{C}(k) \mathcal{C}^*(k') \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} P_C \delta(k - k')$$

où  $\mathcal{C}$  remplace scalaire ou tensoriel. Pour le mode scalaire, on trouve (Kinney, 1998) :

$$P_{\mathcal{R}}^{1/2}(k) = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{\pi}} \frac{H}{\sqrt{\epsilon}} \Big|_{k=aH}. \quad (74)$$

L'indice  $\mathcal{R}$  correspond à la courbure, pour rappeler que les fluctuations de densité se traduisent en courbure de la métrique. Dans les modèles simples, on suppose en général une loi de puissance pour  $P_{\mathcal{R}}$  et elle est caractérisée par son *indice spectral*, que l'on note habituellement  $n$ ; il est défini par :

$$n - 1 = \frac{d \ln(P_{\mathcal{R}})}{d \ln(k)}.$$

Quant au spectre de puissance des fluctuations, tensorielles, on a :

$$P_{\mathcal{T}}^{1/2}(k) = \frac{4\sqrt{G} H}{\sqrt{\pi}} \Big|_{k=aH}. \quad (75)$$

On lui suppose également une loi de puissance, d'indice spectral  $n_T$  :

$$n_T = \frac{d \ln(P_{\mathcal{T}})}{d \ln(k)} = -2\epsilon.$$

Le rapport des deux spectres est :

$$\frac{P_{\mathcal{T}}}{P_{\mathcal{R}}} = 16 \epsilon = 1.16 r. \quad (76)$$

Les modes tensoriels sont donc négligeables pour  $\epsilon \ll 1$ . L'indice spectral des perturbations tensorielles n'est pas un paramètre indépendant :

$$n_T = -\frac{1}{8} \frac{P_{\mathcal{T}}}{P_{\mathcal{R}}}.$$

Cette dernière relation est automatiquement vérifiée si le modèle d'inflation est cohérent (c'est un test de cohérence interne, valable seulement pour le modèle à un seul champ scalaire). Un modèle d'inflation se réduit donc à ces trois paramètres :  $P_{\mathcal{T}}$ ,  $P_{\mathcal{R}}$  et  $n$ , dépendants

eux-mêmes du paramètre de roulement lent  $\epsilon$ . Un modèle donné fournit les spectres de puissance, dont on peut en déduire ceux attendus pour les fluctuations de température du CMB. À partir du modèle — c'est-à-dire à partir d'un potentiel — on calcule  $\epsilon$  et  $\eta$ . On calcule ensuite  $N$  en fonction du champ scalaire, en utilisant  $\epsilon$ . On inverse ensuite la relation pour trouver  $\phi(N) = \phi_N$  ( $N \geq 60$ ), valeur du champ pour laquelle le facteur d'échelle de l'Univers s'est accru de  $e^N$ . On calcule enfin les spectres de puissance en fonction de  $\phi$  et on calcule leur valeur pour  $k = aH$ . Réciproquement, lorsque les mesures d'anisotropies de température et de polarisation du CMB auront une précision suffisante, nous pourrions contraindre fortement les spectres de puissance des fluctuations scalaires et tensorielles, ce qui contraindra aussi  $\epsilon$  etc. Nous serons alors capables de déterminer la forme du potentiel du champ scalaire responsable de l'inflation.

## 2.4 Perturbations cosmologiques

Nous avons vu que l'inflation génère de façon naturelle des fluctuations. Celles-ci sont caractérisées par leur spectre de puissance et se traduisent par des fluctuations dans la métrique qui ne peut plus être décrite par une expression de type Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Cependant, les fluctuations sont petites et les traiter dans le cadre de la théorie des perturbations est justifié. À l'ordre 0 nous pouvons considérer que la métrique est de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (voir page 9) mais il convient de lui ajouter des potentiels d'ordre 1 rendant compte de la présence des fluctuations. Nous nous proposons dans cette partie d'étudier l'évolution des perturbations sous l'effet de la gravitation.

Afin de clarifier l'exposé, nous commencerons par présenter une approche newtonienne (voir Peebles (1980) et Bartlett (1999)) : nous considérerons des champs gravitationnels faibles, des perturbations dont la dimension caractéristique est plus petite que l'horizon (car la physique newtonienne ne peut pas décrire ce qu'il se passe au-delà de l'horizon) et des fluides non relativistes. Ces approximations sont par exemple valables pour des époques plus récentes que l'égalité matière-rayonnement dans des régions relativement petites de l'Univers par rapport au rayon de Hubble et au rayon de courbure. Précisons que la théorie newtonienne ne peut pas rendre compte des fluctuations de type tensorielles (les ondes gravitationnelles primordiales).

### 2.4.1 Approche newtonienne

L'Univers est rempli d'un fluide non relativiste (domination de la matière) de densité  $\rho(\vec{x}, t)$ . On repère un point par sa coordonnée comobile  $\vec{r}$  ou par sa coordonnée propre  $\vec{x} = a(t) \vec{r}$ . Toute variation du potentiel gravitationnel  $\phi(\vec{r}, t)$  se propage avec une vitesse infinie. Sous ces hypothèses, on peut écrire l'équation de continuité de ce fluide et son équation du mouvement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla_{\vec{x}}(\rho \vec{u}(t, \vec{x})) = 0 \quad (77)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla_{\vec{x}}) \vec{u} \right) = -\rho \nabla_{\vec{x}} \phi(t, \vec{x}) - \nabla_{\vec{x}} p(t, \vec{x}). \quad (78)$$

On peut également obtenir l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel :

$$\nabla_{\vec{x}}^2 \phi = 4\pi G\rho.$$

Dans ces équations,  $p$  est la pression du fluide et  $\vec{u} = d\vec{x}/dt$  sa vitesse. Les gradients sont pris au point  $\vec{x}$  et à un temps  $t$  fixé. Pour avoir l'équivalent de ces équations en fonction du paramètre d'échelle  $a$ , nous allons les exprimer à l'aide de la coordonnée comobile  $\vec{r}$  plutôt qu'avec la coordonnée physique propre  $\vec{x}$ . Les nouvelles variables sont donc  $(t, \vec{r}, \vec{v})$  au lieu de  $(t, \vec{x}, \vec{u})$  :

$$\vec{v} = \vec{u} - \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} = a \dot{\vec{r}}$$

avec  $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ ,  $\vec{x} = a\vec{r}$ .

L'opérateur  $\nabla_{\vec{r}}$ , gradient au point comobile  $\vec{r}$  sera désormais noté  $\nabla$ . La vitesse  $\vec{v}$  d'un point quelconque a donc deux contributions distinctes : la première est due à l'expansion, égale à  $\dot{a}\vec{r}$  (loi de Hubble) et l'autre est le mouvement propre du point (ne participant pas à l'expansion, c'est la "peculiar velocity" en anglais), égale à  $\dot{\vec{r}}$ . En réécrivant les équations de continuité 77 et du mouvement 78 avec ces nouvelles coordonnées<sup>15</sup>, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \quad (79)$$

$$\ddot{a}\vec{r} + \dot{\vec{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} + \frac{1}{a}(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{a}\nabla\phi - \frac{1}{a\rho}\nabla p. \quad (80)$$

L'Eq.de Poisson devient quant à elle :

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho a^2 + 12\pi Gpa^2 \quad (81)$$

où le second terme du membre de droite a été ajouté à la main pour coïncider avec la limite newtonienne des équations de Friedmann et traduit le fait qu'en relativité générale seulement, la pression est source de gravitation.

## 2.4.2 Solutions uniformes

Comme les écarts à l'uniformité sont petits, on commence par chercher les solutions qui décrivent le comportement du fond qui, lui, est rigoureusement uniforme et fixe en coordonnées comobiles :

$$\rho = \rho_b(t), \quad p = p_b(t) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{0}.$$

Les Eqs. 79, 80 et 81 deviennent :

$$\frac{\partial \rho_b(t)}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_b(t) = 0 \quad (82)$$

$$\ddot{a}\vec{r} = -\frac{1}{a}\nabla\phi_b \quad (83)$$

$$\Delta\phi_b = 4\pi G\rho_b(t)a^2 + 12\pi Gp_b(t)a^2. \quad (84)$$

---

15. Utiliser le fait que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{x}} f(\vec{x}/a, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{r}} f(\vec{r}, t) - \frac{\dot{a}}{a}(\vec{r} \cdot \nabla)f(\vec{r}, t) \quad \text{et que} \quad \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x}/a, t) = \frac{1}{a}\nabla f(\vec{r}, t).$$



La première de ces équations nous donne la variation de densité en fonction du facteur d'échelle :  $\rho_b(t) \propto a(t)^{-3}$ , résultat cohérent avec celui que nous avons trouvé page 11, lorsque que nous avons décrit un Univers dominé par la matière non relativiste. Enfin, en prenant la divergence de la deuxième équation et en utilisant la troisième, nous retrouvons la seconde équation de Friedmann :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho_b + 3p_b).$$

On retrouve la première en injectant l'équation de continuité 82 :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho_b - \frac{k}{a^2}$$

où  $k$  apparaît ici comme une constante d'intégration. Dans notre calcul, c'est l'énergie de liaison de l'Univers en expansion (compétition entre expansion —  $\dot{a}^2/2$  — et gravitation —  $4\pi G a^2 \rho/3$ ). En relativité générale, c'est la courbure.

### 2.4.3 Perturbation du modèle

Nous connaissons les équations que doivent vérifier les fonctions  $\rho_b$ ,  $p_b$ ,  $\phi_b$  et  $\vec{x}$  pour le fond. Nous allons ajouter des perturbations à ce modèle parfaitement homogène et isotrope. Pour cela, on écrit les fonctions  $\rho$ ,  $p$  et  $\phi$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\rho(t, \vec{r}) &= \rho_b(t) + \delta\rho(t, \vec{r}) = \rho_b(t)(1 + \delta(t, \vec{r})) \\ p(t, \vec{r}) &= p_b(t) + \delta p(t, \vec{r}) \\ \phi(t, \vec{r}) &= \phi_b(t, \vec{r}) + \varphi(t, \vec{r})\end{aligned}$$

Lorsque l'on réécrit les Eqs. 82, 83 et 84 et que l'on ne conserve que les infiniments petits du premier ordre, on obtient les équations d'évolution des perturbations :

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a}\nabla\vec{v} = 0 \tag{85}$$

$$\dot{\vec{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} = -\frac{1}{a}\nabla\varphi - \frac{1}{a\rho_b}\nabla\delta p \tag{86}$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G a^2 \rho_b \delta + 12\pi G \delta p a^2. \tag{87}$$

Cette dernière équation montre que la source de  $\varphi$  est le contraste de densité  $\delta$ , défini par :

$$\delta = \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b}.$$

En considérant que les fonctions relatives au fond sont connues (celles avec l'indice "b"), il reste 4 inconnues ( $\delta$ ,  $\delta p$ ,  $\varphi$  et  $\vec{v}$ ). N'ayant que 3 équations, on doit fournir une quatrième contrainte pour que l'on puisse résoudre le système : on ajoute une *équation d'état* reliant la pression à la densité  $p = f(\rho)$  soit  $\delta p = g(\delta\rho)$ . On obtient facilement l'équation d'évolution du contraste de densité  $\delta$  en dérivant l'Eq. 85 par rapport à  $t$ , en prenant la divergence de l'Eq. 86 et en éliminant les termes d'ordre plus grand que 1. Elle s'écrit :

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G\rho_b\delta + \frac{1}{a^2\rho_b}\Delta\delta p. \tag{88}$$

Cette équation décrit l'évolution de perturbations scalaires. Le terme scalaire signifie que ces perturbations sont décrites par des fonctions scalaires. C'est évident pour  $\delta$  qui est une fonction scalaire mais cela l'est moins pour le vecteur vitesse (car on a utilisé l'équation du mouvement pour trouver cette équation). Il existe donc une partie scalaire dans le vecteur vitesse. Ce résultat devient beaucoup plus clair si l'on décompose celui-ci en composantes tangentielles ( $\parallel$ ) et orthogonales ( $\perp$ ) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \\ \text{avec } \nabla \wedge \vec{v}_{\parallel} &= \vec{0} \\ \text{et } \nabla \cdot \vec{v}_{\perp} &= 0. \end{aligned}$$

On peut montrer d'une part que cette décomposition est toujours possible, d'autre part qu'il existe une fonction *scalaire*  $f$  telle que

$$\vec{v}_{\parallel} = \nabla f \quad (89)$$

et enfin qu'il existe une fonction *vectorielle*  $\vec{A}$  telle que :

$$\vec{v}_{\perp} = \nabla \wedge \vec{A}. \quad (90)$$

De cette façon, lorsque l'on a pris la divergence de l'équation du mouvement 86, la partie vectorielle a été éliminée par définition de  $\vec{v}_{\perp}$ . De ce fait, seule la partie scalaire de  $\vec{v}$  intervient (implicitement) dans l'Eq. 89. Pour ce qui est de la partie vectorielle, il faut prendre le rotationnel de l'équation du mouvement pour éliminer cette fois-ci la partie scalaire et l'on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \wedge \vec{v}_{\perp}) + \frac{\dot{a}}{a}(\nabla \wedge \vec{v}_{\perp}) = \vec{0}$$

dont la solution décroît en  $1/a$ . On trouve alors un résultat important : *les modes vectoriels diminuent avec l'expansion de l'Univers*. Ces modes vectoriels sont reliés à la *vorticité* du fluide. Dans notre approche newtonienne, les modes scalaires sont engendrés par la gravitation.

#### 2.4.4 Solutions du modèle perturbé

Reprenons l'équation gouvernant les perturbations scalaires (on oublie les perturbations vectorielles, qui décroissent) :

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G\rho_b\delta + \frac{1}{a^2\rho_b}\Delta\delta p. \quad (91)$$

Supposons tout d'abord que la pression soit nulle :  $\delta p = 0$ . Nous distinguons ensuite, sous cette hypothèse les cas suivants :

1.  $\Omega^{\text{NR}} = 1$ , domination de la matière,  $\rho_b \propto a^{-3}$ .

Dans ce cas, on trouve les solutions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) \propto t^{2/3} \\ \delta_c \propto t^{2/3} \propto a \\ \delta_d \propto t^{-1} \propto a^{-3/2}. \end{array} \right.$$

Les indices “ $c$ ” et “ $d$ ” correspondent aux deux solutions indépendantes de l'équation croissante et décroissante respectivement. Nous constatons qu'il existe des modes croissants dans un Univers dominé par la matière. Avec le temps, ces perturbations vont s'accroître proportionnellement au facteur d'échelle, donc proportionnellement à la puissance 2/3 du temps.

2.  $\Omega^R = 1$ , domination du rayonnement,  $\rho_b \propto a^{-4}$ .

Dans ce cas, la perturbation  $\delta$  de la matière non relativiste est négligeable et l'Eq. 91 se réduit à son seul membre de gauche, le membre de droite devenant nul. Les solutions sont alors données par :

$$\begin{cases} a(t) \propto t^{1/2} \\ \delta_1 = C^{\text{te}} \\ \delta_2 \propto -\ln t. \end{cases}$$

Dans un Univers dominé par le rayonnement, on ne trouve pas de mode croissant. L'expansion se fait de manière trop rapide pour que les surdensités puissent se condenser.

3.  $\Omega_\Lambda = 1$ , domination de  $\Lambda$ ,  $\rho_b = C^{\text{te}}$ .

$$\begin{cases} a \propto e^{Ht} & \text{avec } H = C^{\text{te}} \\ \delta_1 \propto C^{\text{te}} \\ \delta_2 \propto a^{-2}. \end{cases}$$

Là non plus, il n'y a pas de mode croissant.

4.  $\Omega = 0$ , domination de la courbure,  $\rho_b = 0$ .

Les solutions sont :

$$\begin{cases} a \propto t \\ \delta_1 \propto C^{\text{te}} \\ \delta_2 \propto a^{-1}. \end{cases}$$

Dans ce dernier cas, on ne trouve pas non plus de mode croissant.

Ces résultats ont été obtenus en supposant que les fluctuations de la pression étaient nulles. Les choses se compliquent lorsque cette approximation n'est plus valable. Le terme en  $\Delta\delta p$  dans l'Eq. 91 nous conduit à nous donner une équation d'état. Prenons-en une particulièrement simple, celle d'un gaz parfait soumis à des oscillations acoustiques adiabatiques :

$$p = p_b + \delta p = p_b + \delta\rho \left( \frac{\delta p}{\delta\rho} \right)_{\text{adiab.}} = p_b + c_s^2 \rho_b \delta,$$

où  $c_s$  est la vitesse de propagation des ondes sonores dans ce milieu. Dans le cas d'une vitesse du son constante, on peut résoudre l'Eq. 91 dans l'espace de Fourier et l'on obtient :

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}}(t) + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{\vec{k}}(t) = \left( 4\pi G\rho_b(t) - \frac{k^2 c_s^2}{a^2} \right) \delta_{\vec{k}}(t).$$

Cette expression a le mérite de faire apparaître très clairement la compétition entre le terme gravitation  $4\pi G\rho_b(t)$  et le terme de pression acoustique  $k^2 c_s^2 / a^2$ . La gravitation intervient comme source avec un signe positif et tend à effondrer la matière environnante, contrairement à la pression qui est dissipative. Il existe une échelle critique pour laquelle les deux contributions sont égales, c'est l'échelle de Jeans. Elle est caractérisée par le nombre d'onde  $k_J$  défini par :

$$4\pi G\rho_b = \frac{c_s^2 k_J^2}{a^2}$$

soit encore, en introduisant la longueur d'onde  $\lambda_J$  associée à  $k_J$  :

$$a(t) \lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_b}}.$$

La masse contenue dans une sphère de rayon  $a(t) \lambda_J$  est :

$$M_J(t) = \frac{4}{3}\pi (a \lambda_J)^3 \rho_b.$$

Physiquement, cette équation signifie qu'une région de l'espace de taille  $a(t) \lambda_J$  et de masse supérieure ou égale à la masse de Jeans correspondant à cette taille pourra s'effondrer car le terme de gravitation (attractif) est dominant par rapport au terme de pression (dissipatif).

Il apparaît donc dans ces calculs que les perturbations de densité ne peuvent s'amplifier par effondrement gravitationnel que dans une période de domination de la matière. Pour comprendre physiquement les forces en compétition, il est utile de raisonner en temps caractéristique (Padmanabhan, 1993). Il existe en fait trois échelles de temps : celle liée à l'expansion de l'Univers qui tend à diluer la matière et donc à empêcher l'accrétion, celle du réajustement de la pression, qui tend elle aussi à dissiper la matière et celle de chute libre, due à la gravitation qui tend à rapprocher les objets. Le phénomène ayant l'échelle de temps la plus courte est dominant et c'est lui qui sera responsable de l'évolution des perturbations. Pour ce qui est des ordres de grandeur, on a les relations approchées suivantes :

$$t_{\text{pression}} \sim \frac{\text{longueur d'onde}}{\text{vitesse de dispersion}} \sim \frac{\lambda}{v}, \quad (92)$$

$$t_{\text{chute libre}} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \quad (93)$$

et enfin

$$t_{\text{expansion}} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho_{\text{espèce dominante}}}}. \quad (94)$$

Dans le cas d'un fluide à plusieurs composantes, le terme de vitesse de l'Eq. 92 est égal à la dispersion des vitesses de la composante perturbée et le terme de densité de l'Eq. 93 est celui de l'espèce responsable de l'effondrement gravitationnel. L'Eq. 94 caractérise l'effet de dilution dû à l'expansion de l'Univers. Ce processus ne sera efficace que si l'espèce perturbée n'est pas l'espèce dominante (qui, elle, domine le taux d'expansion) et si l'espèce dominante est uniformément répartie. Par exemple, dans une période dominée par la radiation, l'échelle de temps  $t_R$  associée à l'expansion est  $\rho_{\text{espèce dominante}} = \rho_R$  et donc  $t_R < t_{\text{chute libre}}$  : l'expansion est trop rapide pour qu'une région puisse se condenser.

Dans le modèle standard, la matière noire se découple tôt dans l'histoire de l'Univers, avant l'égalité matière-rayonnement. Tant que le rayonnement domine, les perturbations de la matière noire ne peuvent croître pour la raison que nous venons de voir. Par contre, dès l'égalité matière-rayonnement, plus rien ne les en empêche. Par conséquent, les premières perturbations pouvant s'effondrer sont de la taille de l'horizon au moment de l'égalité matière-rayonnement. Dès que l'effondrement commence, la taille physique de la perturbation ne change pas puisque qu'elle n'est plus liée à l'expansion globale de l'Univers. Il est utile de l'exprimer en fonction de la taille de l'horizon au moment du découplage en refaisant un calcul analogue à celui de la page 53 ; on trouve :

$$\frac{d_{\text{Horizon}}(\text{découplage})}{d_{\text{Horizon}}(\text{égalité matière-rayonnement})} = \frac{1 + z_{\text{eq}}}{(1 + z_{\text{dec}})^{3/2}} (2\sqrt{1 + z_{\text{eq}}} - \sqrt{1 + z_{\text{dec}}}) \sim 50.$$

Ce qui signifie que la taille des perturbations de matière noire en effondrement depuis l'égalité matière-rayonnement et présentes sur la surface de dernière diffusion est 50 fois plus petite que la taille de l'horizon au moment du découplage. L'amplitude de ces perturbations au moment du découplage est de  $10^{-3}$ .

Quant aux perturbations de la matière baryonique, elles peuvent croître seulement à partir du découplage des photons car le couplage fort photons/baryons empêchait cette croissance. Ainsi, la matière noire a eu plus de temps pour s'effondrer. Nous avons vu que pendant la domination de la matière, l'amplitude des perturbations grandissait comme  $a$  (voir l'Eq. 92); l'amplitude des perturbations de matière noire sont donc plus grandes que celles de matière baryonique d'un facteur :

$$\frac{a_{\text{dec}}}{a_{\text{eq}}} = \frac{T_{\text{eq}}}{T_{\text{dec}}} = \frac{z_{\text{eq}}}{z_{\text{dec}}} \sim 20 \Omega_0^{\text{NR}} h^2.$$

Les observations sont compatibles aujourd'hui avec une amplitude des perturbations de matière baryonique de l'ordre de 1 *sur des échelles de l'ordre de 1 Mpc* (correspond aux amas de galaxies). À l'époque de l'émission du CMB, cette amplitude était donc d'environ  $10^{-3}$  (puisque  $z_{\text{dec}} \sim 1000$ ), ceci en supposant bien entendu que l'Univers est dominé par la matière depuis l'égalité matière-rayonnement. Le problème est que l'amplitude observée est de  $10^{-5}$  (COBE). L'explication est la suivante : les photons sont couplés aux baryons qui ont des fluctuations d'amplitude de l'ordre de  $10^{-5}$ . Après le découplage les baryons peuvent s'effondrer car ils ne sont plus dispersés par les photons : ils tombent alors dans les puits de potentiel gravitationnel de la matière noire d'amplitude  $10^{-3}$  et, très rapidement, vont aussi fluctuer avec cette amplitude, permettant de rendre compte des observations actuelles. De leur côté, les photons quittent les puits de potentiel des baryons avec lesquels ils étaient couplés, ils sont décalés vers le rouge d'une quantité compatible avec une amplitude de  $10^{-5}$  (c'est l'amplitude des puits de potentiel des baryons lorsqu'ils étaient couplés avec les photons, voir la FIG. 25). Les photons ne ressentent pas les puits de potentiel de la matière noire car leur taille est tellement petite (50 fois plus petite que l'horizon au moment du découplage) que l'effet moyen est nul et ne concerne de toutes façons que les échelles angulaires de l'ordre de  $0.02^\circ$ . C'est pour cette raison que les fluctuations dans le rayonnement sont au niveau de  $10^{-5}$ .

Le modèle newtonien que nous avons exploité ici ne peut s'appliquer qu'à des perturbations dont la taille caractéristique est plus petite que l'horizon. Il nous a permis de dégager le comportement global des perturbations. Ces perturbations ne peuvent croître, et nous l'avons montré, qu'au cours d'une période de domination de la matière. La taille caractéristique d'une perturbation croît comme  $a(t)$  tandis que l'horizon comme  $t$ . Des perturbations de plus en plus grandes vont donc entrer dans l'horizon au cours du temps. Si cette entrée se fait alors que l'Univers est dans une période de domination du rayonnement, l'amplitude de la perturbation n'évolue plus (elle est gelée) et garde la valeur qu'elle avait lors de la traversée de l'horizon. Son évolution se poursuivra plus tard, quand la matière dominera. Pour étudier l'évolution détaillée des perturbations (y compris celles qui sont plus grandes que l'horizon et sans négliger la pression), on a besoin de la théorie des perturbations en relativité générale.

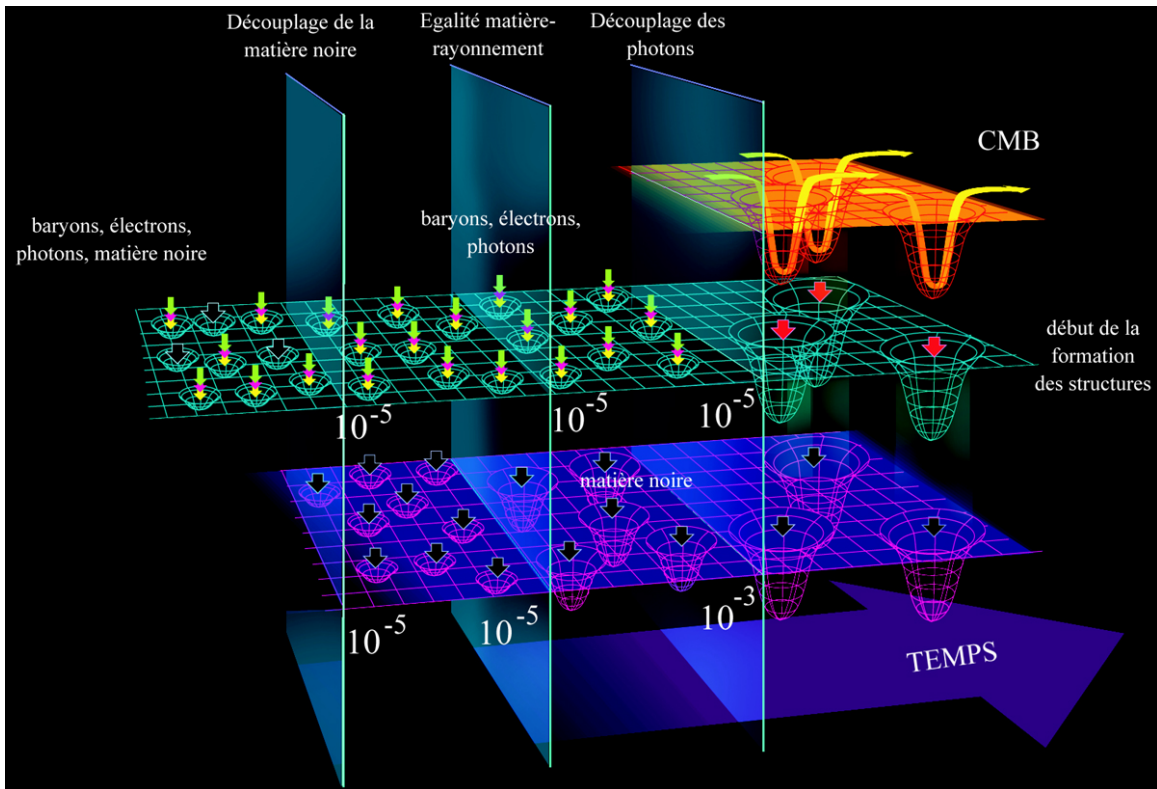


FIGURE 25 – **Autour du découplage.** À partir du découplage de la matière noire, les photons, baryons et électrons interagissent entre eux exclusivement. La pression de radiation des photons empêche les baryons de s’effondrer : il existe alors des oscillations acoustiques dans le fluide photon-baryon. Pendant ce temps, plus rien n’empêche la matière noire de s’effondrer depuis que la matière gouverne l’expansion de l’Univers (voir le texte) et l’amplitude des fluctuations de densité de matière noire croît de  $10^{-5}$  à  $10^{-3}$ . Le découplage des photons libère les baryons : ceux-ci peuvent enfin s’effondrer et former des atomes avec les électrons. Rapidement, les baryons vont tomber dans les puits de potentiel gravitationnel creusés par la matière noire et l’amplitude de leurs fluctuations de densité va passer de  $10^{-5}$  à  $10^{-3}$ , amplitude suffisante pour rendre compte des structures actuellement observées. Les photons gardent en mémoire l’amplitude des fluctuations de la matière avec laquelle ils étaient couplés, soit  $10^{-5}$  car leur passage dans les puits de profondeur  $10^{-3}$  est totalement amorti par l’épaisseur de la surface de dernière diffusion. La figure, dessinée par Alain Meyer, est extraite de Revenu (1998).

#### 2.4.5 Approche relativiste

Pour simplifier les calculs, on se place dans un Univers plat,  $\kappa = 0$ . Cette simplification est légitime puisque nous étudions des époques suffisamment reculées ( $z \sim 1000$ ) pour considérer que l’Univers était en effet très proche de la platitude (voir page 51). On utilisera aussi le temps conforme  $\tau$  défini par :  $d\tau = dt/a(t)$ . Un Univers parfaitement homogène et isotrope est caractérisé par la métrique usuelle :

$$ds^2 = a^2(\tau) (d\tau^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j)$$

où  $x = (\tau, \vec{x})$  et  $\gamma_{ij}$  est la matrice identité à trois dimensions (car on est dans un Univers plat). Nous cherchons à décrire l'évolution de perturbations. Les fluctuations quantiques du champ scalaire responsable de l'inflation se traduisent par des fluctuations dans la métrique. De la façon la plus générale possible (10 degrés de liberté au total), cette nouvelle métrique perturbée s'écrit :

$$ds^2 = a^2(\tau) \left( (1 + 2\psi)d\tau^2 - w_i d\tau dx^i - ((1 - 2\phi)\gamma_{ij} + 2h_{ij}) dx^i dx^j \right). \quad (95)$$

$\psi(\vec{x})$ ,  $\phi(\vec{x})$  sont des champs scalaires,  $w_i(\vec{x})$  est un champ vectoriel et  $h_{ij}(\vec{x})$  est un champ tensoriel, avec  $\vec{x}$  étant un 3-vecteur (les indices latins vont de 1 à 3 tandis que les indices grecs vont de 0 à 3). On impose également que  $\gamma_{ij}h^{ij} = \gamma^{ij}h_{ij} = 0$ , puisque  $\phi$  est dégénéré avec la trace de  $h_{ij}$ ; nous avons donc 10 degrés de liberté : 1 pour  $\psi$ , 1 pour  $\phi$ , 3 pour  $w_i$  et 5 pour  $h_{ij}$ . Les fluctuations de la métrique peuvent être séparées selon leur nature géométrique : scalaire, vectorielle ou tensorielle. Les champs scalaires  $\psi$  et  $\phi$  sont déjà réduits au maximum, ils contribuent pleinement à la partie scalaire des perturbations. Quant au champ vectoriel  $w_i$ , comme nous l'avons vu dans l'approximation newtonienne, il peut se décomposer en une partie scalaire et une partie vectorielle (gradient d'une fonction scalaire et rotationnel d'une fonction vectorielle respectivement, voir les Eqs. 89 et 90). Enfin, le tenseur  $h_{ij}$  se décompose de la même manière en :

$$h_{ij} = h_{ij\parallel} + h_{ij\perp} + h_{ijT} \quad \text{avec} \quad \partial_i h_{ijT} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_i \partial_i h_{ijT} = 0,$$

où  $h_{ij\parallel}$  représente la partie scalaire,  $h_{ij\perp}$  la partie vectorielle et enfin  $h_{ijT}$  la partie tensorielle<sup>16</sup>. Pour résoudre les équations du champ, on doit choisir un système de coordonnées particulier, c'est-à-dire choisir une jauge. La métrique perturbée a 10 composantes, les équations du champ ne nous donnent que 6 équations, fixer la jauge revient donc à fixer les 4 degrés de liberté restant. On peut citer par exemple deux jauges (systèmes de coordonnées) couramment employées :

$$\begin{aligned} \psi = w_i = 0 & \quad \text{jauge synchrone} \\ w_i{}^{;i} = h_{ij}{}^{;j} = 0 & \quad \text{jauge de Poisson.} \end{aligned} \quad (96)$$

Nous fixerons une jauge le moment venu. Pour l'instant, nous allons dériver les équations du champ et exprimer la conservation du tenseur énergie-impulsion donné par :

$$T_{\alpha\beta} = (p + \rho)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta},$$

le tout à l'ordre 1 en  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $w$  et  $h$ .  $u^\alpha$  est la 4-vitesse du fluide, définie par  $u^\alpha = dx^\alpha/ds$ . La première quantité dont nous avons besoin est l'expression des coefficients du tenseur métrique  $g^{\alpha\beta}$  que nous calculons facilement au premier ordre à partir des  $g_{\alpha\beta}$  par la relation  $g_{\alpha\beta} g^{\beta\lambda} = \delta_\alpha^\lambda$  :

$$\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{a^2}(1 - 2\psi) \\ g^{0i} &= -\frac{1}{a^2}w^i \\ g^{ij} &= -\frac{1}{a^2} \left( (1 + 2\phi)\gamma^{ij} - 2h^{ij} \right). \end{aligned}$$

---

16. On montre plus précisément qu'il existe  $h$  (scalaire) et  $h_i$  (vectorielle) telles que  $h_{ij\parallel} = (\partial_i \partial_j - (1/3)\gamma_{ij}\nabla^2)h$  et  $h_{ij\perp} = h_{i,j} + h_{j,i}$ . La partie purement tensorielle étant  $h_{ij} - h_{ij\parallel} - h_{ij\perp}$ .

Nous sommes en mesure de calculer les composantes contra-variantes et covariantes de  $u$  :

$$u^0 = \frac{d\tau}{ds} = \frac{1 - \psi}{a} \quad \text{et} \quad u_0 = (1 + \psi)a$$

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = u^0 v^i = \frac{v^i}{a} \quad \text{et} \quad u_i = -a(w_i + v_i)$$

où  $v^i$  est la vitesse propre du fluide, un infiniment petit du premier ordre.

Les coefficients de Christoffel définis par l'Eq. 5 (page 8) nous permettent de déterminer les équations que nous recherchons. Ces coefficients sont, à l'ordre 1 (la dérivée “ $\dot{\phantom{x}}$ ” est la dérivée par rapport à  $\tau$ ) :

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{a}}{a} + \dot{\psi} \quad (97)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \psi_{,i} + \frac{\dot{a}}{a} w_i \quad (98)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}) + \frac{\dot{a}}{a}[(1 - 2\phi)\gamma_{ij} + 2h_{ij}] + \dot{h}_{ij} - (\dot{\phi} + 2\frac{\dot{a}}{a}\psi)\gamma_{ij} \quad (99)$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{\dot{a}}{a} w^i + \dot{w}^i + \psi^{,i} \quad (100)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2}(w^i_{,j} - w_j^{,i}) - \dot{\phi}\delta_j^i + \dot{h}_j^i + \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i \quad (101)$$

$$\Gamma_{jk}^i = (h_{j,k}^i + h_{k,j}^i - h_{jk}^{,i}) - \frac{\dot{a}}{a} w^i \gamma_{jk} - (\phi_{,k}\delta_j^i + \phi_{,j}\delta_k^i - \phi^{,i}\gamma_{jk}). \quad (102)$$

Il ne nous manque plus que les expressions des composantes du tenseur énergie-impulsion pour pouvoir écrire son équation de conservation. Ces composantes sont :

$$T_0^0 = \rho = \rho_b + \delta\rho$$

$$T_0^i = (\rho_b + p_b)v^i$$

$$T_i^0 = -(p + \rho)(w_i + v_i)$$

$$T_j^i = -p\delta_j^i = -(p_b + \delta p)\delta_j^i.$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour expliciter l'équation de conservation  $T_{\alpha;\beta}^\beta = 0$ , en utilisant  $T_{\alpha;\beta}^\beta = T_{\alpha,\beta}^\beta + \Gamma_{\delta\beta}^\beta T_\alpha^\delta - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta T_\delta^\beta$ . On trouve :

$$\dot{\rho} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a} - \dot{\phi}\right)(\rho + p) + \partial_i((\rho + p)v^i) = 0 \quad (103)$$

$$\partial_\tau((p + \rho)(w_i + v_i)) + 4\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho)(w_i + v_i) + \partial_i p + (p + \rho)\psi_{,i} = 0. \quad (104)$$

La première de ces deux équations, écrite à l'ordre 0 donne :

$$\dot{\rho}_b + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_b + p_b) = 0$$

qui correspond à l'équation newtonienne dans le cas d'une pression nulle. Si l'on pose  $p = \rho/3$  (radiation, résultat purement relativiste, que l'on ne peut pas retrouver en physique



newtonienne), on retrouve  $\rho_{\text{rad}} \propto a^{-4}$ . On peut réécrire les Eqs. 103 et 104 en fonction des variables  $x = p_b/\rho_b$  et la vitesse du son  $c_s$  ( $c_s^2 = \delta p/\delta \rho$ ) pour obtenir :

$$\dot{\delta} + 3\frac{\dot{a}}{a}\delta(c_s^2 - x) + (1+x)(\partial_i v^i - 3\dot{\phi}) = 0 \quad (105)$$

$$\frac{1}{a^4}\partial_\tau (a^4\rho_b(1+x)(w_i + v_i)) + c_s^2\rho_b\partial_i\delta + \rho_b(1+x)\psi_{,i} = 0. \quad (106)$$

Pour ce qui est des équations du champ, on est obligé de se définir un système de coordonnées, c'est-à-dire une jauge. Nous allons utiliser celle de Poisson, qui fixe les 4 derniers degrés de liberté, voir l'Eq. 96. L'équation d'Einstein peut être écrite sous la forme :

$$R^\alpha_\beta = 8\pi G \left( T^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta T \right), \quad (107)$$

où  $T$  est la trace du tenseur énergie-impulsion. Le calcul long auquel on ne peut échapper est celui du tenseur de courbure  $R^\alpha_\beta$ . Pour cela, on utilise l'expression :

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^\rho_{\alpha\beta,\rho} - \Gamma^\rho_{\alpha\rho,\beta} + \Gamma^\rho_{\gamma\rho}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \Gamma^\rho_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_{\alpha\rho} \quad (108)$$

et on passe à  $R^\alpha_\beta$  grâce au tenseur métrique via  $R^\alpha_\beta = g^{\alpha\lambda}R_{\lambda\beta}$ . Voici les expressions, jusqu'à l'ordre 1, des composantes du tenseur de courbure :

$$\begin{aligned} R_{00} &= \Delta\psi + 3\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\dot{\psi} + \dot{\phi}) - 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \\ R_{0i} &= \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)w_i - \frac{1}{2}\Delta w_i + 2\dot{\phi}_{,i} + 2\frac{\dot{a}}{a}\psi_{,i} \\ R_{ij} &= -\frac{1}{2}(\dot{w}_{i,j} + \dot{w}_{j,i}) + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_{ij} + \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\gamma_{ij} - 2\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)(\phi + \psi)\gamma_{ij} \\ &\quad + 2\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)h_{ij} + \ddot{h}_{ij} - \ddot{\phi}\gamma_{ij} - \frac{\ddot{a}}{a}(\dot{\psi} + 5\dot{\phi})\gamma_{ij} - \Delta h_{ij} + (\phi - \psi)_{,ij} \\ &\quad + \Delta\phi\gamma_{ij} - \frac{\dot{a}}{a}(w_{i,j} + w_{j,i}). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à injecter ces équations dans l'équation du champ 107 pour obtenir :

$$\begin{aligned} \Delta\psi + 3\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\dot{\psi} + \dot{\phi}) + 6\psi\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) &= 4\pi G a^2 \rho_b (1 + 3c_s^2)\delta \\ \underbrace{-\frac{1}{2}\Delta w_i}_{\text{vecteur } \perp} + \underbrace{2\dot{\phi}_{,i} + 2\frac{\dot{a}}{a}\psi_{,i}}_{\text{vecteur } \parallel} &= -8\pi G \rho_b a^2 (1+x) \times \underbrace{(w_i + v_i)}_{w_i: \perp, v_i: \parallel \text{ et } \perp} \\ \ddot{\phi} - \Delta\phi - \frac{1}{3}\Delta(\phi - \psi) + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{\psi} + 5\dot{\phi}) + 2\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\psi &= -4\pi G \rho_b a^2 (1 - c_s^2)\delta \\ \underbrace{-\frac{1}{2}(\dot{w}^i_{,j} + \dot{w}_j{}^i)}_{\text{vecteur}} - \underbrace{\frac{\dot{a}}{a}(w^i_{,j} + w_j{}^i)}_{\text{tenseur}} + \underbrace{\ddot{h}^i_j - \Delta h^i_j + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}^i_j}_{\text{tenseur}} + \underbrace{(\phi - \psi)^i_{,j}}_{\text{scalaire}} &= 0 \end{aligned} \quad (109)$$

Compte-tenu des propriétés géométriques des  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $w_i$  et  $h_{ij}$ , on peut séparer ces équations en parties scalaires, vectorielles et tensorielles :

$$\Delta\psi + 3 \left( \ddot{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{\phi} + \dot{\psi}) \right) - 6 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \right) \psi = 4\pi G a^2 \rho_b (1 + 3c_s^2) \delta \quad (110)$$

$$\Delta w_i = 16\pi G a^2 \rho_b (1 + x) (w_i + v_i)_\perp \quad (111)$$

$$\dot{\phi}_{,i} + \frac{\dot{a}}{a} \psi_{,i} = -4\pi G a^2 \rho_b (1 + x) v_{i\parallel} \quad (112)$$

$$\ddot{\phi} - \Delta\phi - \frac{1}{3}\Delta(\phi - \psi) + \frac{\dot{a}}{a}(5\dot{\phi} + \dot{\psi}) + 2 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \psi = -4\pi G a^2 \rho_b (1 - c_s^2) \delta \quad (113)$$

$$(\phi - \psi)_{,ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\Delta(\phi - \psi) = 0 \quad (i \neq j) \quad (114)$$

$$\left( \partial_\tau + 2\frac{\dot{a}}{a} \right) (w_{i,j} + w_{j,i}) = 0 \quad (115)$$

$$\left( \partial_\tau^2 - \nabla^2 + 2\frac{\dot{a}}{a}\partial_\tau \right) h_{ij} = 0 \quad (116)$$

Au cours de ces calculs, on a vérifié que l'on retrouvait bien les équations de Friedmann (en temps conforme) à l'ordre 0; elles s'écrivent :

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3} \rho_b a^2 \quad (117)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (-\rho_b + 3p_b) a^2. \quad (118)$$

L'Eq. 114 nous indique que  $\psi = \phi$ . Nous voyons que ces équations ne sont plus couplées, les composantes scalaires, vectorielles et tensorielles évoluent indépendamment. L'Eq. 116 représente l'évolution des perturbations tensorielles, qui s'identifient complètement avec les ondes gravitationnelles primordiales. Le terme en  $\dot{a}/a$  représente l'amortissement dû à l'expansion. Nous constatons, d'après l'Eq. 115, que le mode vectoriel  $w_i$  décroît au cours de l'expansion à cause du même terme de frottement. Nous avons déjà obtenu ce résultat dans l'approximation newtonienne. On peut réduire les Eqs. 110 et 113 pour trouver celle régissant l'évolution du potentiel  $\psi$  :

$$\Delta\psi - 3\frac{\dot{a}}{a} \left( \dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a}\psi \right) = 4\pi G a^2 \rho_b \delta. \quad (119)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier le comportement d'un fluide relativiste (par exemple le fluide photon-baryon au moment du découplage) à l'intérieur et à l'extérieur de l'horizon. Pour cela nous allons avoir besoin des trois équations 105, 106 et 119.

**Hors de l'horizon.** Les modes hors de l'horizon ont une longueur d'onde plus grande que le temps conforme (en unité  $c = 1$ ) :  $\lambda > \tau$ . On peut négliger les gradients dans l'espace par rapport aux dérivées temporelles puisque  $1/\delta x < 1/\delta \tau$ . Cela signifie que les grandeurs que

nous regardons varient surtout en temps et moins en espace. Sous ces hypothèses, nos trois équations de base deviennent :

$$\begin{aligned}\dot{\delta} + 3(c_s^2 - x)\frac{\dot{a}}{a}\delta - 3(1+x)\dot{\psi} &= 0 \\ \partial_\tau (a^4 \rho_b (1+x)\vec{v}) &= 0 \quad (\text{ordre } 0) \\ \dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a}\psi &= -\frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\delta\end{aligned}$$

Pour trouver la dernière équation, on a utilisé la première équation de Friedmann en temps conforme (voir Eq. 117). La deuxième équation montre que la vitesse propre décroît en  $1/a$  dans l'époque matérielle (résultat que nous avons déjà rencontré page 27, Eq. 41) et reste constante pendant l'époque radiative. À partir des première et troisième nouvelles équations de base, on peut en déduire une sur  $\psi$  :

$$\ddot{\psi} + 3(1+c_s^2)\frac{\dot{a}}{a}\dot{\psi} + 3(c_s^2-x)\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\psi = 0.$$

Comme  $x$  est toujours inférieur ou égal à  $c_s^2$ , cette équation n'admet pas de mode croissant (solution constante pour  $x = c_s^2$  pendant les périodes de domination de la matière ou du rayonnement). Le cas  $x = -1, c_s^2 = -1$  de l'inflation mène aussi à une solution constante. Les variables  $\delta$  et  $\psi$  restent donc constantes hors de l'horizon pendant les périodes de domination du vide, du rayonnement et de la matière. Elles décroissent au cours des transitions entre ces régimes.

**À l'intérieur de l'horizon.** On regarde maintenant des perturbations dont l'échelle  $\lambda$  est plus petite que l'horizon. L'équation de Friedmann en temps conforme nous indique que  $a^2 \rho_b \sim 1/\tau^2$ . L'Eq. 112 nous donne  $\dot{\psi} + (\dot{a}/a)\psi \sim \lambda/\tau^2$  (considérer pour cela un mode de Fourier pur) et nous pouvons donc négliger le deuxième terme du membre de gauche de l'Eq. 119. Ce qui nous redonne l'équation de Poisson de l'approximation newtonienne :

$$\Delta\psi = 4\pi G a^2 \rho_b \delta.$$

De même, dans l'Eq. 105, le terme  $\partial_i v^i$  est dominant devant  $\dot{\phi}$ , ce qui donne :

$$\dot{\delta} + (1+x)\nabla.\vec{v} + 3(c_s^2-x)\frac{\dot{a}}{a}\delta = 0. \quad (120)$$

On retrouve l'équation habituelle du cas newtonien en posant  $x = c_s^2 = 0$  (à comparer avec l'Eq. 85, au temps conforme près). Enfin, l'équivalent de l'Eq. 86 s'écrit, en faisant les mêmes approximations dans l'Eq. 106 :

$$\dot{\vec{v}} + (1-3x)\frac{\dot{a}}{a}\vec{v} = -\frac{c_s^2}{1+x}\nabla\delta - \nabla\psi, \quad (121)$$

où l'on a utilisé

$$\frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1+x).$$

On retrouve l'équation newtonienne en mettant la pression à 0 :  $x = 0$  et  $c_s^2 = 0$ . Les Eqs. 120 et 121 montrent qu'il existe donc des oscillations acoustiques couplées à des gradients de vitesse. Nous avons travaillé ici dans un contexte simplifié dans lequel nous n'avons considéré

qu'un fluide unique. Un calcul détaillé nécessiterait de prendre en compte les différentes espèces de particules en présence, essentiellement photons, baryons et matière noire. Cependant, notre approche suffit à comprendre comment les perturbations évoluent à l'intérieur de l'horizon. Les fluctuations de densité sont couplées à des gradients de vitesse ; ce couplage se traduit par des **oscillations acoustiques**. Le point essentiel est qu'il est possible d'observer ces oscillations acoustiques à travers le CMB. En effet, les photons sont couplés aux baryons et aux électrons. Les perturbations de densité se traduisent sur les photons par une perte ou un gain d'énergie (selon qu'ils sortent d'un puits de potentiel ou qu'ils descendent d'une vallée de potentiel), tandis que la vitesse du fluide induit un effet Doppler sur les photons. Ainsi, à l'intérieur de l'horizon, les photons sont perturbés par ces deux composantes (potentiel gravitationnel et vitesses) : nous observons ces perturbations dans le CMB, elles sont responsables des pics Doppler.

## 3 Les anisotropies du CMB

### 3.1 Anisotropies de température

Nous avons dérivé dans la section précédente le comportement des perturbations dans la métrique perturbée. Le CMB est un rayonnement alors que les perturbations sont intrinsèques à l'espace-temps. De quelle manière les fluctuations du rayonnement fossiles sont-elles couplées aux fluctuations de la métrique? Autrement dit, comment l'information contenue dans les fluctuations s'est-elle transmise aux photons?

#### 3.1.1 Anisotropies et échelles angulaires

À l'époque de l'émission du CMB, l'Univers est essentiellement rempli de photons, baryons et électrons. Ces espèces sont liées entre elles par l'interaction électromagnétique. Dans la limite de couplage fort, on peut décrire l'Univers comme étant rempli par un fluide unique : le libre parcours moyen des particules est très faible. Cette description est valable jusqu'à la recombinaison (voir page 33). Le découplage des photons se fait plus tard que la recombinaison. L'approximation de couplage fort consiste à dire que la recombinaison et le découplage des photons sont un seul et même événement. La surface de dernière diffusion est donc infiniment fine dans ce modèle. La diffusion ne joue un rôle que sur des échelles plus petites que l'horizon, pour des raisons de causalité. À ces échelles, on s'attend à observer les effets de la physique causale, qui sont ici des oscillations acoustiques, comme nous l'avons vu dans la section précédente. Les anisotropies que nous observons dans le CMB (voir FIG. 26) sur des échelles plus grandes que l'horizon — que nous voyons sous un angle de l'ordre du degré — reflètent les perturbations initiales des photons et les effets gravitationnels, c'est l'effet Sachs-Wolfe (1967). Dans la section sur l'inflation, nous avons vu que des régions séparées de plus de  $1^\circ$  n'étaient pas causalement connectées (voir page 54). Cela signifie que la physique responsable des anisotropies à des échelles de plus de  $1^\circ$  n'est pas de la physique causale. Elles sont essentiellement dues aux fluctuations dans le potentiel gravitationnel, présentes à toutes les échelles. Les photons, pour parvenir jusqu'à nous ont été "redshiftés" (s'ils provenaient d'une région où le potentiel gravitationnel était plus fort que la moyenne) ou blueshiftés (s'ils provenaient d'une région où le potentiel gravitationnel était plus faible). Ainsi, ils nous apparaîtront plus froids ou plus chauds que la moyenne. Une région sur-dense (sous-dense) nous apparaît comme un point froid (chaud). Le spectre de puissance du potentiel gravitationnel étant approximativement invariant d'échelle, on s'attend à trouver statistiquement les mêmes fluctuations de température à des échelles plus grandes que le degré.

En ce qui concerne les petites échelles angulaires, correspondant à des régions ayant eu le temps de rentrer en contact causal, les anisotropies sont dues d'une part à l'effet Sachs-Wolfe et d'autre part aux interactions entre les baryons, les électrons et les photons. L'inertie des baryons tend à les faire s'effondrer dans les puits de potentiel gravitationnel. Les photons engendrent une pression de radiation qui peut, partiellement, compenser l'effondrement des baryons. Il existe ainsi une compétition entre gravitation et pression de radiation, responsable

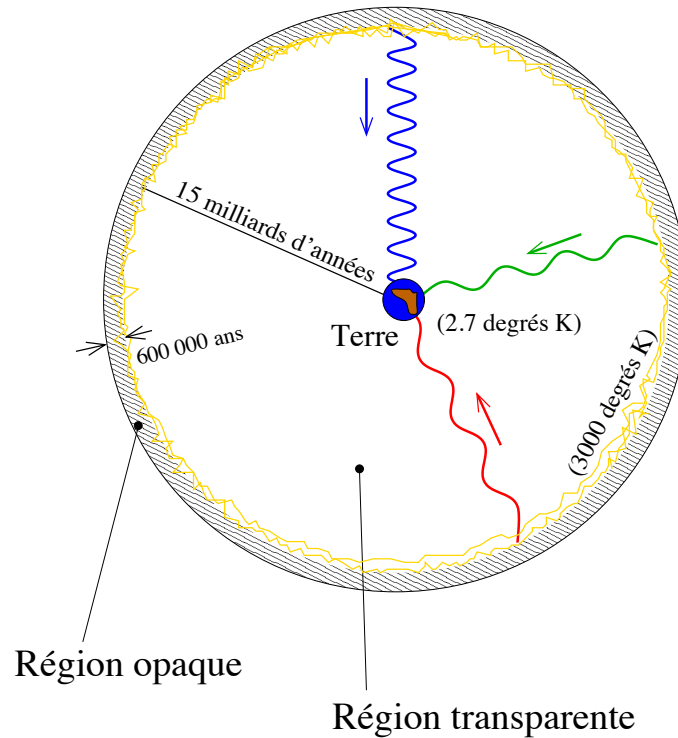


FIGURE 26 – **Illustration de ce que nous observons aujourd’hui.** La dernière diffusion ayant eu lieu environ 600 000 ans après le *Big-Bang* et la vitesse de la lumière étant finie, nous observons le CMB sur la surface intérieure d’une sphère dont nous occupons le centre. Avant la dernière diffusion, le libre parcours moyen des photons était très faible et l’Univers était opaque au rayonnement ; il devient transparent par la suite, lors de la recombinaison. Les photons issus de la surface de dernière diffusion proviennent de régions avec des potentiels gravitationnels différents, nous les observons avec des températures différentes, ce qui constitue les anisotropies du CMB.

des oscillations acoustiques. Formellement, l’équation gouvernant le comportement des ondes acoustiques dans l’espace de Fourier peut s’écrire (elle correspond à la limite de couplage fort des équations de transfert) :

$$(m_{\text{eff}} \Delta T'_k)' + \frac{k^2}{3} \Delta T_k = -F_k,$$

où les dérivations se font par rapport au temps conforme ( $d\tau = dt/a$ )  $F_k$  est le terme dû à la gravitation,  $m_{\text{eff}}$  décrit l’inertie du fluide (il dépend du rapport photons/baryons :  $\rho_\gamma/\rho_b$ ) et  $\Delta T_k$  la perturbation de température. L’influence du paramètre cosmologique  $\Omega_m$  apparaît explicitement ici (via le rapport  $\Omega^R/\Omega^{\text{NR}}$ ). Cette équation est celle d’un oscillateur harmonique avec source, la gravitation  $F_k$ . Les anisotropies de température sont donc dues aux oscillations acoustiques (couplage densité et vitesse). En effet, les photons diffusent pour la dernière fois sur des électrons animés de vitesses différentes, dans des directions différentes. Il en résulte un effet Doppler qui contribue également aux anisotropies. Bien que cet effet ne soit pas dominant, on appelle les pics dans le spectre de puissance du CMB, “pics Doppler” (voir FIG. 27).

Le spectre de puissance aux grandes valeurs de  $\ell$  (aux petites échelles angulaires) est donc une somme des contributions de vitesse et de densité, ce qui élargit les pics. Formellement, on

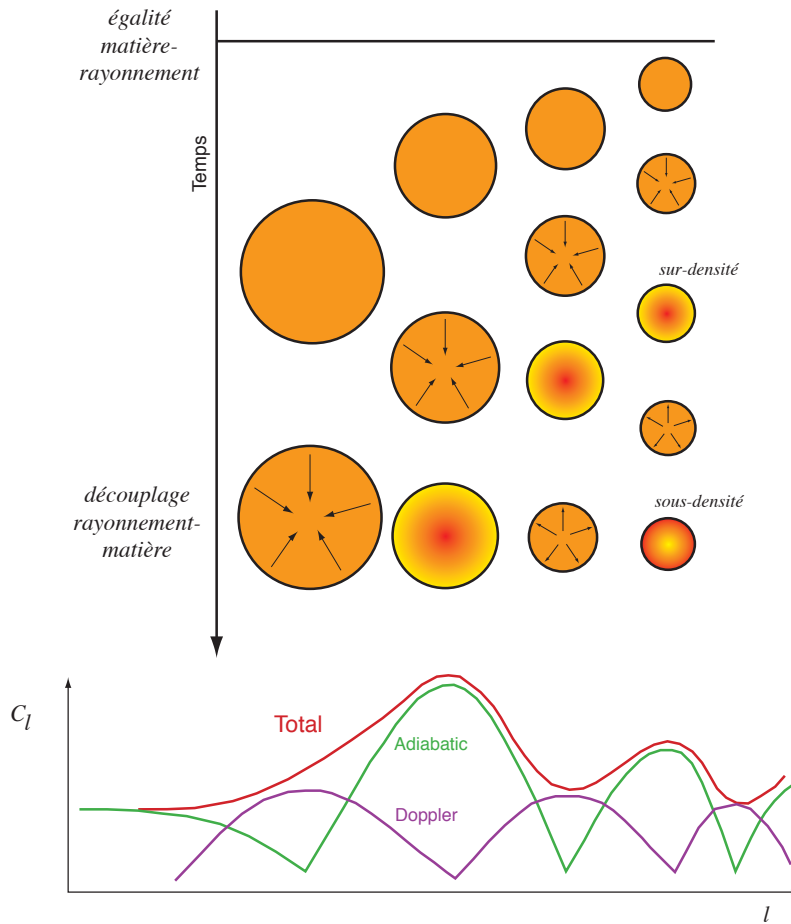


FIGURE 27 – **Oscillations acoustiques et pics Doppler.** Sur le schéma du haut, le temps s’écoule de haut en bas. Au cours du temps, des perturbations de plus en plus grandes entrent dans l’horizon (voir page 57). Les plus petites entrent le plus tôt et ont le temps d’osciller plusieurs fois avant le découplage contrairement aux plus grandes. Les flèches indiquent les oscillations du fluide dans la perturbation. Le graphe du bas représente l’amplitude de la fluctuation de température (le spectre de puissance  $C_\ell^T$ ), en fonction du multipôle  $\ell$ , inversement proportionnel à l’échelle angulaire. Les deux contributions à  $C_\ell^T$ , “adiabatic” et “Doppler” sont déphasées de  $90^\circ$  : quand le fluide est immobile, la compression est maximale (sur-densité) ou minimale (sous-densité) ; quand le fluide a sa vitesse maximale, la pression est nulle. Le graphe est adapté de Lineweaver (1997).

décrit les anisotropies de température du CMB par leur spectre de puissance angulaire  $C_\ell^T$ . Le multipôle  $\ell$  est inversement proportionnel à l’échelle angulaire et l’horizon à l’époque de la dernière diffusion, vu sous  $1^\circ$  environ, correspond approximativement à  $\ell = 180$ . Le calcul du spectre de puissance se déduit de la décomposition de la carte des anisotropies sur les fonctions de base sur la sphère, les harmoniques sphériques :

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^T Y_\ell^m.$$

À partir d’une carte de fluctuations de température donnée, on peut calculer les  $a_{\ell m}^T$  en

utilisant la propriété d'orthonormalité des harmoniques sphériques :

$$a_{\ell m}^T = \int \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell}^{m*}(\hat{\mathbf{n}}) d\hat{\mathbf{n}}.$$

Le spectre de puissance est relié aux coefficients du développement  $a_{\ell m}^T$  (au même titre que la puissance dans un espace cartésien est reliée aux coefficients de la transformée de Fourier) par :

$$C_{\ell}^T = \langle |a_{\ell m}^T|^2 \rangle = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}^T|^2.$$

Une des prédictions génériques de l'inflation est qu'elle prédit une **distribution gaussienne** pour les coefficients  $a_{\ell m}^T$ , de variance  $C_{\ell}^T$ , contrairement aux modèles basés sur les défauts topologiques.

Il existe donc une échelle critique dans ce que nous observons : c'est l'angle sous lequel nous voyons sur le ciel l'horizon tel qu'il était à l'époque de la dernière diffusion. Schématiquement, le spectre de puissance que nous venons de définir présentera deux caractéristiques essentielles : une contribution uniforme à la puissance pour des échelles angulaires supérieures au degré ( $\ell \leq 180$ ) et des pics, dus aux oscillations acoustiques, à des échelles plus petites que le degré ( $\ell \geq 180$ ). Les contraintes et estimations sur les paramètres cosmologiques se font en étudiant par exemple l'amplitude des pics ainsi que leur espacement absolu et relatif. Plus une expérience sera capable de voir de pics, plus elle sera en mesure de fournir des contraintes fortes sur les paramètres cosmologiques. Il en est de même bien évidemment pour la polarisation du rayonnement fossile ; cette observable permet non seulement d'avoir accès de façon différente aux paramètres cosmologiques mais aussi de détecter **directement** la présence des ondes gravitationnelles primordiales, liées au spectre tensoriel des fluctuations primordiales. Pour cela, on doit être capables de voir des structures de plus en plus petites, de façon à atteindre des multipôles  $\ell$  de plus en plus grands (se rappeler que  $\ell$  est inversement proportionnel à  $\theta$ , la taille angulaire de la structure). C'est pour cette raison que les expériences CMB ont des résolutions angulaires de plus en plus petites ; il est courant aujourd'hui d'atteindre la dizaine de minute d'arc, soit 40 fois plus petit que la résolution de COBE (de  $7^{\circ}$ ).

### 3.1.2 Anisotropies et paramètres cosmologiques

Ici, nous nous intéressons à l'observation en elle-même du CMB. Nous détectons les photons environ 15 milliards d'années après leur émission. Nous supposons qu'entre leur émission et leur réception, aucun processus n'a pu les modifier d'une façon importante, ce qui est très proche de la réalité.

Toutefois, pour ce qui est de ce dernier point, on s'attend à ce que l'Univers ait été à nouveau ionisé, après la recombinaison (Gunn et Peterson, 1965), c'est ce que l'on appelle la *réionisation*. On pense que cette réionisation s'est produite à des *redshifts* compris entre 40 et 5 et est principalement due aux photons émis par les premières générations d'étoiles ou par des mini-quasars. Si une telle phase s'est effectivement produite, les électrons se sont dissociés des noyaux et les photons (ceux du CMB notamment) purent dès lors diffuser de nouveau sur les électrons libres : les fluctuations de température créées lors de leur découplage sont donc modifiées et la période de réionisation peut être contrainte en étudiant les spectres



de puissance de température et de polarisation du CMB (Griffiths et al., 1998; Haiman et Knox, 1999). La signature de la réionisation doit apparaître aux grandes échelles angulaires ; en effet, le *redshift* typique de la réionisation est bien plus petit que celui de la surface de dernière diffusion et concerne des échelles angulaires bien plus grandes que celles du CMB. Ainsi, on ne perd pas les informations aux petites échelles angulaires.

On appelle anisotropies “primordiales” celles dues à la recombinaison et “secondaires”, celles dues à des processus ultérieurs à la recombinaison. Seules les premières sont importantes quant à la détermination des paramètres cosmologiques. Pour une revue exhaustive des effets menant au spectre de puissance, voir la thèse de Hu (1995).

L’observation des anisotropies consiste à étudier, nous l’avons vu, leur répartition en fonction de l’échelle angulaire. Les classifier en fonction de leur échelle angulaire (c’est une quantité **apparente**) ne nous donne qu’une information **relative**. Pour retrouver leurs propriétés géométriques absolues, on a besoin de connaître certains paramètres cosmologiques : la constante de Hubble (voir FIG. 28) et  $\Omega_m + \Omega_\Lambda$ .

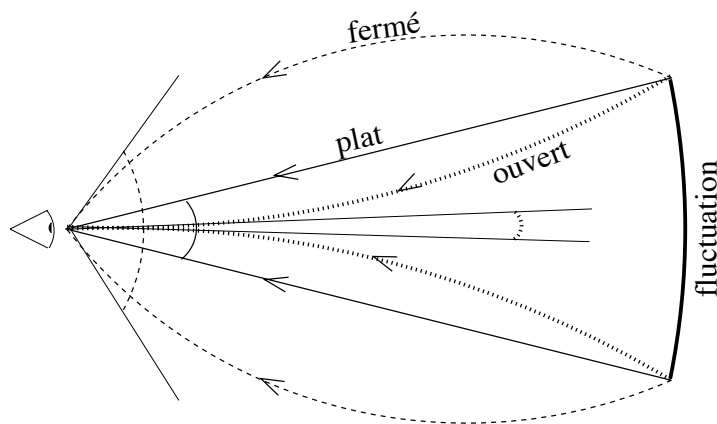
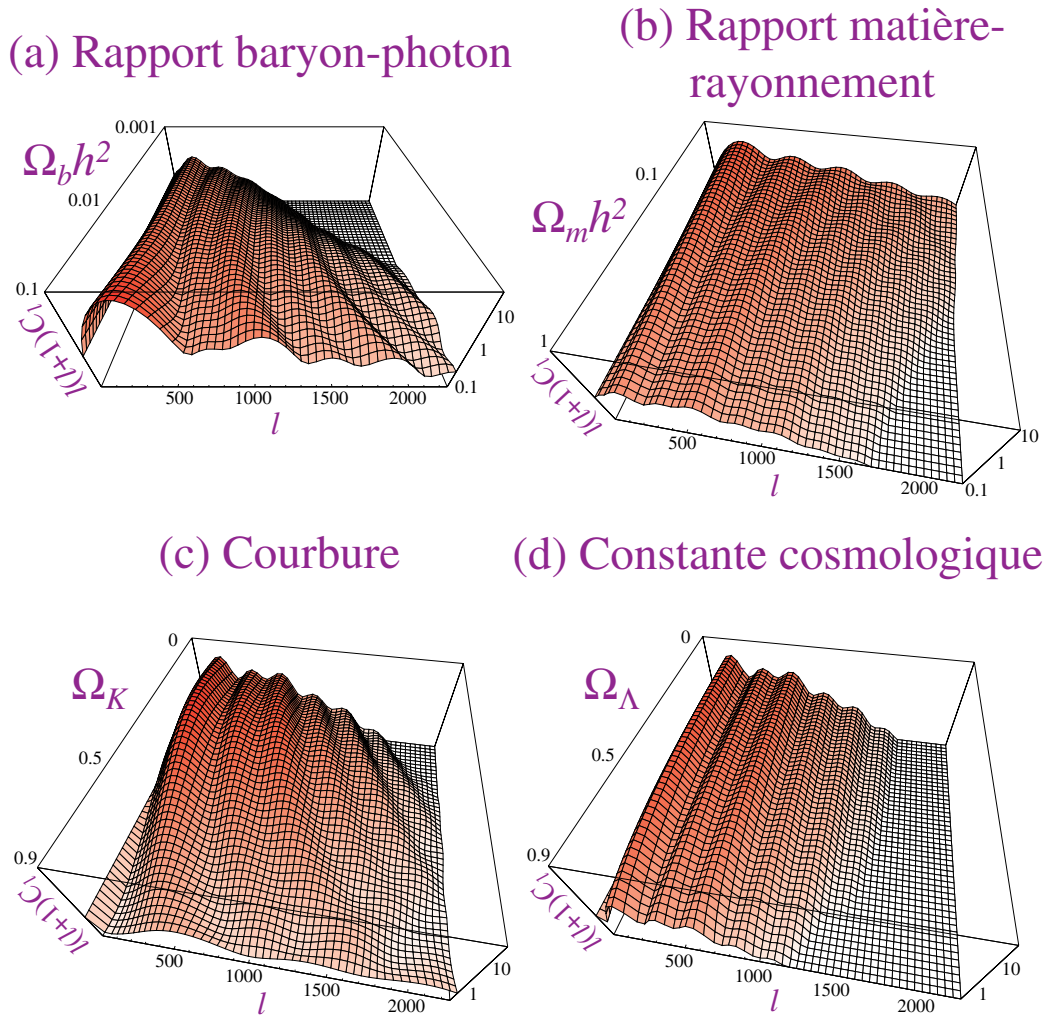


FIGURE 28 – **Effet de la géométrie de l’Univers sur la taille angulaire d’une fluctuation.** Une fluctuation donnée sur la surface de dernière diffusion sera vue sous un angle plus ou moins grand selon que l’Univers soit fermé, plat ou ouvert. Cette géométrie dépend de la quantité  $\Omega_m + \Omega_\Lambda$ .

Pour ce qui est de la constante de Hubble, on comprend facilement son influence : considérons une fluctuation sur la surface de dernière diffusion de dimensions physiques données. Selon la distance qui nous sépare d’elle, nous la verrons sous un angle différent. Une constante de Hubble  $H$  petite correspond à une distance plus faible et la fluctuation est vue sous un angle plus grand, et réciproquement. La géométrie globale de l’Univers, donnée par  $\Omega_m + \Omega_\Lambda$  (voir page 17) aura un effet très sensible : s’il est ouvert, les photons, suivant leur géodésique, seront vus sous un angle beaucoup plus petit que dans le cas d’un Univers plat, et encore plus pour un Univers fermé.

La FIG. 29(c) montre la dépendance du spectre de puissance avec  $\Omega_\kappa$ . Ce paramètre varie de 0 (Univers plat) à 0.9 (Univers “très” ouvert), ce qui a pour effet de déplacer les pics Doppler vers les grandes valeurs de  $\ell$ , c’est-à-dire vers les petites échelles angulaires. De même, la FIG. 29(d) montre qu’un Univers avec constante cosmologique à égalité matière-rayonnement et rapport photon-baryon fixés déplace les pics légèrement vers les grandes échelles angulaires. Cela est dû au fait qu’en présence de constante cosmologique, la surface



adapté de W.Hu 2/98

FIGURE 29 – Spectres de puissance du CMB en fonction des paramètres cosmologiques. Pour chacune de ces figures, tous les paramètres cosmologiques sont fixés sauf celui qui est indiqué. Voir le texte pour les explications.

de dernière diffusion doit être à une distance comobile plus petite, donc les perturbations sous-tendent un angle plus grand.

Remarquons ici que puisque les contraintes obtenues avec les supernovæ de type Ia sur  $\Omega_m$  et  $\Omega_\Lambda$  ne concernent que leur différence, en ajoutant les contraintes provenant du CMB, on sera en mesure de lever la dégénérescence entre ces deux paramètres cosmologiques (voir par exemple Tegmark (1999) et FIG. 31).

La dépendance des anisotropies en  $\Omega$  est manifeste dans l'équation donnant l'évolution des fluctuations de température dans le cas des oscillations acoustiques, à travers le terme de masse effective  $m_{\text{eff}}$ . Par exemple, si l'on augmentait la densité baryonique  $\Omega_b h^2$  sans modifier celle des photons (FIG. 29(a)), alors la pression diminuerait sur la surface de dernière diffusion, ce qui a pour effet de diminuer la vitesse du son et de modifier l'emplacement et l'espacement des pics Doppler.

Augmenter la densité de matière (FIG. 29(b))  $\Omega_m h^2$  à densité de rayonnement fixée, avance le moment d'égalité matière-rayonnement (il se produit plus tôt), ce qui diminue la hauteur du premier pic Doppler.

Les anisotropies du CMB permettent également de mesurer certains paramètres essentiels de l'inflation : d'une part le rapport tenseur/scalaire  $r$  (voir page 62) et d'autre part l'indice spectral scalaire  $n$ . La polarisation du CMB sera sur ce point particulièrement importante puisque le champ  $B$  de polarisation (voir page 99) ne peut être engendré que par les ondes gravitationnelles primordiales. Si l'on mesure de la polarisation  $B$ , on aura la preuve directe de la présence de ces fluctuations tensorielles, indépendamment de tout modèle cosmologique. Il existe cependant un moyen d'estimer la contribution des modes tenseurs avec la température ; il consiste à mesurer les fluctuations de température à grandes échelles angulaires et à comparer ces valeurs avec celles trouvées aux petites échelles angulaires.

### 3.1.3 Expériences CMB et fonctions fenêtres

Une expérience typique de CMB consiste à faire balayer à un instrument (par exemple un télescope dont le plan focal est équipé de bolomètres refroidis à quelques Kelvins avec de l'hélium liquide) une portion du ciel bien choisie : loin du plan galactique pour minimiser les contributions astrophysiques autres que CMB. La fenêtre en fréquence du détecteur doit également être choisie de manière à minimiser la contribution atmosphérique pour les expériences au sol ou ballon qui doivent prendre en compte les caractéristiques physiques de l'atmosphère (transmittance, diffusion...). On utilise généralement plusieurs détecteurs fonctionnant à des fréquences différentes afin de mieux soustraire les contributions parasites. Depuis 1992, pas moins de 25 expériences (au sol et ballons) ont cherché à mesurer le spectre de puissance des fluctuations de température du CMB. Aucune n'a été conçue pour sa polarisation. Cette lacune est essentiellement due au fait d'une part que les fluctuations de température sont 10 fois plus importantes que le signal polarisé et que la température, grandeur scalaire, est beaucoup plus facile à mesurer et à analyser. Il est probable que ces expériences sol et ballons ne seront capables (et c'est déjà beaucoup) que de donner des limites, ou au moins de bien mieux connaître les contributions autres que CMB à la polarisation totale mesurée. Il faudra sans doute attendre les expériences satellitaires MAP (lancé le 30 juin 2001 et parvenu le 1<sup>er</sup> octobre 2001 au point L2 de Lagrange du système Terre-Soleil) et surtout PLANCK (en 2007, beaucoup plus sensible que MAP) pour espérer mesurer la polarisation du CMB.

La plupart des expériences terrestres ne couvrent que des surfaces réduites du ciel, soit pour des raisons indépendantes de la volonté des expérimentateurs (impossibilité d'emporter de grandes quantités d'hélium nécessaire au refroidissement des bolomètres, durée de vie limitée des ballons...) soit parce qu'il peut être parfois préférable de favoriser une faible couverture du ciel au bénéfice d'un meilleur rapport signal sur bruit.

Dans la plupart de ces expériences, les détecteurs sont situés en aval d'un collimateur, des cornets par exemple ; ce sont eux qui donnent sa résolution angulaire à un instrument. Chaque expérience doit être capable de quantifier sa sensibilité aux échelles angulaires, à travers ce que l'on appelle les "fonctions fenêtres". Au même titre qu'un filtre passe-bande en électronique ne laisse passer qu'une certaine bande de fréquence, une fonction fenêtre ne laisse passer qu'une certaine bande de fréquence dans le domaine des échelles angulaires, c'est-à-dire les multipôles  $\ell$ . COBE, par exemple, avec une résolution angulaire d'une dizaine de

degrés n'était sensible qu'à des multipôles compris entre 2 et 20. Les fonctions fenêtres d'une expérience interviennent dans la fonction d'autocorrélation des anisotropies mesurées :

$$\left\langle \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}_1) \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}_2) \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=1}^{+\infty} (2\ell + 1) C_\ell^T W_\ell(\cos \theta),$$

où  $\hat{\mathbf{n}}_{1,2}$  sont deux directions dans le ciel,  $\theta$  l'angle séparant ces directions,  $C_\ell^T$  le spectre de puissance du CMB et  $W_\ell$  les fonctions fenêtres. On suppose ici que le faisceau de l'instrument — c'est son diagramme d'antenne, spécifiant sa réponse directionnelle — a une forme symétrique (cas du faisceau gaussien par exemple, ce qui est souvent le cas), ce qui fait que les fonctions fenêtres ne dépendent que de l'angle entre les deux directions  $\hat{\mathbf{n}}_1$  et  $\hat{\mathbf{n}}_2$ . Pour une revue détaillée sur les fonctions fenêtres, lire White & Srednicki (1994).

### 3.1.4 Résultats expérimentaux (janvier 2002)

À quelques jours d'intervalle, en avril 2001, 3 expériences ont publié leurs spectres de puissance angulaire  $C_\ell^T$ . Il s'agit des expériences ballon Boomerang, MAXIMA et de l'expérience interférométrique au sol DASI. Un an auparavant, Boomerang avait déjà publié les résultats de leur analyse d'un premier ensemble de données prises au pôle Sud. Deux pics étaient clairement visibles dans le spectre de puissance. Ce résultat était de prime importance puisqu'il plaidait en faveur des modèles cosmologiques avec inflation. Une ombre planait cependant sur l'analyse des données (Lange et al., 2001) : les paramètres cosmologiques estimés sans faire d'*a priori* sur certains d'entre eux avaient des valeurs aberrantes pour certains (l'Univers âgé de 7.8 milliards d'années seulement, constante de Hubble de  $108 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ ,  $\Omega = 1.4$  notamment) et en désaccord important avec les prédictions de la nucléosynthèse primordiale pour d'autres ( $\Omega_b h^2 = 0.1 \gg 0.02!!$ ). Un an plus tard, après la découverte d'une erreur de pointage et une nouvelle analyse sur un plus grand ensemble de données, cette même équipe publie son nouveau spectre de puissance avec cette fois 3 pics acoustiques et des valeurs bien plus raisonnables pour les paramètres cosmologiques (plus de désaccord notamment avec la nucléosynthèse primordiale). Nouveaux résultats suivis de très près par ceux de MAXIMA et de DASI. **Ces trois expériences détectent toutes 3 pics dans le spectre de puissance de température du CMB** (voir FIGS. 30 et Melchiorri (2001)).

D'après ces résultats, il apparaît donc que les modèles de formation des structures par défauts topologiques sont pratiquement exclus par rapport aux modèles inflationnaires (voir les deux modèles représentés dans la FIG. 30). Les paramètres cosmologiques estimés à partir d'une analyse conjointe (Wang et al., 2001) de ces trois expériences sont présentés dans la table 3. Ce que nous pouvons retenir de ces résultats est que le fait que l'Univers soit plat ( $\Omega_\kappa \sim 0$  ou, de façon équivalente  $\Omega = 1$ ) ne dépend pas, ou très peu, des hypothèses faites (dans les barres d'erreurs bien évidemment). De même les valeurs obtenues pour la densité baryonique  $\Omega_b h^2 = 0.02 \pm 0.01$  sont parfaitement compatibles avec celles prévues par la nucléosynthèse primordiale ( $0.01 \leq \Omega_b h^2 \leq 0.025$ ).

De même, en combinant les résultats CMB et ceux des supernovæ de type Ia (de Bernardis et al., 2002), on obtient la région représentée dans la FIG. 31.

La situation actuelle peut donc se résumer ainsi : la densité totale d'énergie de l'Univers est compatible avec  $\Omega = 1$ , prédit par l'inflation. De plus, l'observation de pics dans le spectre

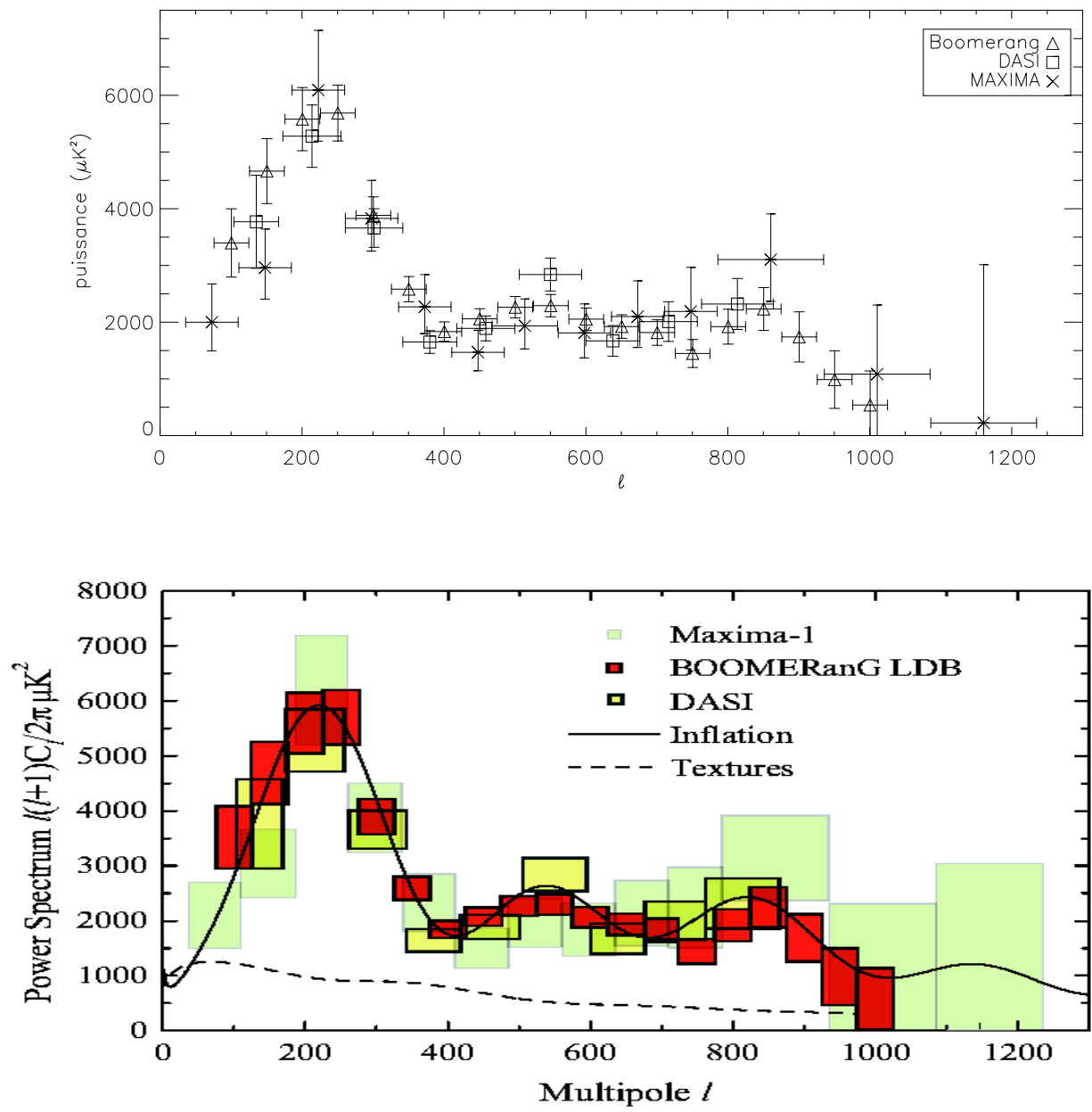


FIGURE 30 – **Premières mesures de  $C_\ell^T$** . Spectres de puissance mesurés par les expériences Boomerang, MAXIMA et DASI. Trois pics ressortent nettement autour de  $\ell = 200$ ,  $\ell = 550$  et  $\ell = 850$ .

de puissance angulaire des fluctuations de température favorisant les modèles inflationnaires, élimine les scénarios basés sur les défauts topologiques. Les précisions obtenues sur les paramètres cosmologiques deviennent importantes et sont maintenant de l'ordre de la dizaine de pourcent. Les prochaines missions prévues permettront d'atteindre quelques pourcents.

TABLE 3 – Estimations des paramètres cosmologiques selon les hypothèses faites : expériences Boomerang, MAXIMA et DASI seules (CMB seul), avec la distribution des galaxies IRAS-PSCz (Saunders et al., 2000), en fixant la constante de Hubble d’après le résultat des observations du satellite Hubble (Freedman et al., 2001) et en négligeant la matière noire chaude (des neutrinos par exemple,  $f_\nu = \Omega_\nu/\Omega_{\text{dm}}$  et donc  $\Omega_{\text{dm}} = \Omega_{\text{cdm}} + \Omega_\nu$ ).  $\Omega_{\text{dm}}$  est la densité de matière sombre ; les autres paramètres ont déjà été définis dans les pages qui précèdent. Dans le cas du CMB seul, la dégénérescence se retrouve dans la taille des barres d’erreurs dans  $\Omega_\kappa$  et  $\Omega_\Lambda$ .

	CMB seul	CMB + PSCz	CMB + $h = 0.72 \pm .08$	CMB + $f_\nu \sim 0$
$\Omega_\kappa$	$-0.06^{+0.13}_{-0.59}$	$-0.05^{+0.08}_{-0.15}$	$0.00^{+0.06}_{-0.06}$	$0.00^{+0.05}_{-0.06}$
$\Omega_\Lambda$	$0.60^{+0.32}_{-0.55}$	$0.53^{+0.17}_{-0.40}$	$0.66^{+0.10}_{-0.17}$	$0.66^{+0.10}_{-0.13}$
$h^2\Omega_{\text{dm}}$	$0.10^{+0.07}$	$0.10^{+0.04}_{-0.04}$	$0.12^{+0.05}_{-0.03}$	$0.12^{+0.05}_{-0.03}$
$h^2\Omega_b$	$0.02^{+0.06}_{-0.01}$	$0.02^{+0.01}_{-0.01}$	$0.02^{+0.01}_{-0.01}$	$0.02^{+0.01}_{-0.01}$
$f_\nu$	0.07	$0.05^{+0.30}$	$0.04^{+0.17}$	0
$n$	$0.93^{+0.75}_{-0.16}$	$0.91^{+0.13}_{-0.10}$	$0.93^{+0.13}_{-0.10}$	$0.93^{+0.12}_{-0.10}$
$h$	$0.42^{+0.23}_{-0.24}$	$0.57^{+0.31}_{-0.30}$	$0.71^{+0.12}_{-0.12}$	$0.73^{+0.11}_{-0.10}$
$z_{\text{réionisation}}$	$5.7^{+12.9}_{-5.7}$	$7.2^{+13.8}_{-7.2}$	$7.6^{+14.2}_{-7.6}$	$6.8^{+13.1}_{-6.8}$
$t_0$ [ $\times 10^9$ ans]	$20.5^{+9.0}_{-9.0}$	$14.2^{+4.3}_{-4.3}$	$12.3^{+1.6}_{-1.6}$	$12.7^{+1.5}_{-1.5}$

### 3.1.5 Variance cosmique

Les perturbations scalaires et tensorielles engendrées par l’inflation sont gaussiennes. Comme les processus menant de ces perturbations aux fluctuations du CMB sont linéaires, les fluctuations du CMB sont aussi gaussiennes, de moyenne nulle par définition. Ainsi, les coefficients  $a_{\ell m}^T$  sont issus d’une distribution gaussienne, de moyenne nulle et de variance  $C_\ell^T$ . Pour chaque valeur de  $\ell$ , on a  $2\ell + 1$  coefficients  $a_{\ell m}^T$ . Chaque variance  $C_\ell^T$  est donc issue d’une distribution de  $\chi^2$  (car c’est une valeur moyenne de carrés de variables gaussiennes) dont la largeur vaut  $C_\ell^T/\sqrt{2\ell + 1}$ . Cette largeur est beaucoup plus grande pour les petites valeurs de  $\ell$ , correspondant aux grandes échelles angulaires. Cela peut se comprendre qualitativement de la façon suivante : pour une grande échelle angulaire donnée, il existe peu de portions de ciel *indépendantes* de cette taille ; l’estimation du  $C_\ell^T$  correspondant est donc entachée d’une erreur qui diminue lorsque l’on considère des échelles de plus en plus petites. Il existe donc un domaine d’erreur en deçà duquel on ne peut descendre, c’est la variance cosmique. Pour une revue concernant la variance cosmique, voir par exemple Grishchuk & Martin (1997).

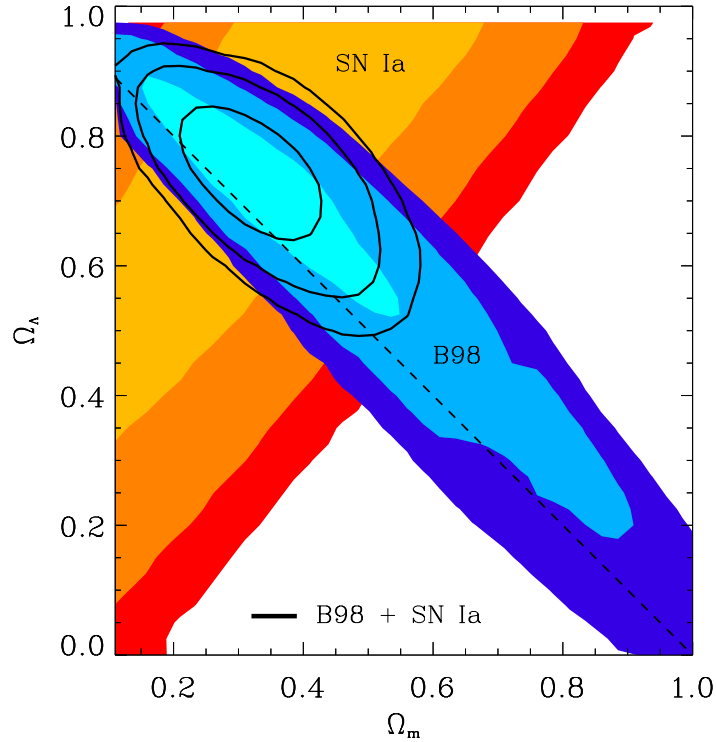


FIGURE 31 – **Estimation des paramètres  $\Omega_m$  et  $\Omega_\Lambda$ .** La superposition des contours issus des expériences de supernovæ de type Ia (sensibles à  $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ ) et de l'expérience CMB Boomerang (sensible à  $\Omega_m + \Omega_\Lambda$ ) permet de lever la dégénérescence entre ces deux paramètres cosmologiques. La région d'intersection est compatible avec un Univers plat,  $\Omega = 1 = \Omega_m + \Omega_\Lambda$ .

### 3.1.6 Principe du calcul complet du spectre

Le calcul complet consiste à exprimer les fluctuations de l'intensité du rayonnement. Celle-ci est liée à leur densité d'énergie par (voir Chandrasekhar (1960)) :

$$i = \frac{c}{4\pi} \rho_\gamma$$

et ses fluctuations à celles de la densité par :

$$\frac{\delta i}{i} = \frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} = \delta_\gamma.$$

Enfin, les fluctuations de température dues aux perturbations de densité sont données par :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{4} \delta_\gamma, \text{ car } \rho_\gamma \propto T^4.$$

L'évolution de  $\rho_\gamma$  est donnée par l'équation d'Einstein en mettant dans le tenseur énergie-impulsion la contribution des photons, en même temps que celles des autres espèces. La méthode consiste à étudier la propagation des photons dans un Univers perturbé. Ceux-ci

sont décrits par leur fonction de distribution. Si nous nous restreignons à la propagation des photons *après* leur découplage, on peut supposer qu'ils se propagent librement (au premier ordre) dans l'Univers selon des géodésiques et que leur fonction de distribution vérifie :

$$\frac{dp^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma = 0.$$

À cette équation de propagation, il faut ajouter l'équation de Liouville :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{dp^\mu}{dt} \frac{\partial f}{\partial p^\mu} = 0.$$

Si nous résolvions ces équations dans le cas d'un Univers plat de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (ordre 0 dans les perturbations), nous trouverions que  $f$  garde la même forme au cours du temps, c'est-à-dire que les photons gardent une distribution de corps noir mais à une température différente :

$$T(t) = \frac{a(t_{\text{dec}})}{a(t)} T(t_{\text{dec}}).$$

Nous avons déjà obtenu ce résultat page 28. C'est ce spectre décalé en température que nous observons effectivement, à l'ordre 0 (c'est celui que FIRAS a mesuré). Pour regarder les effets des perturbations de la métrique, on fait les calculs avec tous les potentiels décrivant la métrique perturbée.

Nous avons présenté dans cette partie les anisotropies de température du CMB et décrit la physique de ces fluctuations. Leur mesure précise à des résolutions angulaires faibles (au moins inférieures au degré) permet d'avoir accès aux paramètres cosmologiques. La température de ce rayonnement n'est cependant pas la seule source d'informations : sa polarisation est tout aussi riche mais elle est vraisemblablement beaucoup plus faible, et donc plus difficile à mesurer.



Suite aux superbes résultats des expériences CMB dont nous avons parlé dans la section 3.1.4, la mesure de la polarisation du rayonnement fossile est devenue la prochaine priorité. Citons par exemple les ballons Boomerang et Archéops qui ont muni les bolomètres du plan focal de polariseurs. L'intérêt de cette mesure est d'une part que la polarisation permet de déterminer les paramètres cosmologiques de manière indépendante et d'autre part permet d'avoir accès de façon directe aux ondes gravitationnelles primordiales, en permettant d'estimer l'indice spectral  $n_T$  du spectre de puissance des fluctuations tensorielles.

Nous allons étudier dans la suite cette polarisation : d'une part, nous présenterons les paramètres de Stokes qui permettent de quantifier la polarisation d'une onde : nous montrerons ensuite que le CMB doit être polarisé et que la figure de polarisation diffère selon qu'elle provienne de fluctuations scalaires ou tensorielles ; nous décrirons les figures de polarisation à l'aide des champs  $E$  et  $B$ . Enfin, nous définirons les spectres de puissance polarisés  $C_\ell^E$  et  $C_\ell^B$  et les spectres de corrélation entre température et polarisation  $C_\ell^{ET}$  et  $C_\ell^{BT}$ .

## 3.2 La polarisation du CMB

### 3.2.1 Les paramètres de Stokes



FIGURE 32 – **Portrait de George Gabriel Stokes (1819-1903)**. Stokes est surtout connu pour la loi hydrodynamique liée à la viscosité des fluides qui porte son nom.

Un rayonnement polarisé peut se décrire en utilisant les *paramètres de Stokes* (Chandrasekhar, 1960). Considérons une onde électromagnétique plane presque monochromatique<sup>17</sup> se propageant sur  $(Oz)$ . Cette onde peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E_x &= a_x e^{i(\omega t - \varphi_x(t))} \\ E_y &= a_y e^{i(\omega t - \varphi_y(t))}. \end{aligned}$$

L'onde est presque monochromatique si les amplitudes  $a_x$  et  $a_y$  et les phases  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  sont des fonctions qui ne changent que très peu sur une échelle de temps comparable à l'inverse

17. dont le contenu fréquentiel est étroitement regroupé autour de sa valeur moyenne  $\omega$ .

de la fréquence de l'onde (c'est-à-dire si elles ne changent pas trop au cours d'une période). Le rayonnement est dit polarisé s'il existe une corrélation entre  $E_x$  et  $E_y$ . Les paramètres de Stokes sont définis par les moyennes temporelles :

$$I = \langle |E_x|^2 + |E_y|^2 \rangle = \langle a_x^2 + a_y^2 \rangle \quad (122)$$

$$Q = \langle |E_x|^2 - |E_y|^2 \rangle = \langle a_x^2 - a_y^2 \rangle \quad (123)$$

$$U = \langle 2 \operatorname{Re}(E_x E_y^*) \rangle = \langle 2a_x a_y \cos(\varphi_x - \varphi_y) \rangle \quad (124)$$

$$V = \langle 2 \operatorname{Im}(E_x E_y^*) \rangle = \langle 2a_x a_y \sin(\varphi_x - \varphi_y) \rangle. \quad (125)$$

$Q$  et  $U$  caractérisent la polarisation linéaire tandis que  $V$  décrit la polarisation circulaire. La lumière naturelle (non polarisée) est décrite par  $Q = U = V = 0$ . On peut aussi exprimer ce résultat important à l'aide des matrices de Pauli :

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

En fonction de ces matrices,  $I$ ,  $Q$ ,  $U$  et  $V$  peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} I &= \langle \vec{E}^\dagger \sigma_0 \vec{E} \rangle \\ Q &= \langle \vec{E}^\dagger \sigma_3 \vec{E} \rangle \\ U &= \langle \vec{E}^\dagger \sigma_1 \vec{E} \rangle \\ V &= \langle \vec{E}^\dagger \sigma_2 \vec{E} \rangle \end{aligned} \quad (126)$$

où l'on a posé :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

Toute rotation à 2 dimensions peut s'écrire :

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \sigma_0 \cos \phi + i \sigma_2 \sin \phi.$$

Compte-tenu des relations de commutation des matrices de Pauli<sup>18</sup>, et des relations 126, il est évident que  $I$  et  $V$  sont invariants par rotation alors que  $Q$  et  $U$  ne le sont pas ; ils se transforment selon (voir FIG. 33) :

$$\begin{aligned} Q' &= Q \cos 2\phi + U \sin 2\phi \\ U' &= -Q \sin 2\phi + U \cos 2\phi \end{aligned} \quad (127)$$

---

18.  $[\sigma_i, \sigma_j] = i \sigma_k$  si le triplet  $(i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3$  est une permutation paire de  $(1, 2, 3)$ .

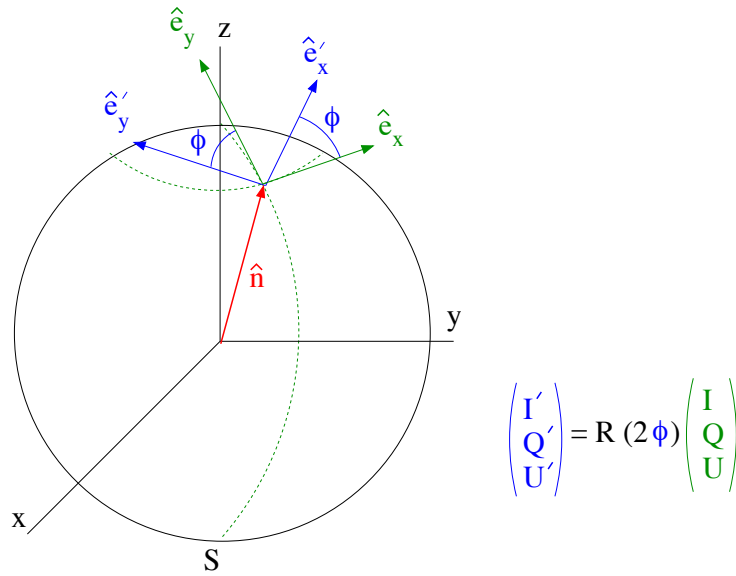


FIGURE 33 – **Transformation des paramètres de Stokes lors d’une rotation.** Un observateur mesure la polarisation d’une onde incidente provenant de la direction  $\hat{n}$  et définit dans son système de référence  $(\hat{e}_x, \hat{e}_y)$  les paramètres de Stokes de l’onde  $I, Q, U$  et  $V$ . S’il tourne ses axes d’un angle  $\phi$  autour de  $\hat{n}$  pour les amener en  $(\hat{e}'_x, \hat{e}'_y)$ ,  $I$  et  $V$  ne sont pas modifiés au cours de la transformation, contrairement à  $Q$  et  $U$ .

que l’on peut écrire avantageusement sous la forme :

$$(Q \pm iU)' = e^{\mp 2i\phi} (Q \pm iU), \quad (128)$$

l’exposant “ ’ ” signifiant “après rotation”. La relation 128 nous montre que les fonctions  $Q + iU$  et  $Q - iU$  sont des fonctions de spin 2 sur la sphère<sup>19</sup>.  $I$  et  $V$  sont donc des observables indépendantes du système de coordonnées utilisé pour étudier l’onde. Il est possible d’en fabriquer une troisième à partir de  $Q$  et  $U$  : c’est le “vecteur” de polarisation linéaire  $\vec{P}$ . Sa direction fait un angle :

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{U}{Q} \quad (129)$$

avec le vecteur  $x$  du système de coordonnées choisi et sa norme vaut :

$$P = \sqrt{Q^2 + U^2}.$$

Au cours d’une rotation d’angle  $\phi$ ,  $P$  est invariant (par définition) alors que  $\alpha$  se transforme  $\alpha - \phi$ .  $\alpha$  caractérise donc une direction constante, indépendante du système de référence. Dans le cas d’un rayonnement polarisé linéairement ( $V = 0$ ), l’orientation de la direction de la polarisation est reliée au signe de  $Q$  et  $U$  via l’Eq. 129. Cela se traduit schématiquement par la FIG. 34. La relation de conservation de l’énergie pour une onde polarisée à 100 % entre les 4 paramètres de Stokes est :

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2 ;$$

19. Une fonction définie sur la sphère est dite de spin 2 si elle se transforme selon  $f(\hat{n}) \mapsto e^{-2i\phi} f(\hat{n})$  au cours d’une rotation d’angle  $\phi$  autour de la direction  $\hat{n}$ , entre deux systèmes de référence tangents à la sphère en  $\hat{n}$  (voir FIG. 33).

sinon, on a l'inégalité :

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2.$$

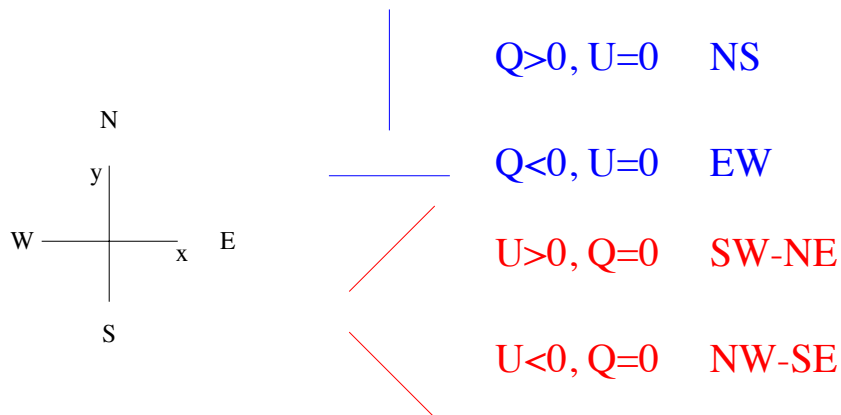


FIGURE 34 – **Orientation de la direction de polarisation.** Pour trouver l'orientation de la polarisation, on peut raisonner sur l'Eq. 129 ou bien se donner un système de référence  $xy$  et regarder les cas extrêmes du champ électrique  $E_x = 0$ ,  $E_y = 0$ ,  $E_x = E_y$  etc. Compte-tenu des définitions des paramètres de Stokes, il est facile de voir les relations entre les signes de  $Q$  et  $U$  et les intensités sur les axes  $x$  et  $y$ .

Enfin, une propriété fondamentale des paramètres de Stokes est qu'ils sont additifs lorsque l'on superpose deux ondes incohérentes.

### 3.2.2 Polarisation du CMB et quadrupôles

En supposant qu'à l'époque de la dernière diffusion l'Univers est bien décrit par un fluide couplé photons-baryons-électrons, nous allons démontrer que si le rayonnement présente des anisotropies quadrupolaires alors le CMB doit être polarisé. En revanche, si le rayonnement est uniforme, aucune polarisation n'est engendrée.

La diffusion des photons sur les électrons est décrite par la diffusion Thomson, dont la section efficace différentielle<sup>20</sup> est donnée par :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} |\epsilon_{\text{entrée}} \cdot \epsilon_{\text{sortie}}|^2$$

où  $\sigma_T$  est la section efficace Thomson totale et  $\epsilon_{\text{entrée}}$  et  $\epsilon_{\text{sortie}}$  sont les états de polarisation des deux photons entrant et sortant. Pour comprendre qualitativement le lien entre polarisation et diffusion Thomson, nous allons nous appuyer sur la FIG. 35. Dans cette figure, l'électron représenté est au repos. Supposons qu'il soit éclairé par la gauche par un flux de photons non polarisés plus intense que la moyenne. Étant donnée la forme ( $|\epsilon_{\text{entrée}} \cdot \epsilon_{\text{sortie}}|$ ) de la section efficace de l'interaction, la composante verticale de la polarisation est préférentiellement transmise. Supposons également qu'il soit éclairé par en haut par un flux de photons

20. Nous considérons ici la limite non-relativiste car  $T \sim 3000 \text{ K} \sim 10^{-6} m_e c^2 \ll m_e c^2$ .

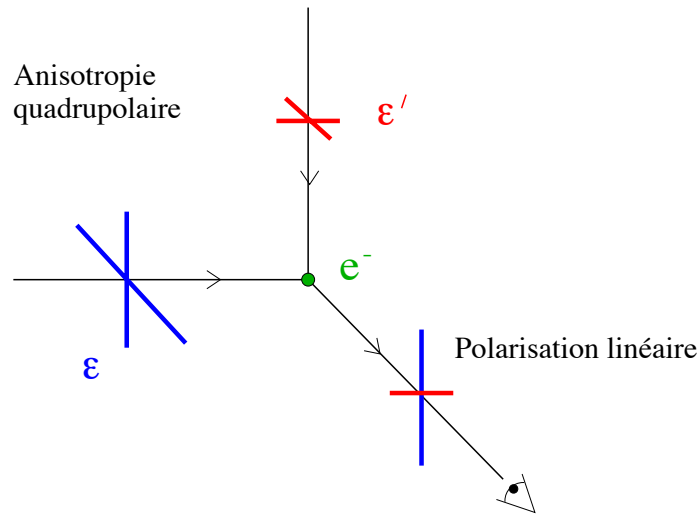


FIGURE 35 – **Quadrupôles et polarisation.** Une anisotropie quadrupolaire dans le flux de photons engendre une polarisation linéaire dans le rayonnement détecté par l’observateur (voir les explications dans le texte).

non polarisés moins intense que la moyenne. En utilisant le même argument, la polarisation horizontale est préférentiellement transmise. L’observateur va donc voir une composante verticale très intense et une composante horizontale peu intense : il constate que le rayonnement reçu est polarisé linéairement. En partant de deux faisceaux de photons non polarisés mais présentant une anisotropie quadrupolaire locale, on peut de la sorte engendrer de la polarisation linéaire. Pour que le CMB soit polarisé, il faut des quadrupôles dans le rayonnement sur la surface de dernière diffusion. S’il y en a eu, on s’attend naturellement, d’après ce qui

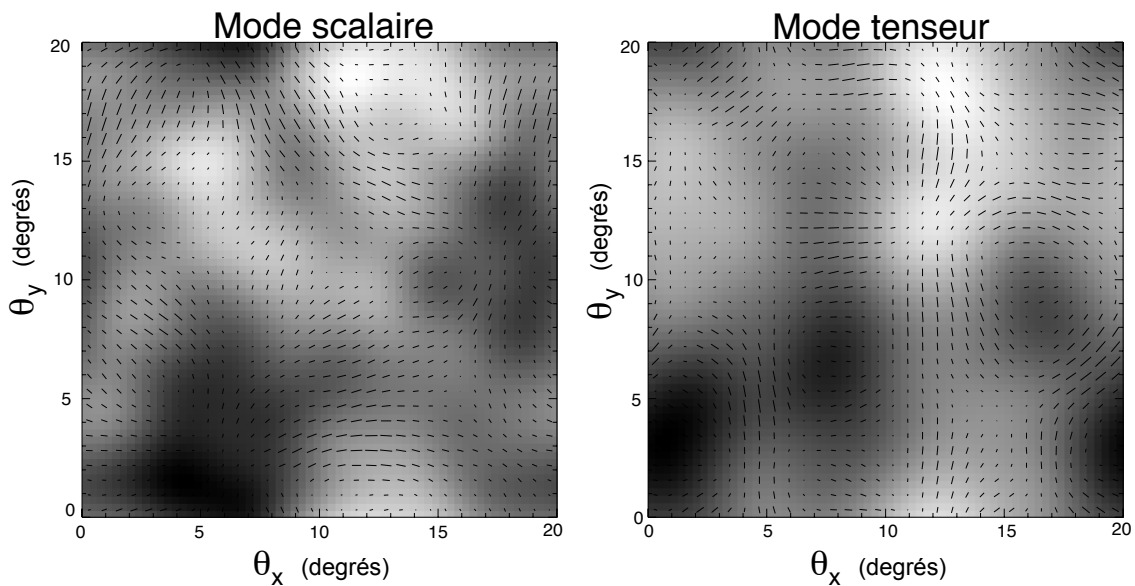


FIGURE 36 – **Corrélation température-polarisation.** Sur ces figures sont superposées les fluctuations de température issues de fluctuations scalaires et tensorielles et la direction de la partie corrélée de la polarisation.

précède, à ce qu'il existe une certaine corrélation entre les fluctuations de température du CMB et la polarisation (voir les FIGS. 36 extraites de Crittenden et al. (1995) et voir aussi Coulson et al. (1994)). Pour cette raison, on cherchera à détecter dans les futures données polarisées des corrélations entre ces deux observables.

*Notons que la diffusion Thomson ne peut pas engendrer de polarisation circulaire.* En effet, la diffusion Thomson modifie les amplitudes des composantes  $E_x$  et  $E_y$  du champ électrique mais pas leur phase. Elle peut donc faire tourner la direction de la polarisation. Pour cette raison, nous ne considérerons plus le paramètre de polarisation circulaire  $V$  dans la suite.

Nous allons établir quantitativement la relation entre polarisation linéaire et quadrupôles. Nous utilisons pour cela le système de référence représenté dans la FIG. 37 : l'axe  $z$  est celui de la direction de la lumière émergente. Celle-ci est décrite par les paramètres de Stokes  $I$ ,  $Q$ ,  $U$  et  $V$ . La lumière incidente, non polarisée, est décrite par son intensité  $I'(\theta, \phi)$ .  $\epsilon_x$  et  $\epsilon'_x$  sont perpendiculaires au plan de la diffusion,  $\epsilon_y$  et  $\epsilon'_y$  sont perpendiculaires à  $\epsilon_x$  et  $\epsilon'_x$  et sont contenus dans le plan de la diffusion. Comme Kosowsky (1996), nous utiliserons

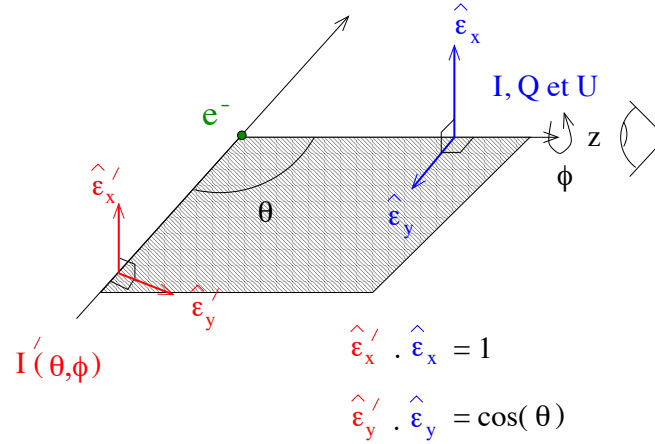


FIGURE 37 – **Diffusion Thomson d'un photon par un électron.** Le photon sortant ayant un état de polarisation proche de celui du photon entrant est favorisé.

$I_x = (I+Q)/2$  et  $I_y = (I-Q)/2$  plutôt que  $I$  et  $Q$  pour décrire la diffusion. L'onde incidente, non polarisée, est telle que  $I'_x = I'_y = I'/2$ . Les intensités diffusées sont :

$$I_x = \frac{3\sigma_T}{8\pi} (I'_x \underbrace{(\epsilon'_x \cdot \epsilon_x)}_1 + I'_y \underbrace{(\epsilon'_y \cdot \epsilon_x)}_0) = \frac{3\sigma_T}{16\pi} I' \quad (130)$$

$$I_y = \frac{3\sigma_T}{8\pi} (I'_x \underbrace{(\epsilon'_x \cdot \epsilon_y)}_0 + I'_y \underbrace{(\epsilon'_y \cdot \epsilon_y)}_{\cos^2 \theta}) = \frac{3\sigma_T}{16\pi} I' \cos^2 \theta, \quad (131)$$

soit

$$\begin{aligned} I &= I_x + I_y = \frac{3\sigma_T}{16\pi} I' (1 + \cos^2 \theta) \\ Q &= I_x - I_y = \frac{3\sigma_T}{16\pi} I' \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Pour le calcul de  $U$ , on utilise la loi de transformation de  $Q$  et  $U$  au cours d'une rotation (voir Eq. 127). On impose que l'observateur tourne ses axes de  $\pi/4$  autour de  $z$  (voir FIG. 37) et on recalcule  $Q$  car dans ce cas,  $Q^R = Q \cos \pi/2 + U \sin \pi/2 = U$ . Ce nouveau  $Q$  calculé dans le système de référence tourné est alors égal à  $U$  dans le système de référence non tourné. On trouve alors :

$$I_x^R = \frac{3\sigma_T}{8\pi} \left( I'_x \underbrace{(\epsilon'_x \cdot \epsilon_x^R)^2}_{1/2} + I'_y \underbrace{(\epsilon'_y \cdot \epsilon_x^R)^2}_{\cos^2 \theta/2} \right) = \frac{3\sigma_T}{32\pi} I' (1 + \cos^2 \theta)$$

$$I_y^R = \frac{3\sigma_T}{8\pi} \left( I'_x \underbrace{(\epsilon'_x \cdot \epsilon_y^R)^2}_{1/2} + I'_y \underbrace{(\epsilon'_y \cdot \epsilon_y^R)^2}_{\cos^2 \theta/2} \right) = \frac{3\sigma_T}{32\pi} I' (1 + \cos^2 \theta),$$

soit

$$I^R = \frac{3\sigma_T}{16\pi} I' (1 + \cos^2 \theta)$$

$$Q^R = 0 = U.$$

On vérifie bien entendu l'invariance par rotation de  $I$  :  $I^R = I$ . Dans ces dernières équations, l'exposant  $^R$  signifiait "dans le système de référence tourné". Nous avons maintenant les expressions des intensités et  $Q$  diffusés par un électron. Pour connaître l'intensité et  $Q$  total, il faut intégrer sur toutes les directions incidentes possibles. On peut donc écrire :

$$I = \frac{3\sigma_T}{16\pi} \int I'(\theta, \phi) (1 + \cos^2 \theta) d\Omega$$

$$Q = \frac{3\sigma_T}{16\pi} \int I'(\theta, \phi) \sin^2 \theta \cos 2\phi d\Omega$$

$$U = \frac{3\sigma_T}{16\pi} \int I'(\theta, \phi) \sin^2 \theta \sin 2\phi d\Omega.$$

Pour développer ce calcul, on décompose habituellement  $I'$  sur les harmoniques sphériques :

$$I'(\theta, \phi) = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (132)$$

$$= \sum_{\ell m} a_{\ell m} \lambda_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (133)$$

L'intégrale sur  $\phi$  dans le calcul de  $I$  fait apparaître un terme  $\delta_{m0}$  : seuls les  $a_{\ell 0}$  interviennent. Compte-tenu de l'orthogonalité des  $\lambda_{\ell}^m$ , on montre finalement que seuls  $a_{00}$  et  $a_{20}$  contribuent. Pour  $Q$  et  $U$ , on montre de la même manière que seul  $a_{22}$  contribue. Le calcul exact donne les résultats suivants :

$$I = \frac{3\sigma_T}{16\pi} \left( \frac{8}{3} \sqrt{\pi} a_{00} + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} a_{20} \right) \quad (134)$$

$$Q = \frac{3\sigma_T}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \operatorname{Re}(a_{22}) \quad (135)$$

$$U = -\frac{3\sigma_T}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \operatorname{Im}(a_{22}). \quad (136)$$

De ces résultats, on en déduit que *la diffusion Thomson peut engendrer de la polarisation linéaire si l'intensité du rayonnement incident a une composante non nulle sur  $Y_2^2$  ( $a_{22} \neq 0$ ), c'est-à-dire si le rayonnement présente une anisotropie quadrupolaire locale.*

Les estimations du taux de polarisation attendu varient peu en fonction du modèle cosmologique choisi et est de l'ordre de 10 % des fluctuations de températures (Harari et Zaldarriaga, 1993; Crittenden et al., 1993). Nous allons préciser ce que signifie ce 10 %. Tout rayonnement peut être décrit par une superposition de deux ondes, l'une non polarisée (NP) et l'autre polarisée à 100 % (P). Ces deux ondes sont elles-mêmes décrites par deux ensembles de paramètres de Stokes :

$$\begin{aligned} \{I, Q, U\}_{\text{NP}} &= \left\{ I - \sqrt{Q^2 + U^2}, 0, 0 \right\} \quad \text{pour la partie non polarisée;} \\ \{I, Q, U\}_{\text{P}} &= \left\{ \sqrt{Q^2 + U^2}, Q, U \right\} \quad \text{pour la partie polarisée à 100 \%;} \end{aligned}$$

$I$  désignant ici l'intensité *totale*. L'intensité polarisée est :

$$I_{\text{P}} = \sqrt{Q^2 + U^2}.$$

Lorsque l'on dit que le CMB est polarisé à 10 % des fluctuations de température du CMB, on entend que  $I_{\text{P}} \sim 10 \% \delta T$  c'est-à-dire de l'ordre du  $\mu\text{K}$ . Une revue très détaillée sur la polarisation du CMB est faite dans Kosowsky (1996). Se référer aussi à la thèse de Zaldarriaga (1998).

### 3.2.3 Figures de polarisation — champs $E$ et $B$

Nous avons vu que de la polarisation linéaire était créée s'il existait des quadrupôles sur la surface de dernière diffusion. De tels quadrupôles existent. Les fluctuations de la métrique, correspondant aux fluctuations de densité (scalaire), à la vorticité de fluide photon-baryon (vectorielle) et aux ondes gravitationnelles primordiales (tensorielles) présentent toutes des quadrupôles. Nous allons illustrer comment ils apparaissent dans le cas des fluctuations de densité et des ondes gravitationnelles. Du point de vue de l'observateur, la polarisation s'observe autour des points remarquables du CMB, les points chauds et les points froids. Une surdensité de matière sur la surface de dernière diffusion engendre un fort potentiel gravitationnel (en valeur absolue) et correspond à un point froid du CMB puisque les photons provenant de cette région ont dû subir un *redshift* plus important que d'autres en provenance d'une région où le potentiel gravitationnel était plus faible (moins négatif). Réciproquement, nous percevons les sous-densités de matière comme des points chauds du CMB. De même, les ondes gravitationnelles primordiales, décrites par les fluctuations tensorielles de la métrique engendrent également des points chauds et des points froids.

Nous allons voir que la figure de polarisation autour d'un point chaud ou d'un point froid diffère : elle dépend d'une part de la température du point considéré et d'autre part de la nature de la perturbation responsable de la température de ce point. Nous verrons par exemple que la polarisation du CMB peut mettre en évidence de façon spécifique la présence d'ondes gravitationnelles primordiales.



**Les fluctuations de densité.** Nous considérons ici une surdensité de masse à symétrie sphérique. Une telle surdensité nous apparaît comme une région où le potentiel a une symétrie circulaire, puisque nous l'observons en projection sur la sphère céleste. Le centre de la perturbation est le centre de symétrie.

Intéressons-nous aux trajectoires des électrons, puisque ce sont eux qui diffusent les photons que nous observons et raisonnons sur la FIG. 38.

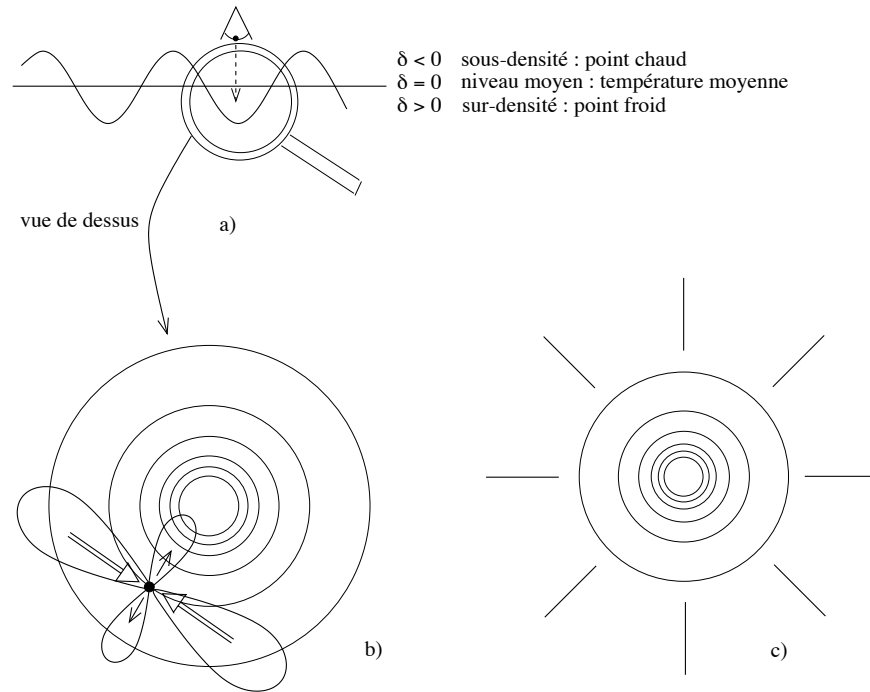


FIGURE 38 – **Polarisation autour d’une sur-densité.** Allure de la figure de polarisation (c) autour d’un point froid du CMB, correspondant à une sur-densité dans le potentiel gravitationnel (a) ; la figure (b) est une vue de dessus de la figure (a), depuis le système de référence lié à l’électron qui voit une anisotropie quadrupolaire menant à de la polarisation. Inversement, la figure de polarisation autour d’un point chaud est tournée de  $90^\circ$  par rapport à celle-ci : la polarisation est orientée tangentielllement aux isocontours (à comparer avec la FIG. 36).

Le potentiel gravitationnel moyen de la surface de dernière diffusion est représentée par la ligne horizontale. Les fluctuations de densité se traduisent par des fluctuations dans le potentiel gravitationnel, représentée par la courbe oscillant autour du potentiel moyen dans la FIG. 38a. Comme nous l’avons vu, des régions se trouvant au-dessus de la moyenne sont des sous-densités et correspondent à des points chauds de température du CMB alors que celles se trouvant en-dessous sont des sur-densités, les photons doivent perdre de l’énergie pour s’extraire de ces puits de potentiel et donnent les points froids du CMB.

La FIG. 38b représente un puits de potentiel vu sur la surface de la sphère céleste. Nous allons suivre la trajectoire de l’électron représenté par le point noir ; il tombe vers le centre de la perturbation. Les différents cercles concentriques représentent (arbitrairement) des isocontours de densité. La vitesse d’un point est d’autant plus grande que ce point est proche du centre de la perturbation, de sorte que les électrons se trouvant sur la même direction

radiale que notre électron test s'éloignent de lui. Par contre, ceux qui se trouvent sur ses côtés s'en rapprochent car les lignes de courant convergent au centre de la perturbation.

Par conséquent, le fluide cosmique se rapproche de notre électron selon une direction ortho-radiale (par ses "côtés") et s'éloignent de lui dans la direction de son mouvement, résultant en un quadrupôle dans son système de référence propre ; les grands lobes symbolisent une forte intensité (les électrons se rapprochent) et les petits une faible intensité (ils s'éloignent). À cause du couplage photons-baryons-électrons, le flux de photons est similaire à celui des électrons : l'électron test que nous avons choisi est donc éclairé par un rayonnement qui présente une anisotropie quadrupolaire ; la diffusion s'accompagne, comme nous l'avons vu, d'une polarisation linéaire. En appliquant les règles de la diffusion Thomson sur la polarisation, nous voyons que les photons diffusés présentent une polarisation parallèle à la trajectoire de l'électron, c'est-à-dire radiale dans le système de référence radial lié au centre de la perturbation (voir FIG. 38c).

*Un point froid du CMB engendré par une fluctuation de densité donne une figure de pola-*

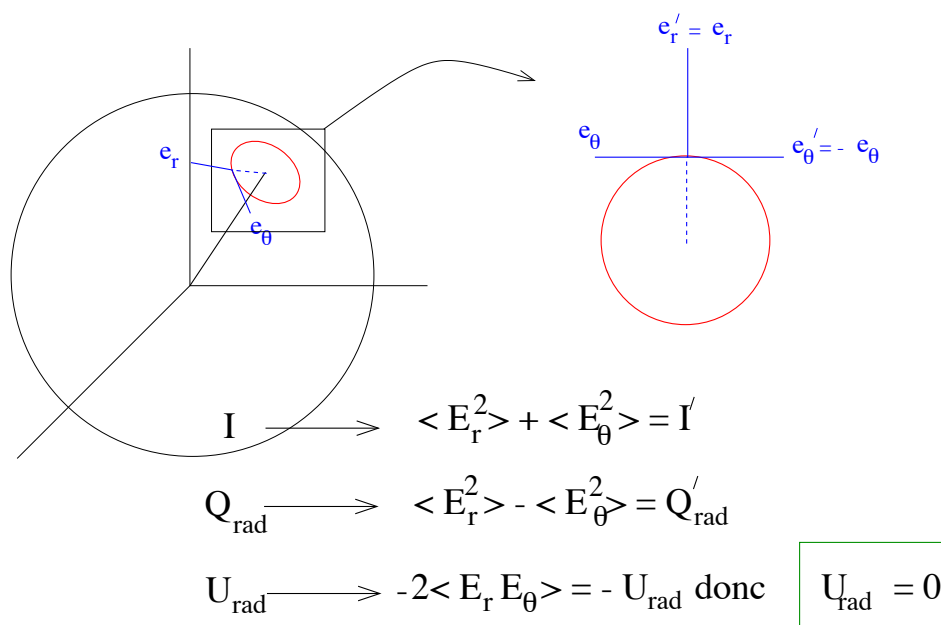


FIGURE 39 – **Paramètres de Stokes autour d’une perturbation scalaire.** À cause de l’invariance sous parité, une perturbation de densité ne génère pas de polarisation  $U_{\text{rad}}$ .

*risation radiale.*

Le raisonnement concernant la sous-densité est analogue. Il suffit de changer la direction des vitesses dans le quadrupôle et l’on trouve que la direction de la polarisation est tournée de  $90^\circ$  par rapport au cas de la sur-densité.

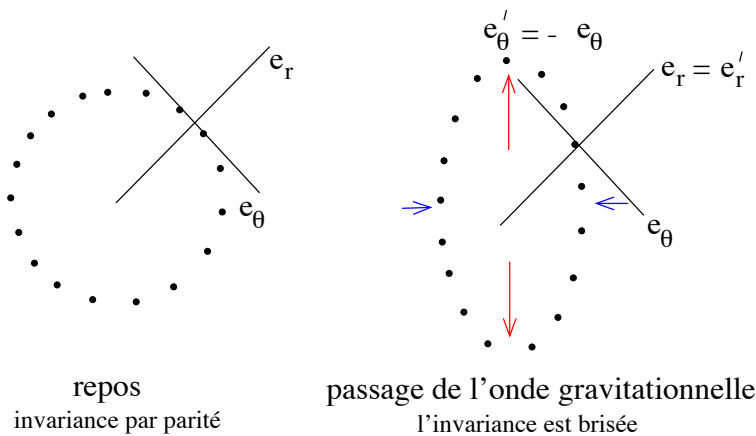
*Un point chaud du CMB engendré par une fluctuation de densité donne une figure de polarisation tangentielle.*

Qu’en est-il des paramètres de Stokes dans le voisinage d’un point chaud ou froid dans le cas des perturbations de densité ? Dans la FIG. 39, l’observateur est au centre de la sphère céleste. La perturbation qu’il regarde, à symétrie circulaire, est représentée par le cercle. On se place dans le **système de référence radial** lié à cette perturbation et on considère les paramètres de Stokes  $Q_{\text{rad}}$  et  $U_{\text{rad}}$  dans ce système, caractérisé par les vecteurs de base locaux

$e_r$  et  $e_\theta$ . De part sa symétrie — la perturbation est invariante par **parité** —  $I_{\text{rad}}$ ,  $Q_{\text{rad}}$  et  $U_{\text{rad}}$  doivent être aussi invariants par parité, puisqu'il s'agit toujours de la même perturbation :  $e_\theta$  se transforme en  $-e_\theta$ ,  $e_r$  reste inchangé. Formellement, sous cette transformation, on constate que  $I_{\text{rad}}$  et  $Q_{\text{rad}}$  restent bien invariants alors que  $U_{\text{rad}}$  se transforme en son opposé : il faut donc que  $U_{\text{rad}} = 0$ .

*Une perturbation scalaire ne peut donc pas engendrer de polarisation  $U_{\text{rad}}$ .*

**Les fluctuations tensorielles.** Les fluctuations tensorielles sont identifiables aux ondes gravitationnelles primordiales. Une onde gravitationnelle a la propriété de déformer l'espace temps lors de son passage. Par exemple, un ensemble de particules test disposées en cercle comme sur la FIG. 40 est déformé quand l'onde se propageant sur  $z$  passe. Pour le calcul des



$$U_{\text{rad}} \neq 0$$

(éventuellement)

FIGURE 40 – **Paramètres de Stokes autour d'une perturbation tensorielle.** Contrairement aux perturbations scalaires, les perturbations tensorielles ne sont pas invariantes par parité et peuvent générer de la polarisation  $U_{\text{rad}}$ . Comparer avec la FIG. 39.

paramètres de Stokes, nous nous plaçons à nouveau dans le système de référence radial ( $e_r, e_\theta$ ) lié à la perturbation. La transformation par parité transforme, comme dans le cas précédent, ( $e_r, e_\theta$ ) en ( $e_r, -e_\theta$ ). Lors du passage de l'onde gravitationnelle, les particules test ne sont plus en cercle mais en ellipse, figure qui n'est pas invariante par parité (sauf cas particulier où l'on regarde le long des axes de symétrie de l'ellipse) ; par conséquent les paramètres de Stokes  $Q_{\text{rad}}$  et  $U_{\text{rad}}$  ne le sont pas non plus. Dans ce cas,  $U'_{\text{rad}} \neq U_{\text{rad}}$ .

*Une perturbation tensorielle peut engendrer les deux types de polarisation  $Q_{\text{rad}}$  et  $U_{\text{rad}}$ .*

**Les champs de polarisation  $E$  et  $B$ .** Nous voyons ainsi la différence fondamentale entre les fluctuations scalaires et les fluctuations tensorielles : les premières ne donnent que de la

polarisation  $Q_{\text{rad}}$  alors que les secondes donnent à la fois de la polarisation  $Q_{\text{rad}}$  et  $U_{\text{rad}}$ .

Le problème que nous avons pour décrire la polarisation est la dépendance dans le système de coordonnées, puisque les résultats que nous avons établis précédemment ne sont valables que dans le système de référence radial du point que l'on regarde. Il est préférable de pouvoir considérer la polarisation indépendamment d'un système de référence local. Pour s'en affranchir, nous introduisons deux nouvelles quantités  $E$  et  $B$  définies comme des valeurs moyennes pondérées de  $Q_{\text{rad}}$  et  $U_{\text{rad}}$ . La moyenne consiste à intégrer les paramètres de Stokes radiaux autour du centre de la perturbation le long de cercles concentriques de rayons de plus en plus grands. Pour caractériser la polarisation autour d'un point, il faut que les cercles de rayons faibles contribuent plus que les cercles lointains. De la sorte,  $E$  et  $B$  ne dépendent pas du système de référence. Ils sont définis par :

$$E(\hat{\mathbf{n}}) = - \int d^2\hat{\mathbf{n}}' w(\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}') Q_{\text{rad}}(\hat{\mathbf{n}}') \quad (137)$$

$$B(\hat{\mathbf{n}}) = - \int d^2\hat{\mathbf{n}}' w(\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}') U_{\text{rad}}(\hat{\mathbf{n}}') \quad (138)$$

où  $w$  est une fonction de poids valant  $w(\theta) = 1/(\pi\theta^2)$  pour  $\theta \neq 0$  et 0 pour  $\theta = 0$  (Zaldarriaga, 1998). Le fait que le poids vale 0 pour un cercle de rayon nul signifie que l'on ne peut pas parler de polarisation en un point, mais seulement dans son voisinage.

Par construction,  **$E$  est un champ scalaire invariant par rotation et par parité,  $B$  est un champ scalaire invariant par rotation uniquement.** Les appellations  $E$  et  $B$  pour les champs de polarisation sont dues à leurs propriétés de symétrie, analogues à celles des champs électrique et magnétique. Connaissant l'orientation de la polarisation en fonction du signe de  $Q$  et  $U$ , on en déduit facilement le lien entre le signe de  $Q_{\text{rad}}$  et  $U_{\text{rad}}$  et le signe de  $E$  et  $B$ , voir la FIG. 41.

### 3.2.4 Les spectres polarisés

Nous avons vu que, à l'instar de la température, les champs  $E$  et  $B$  sont scalaires, invariants par rotation et définis sur la sphère. Étant scalaires, on peut utiliser les harmoniques sphériques usuelles comme fonctions de base. La décomposition des deux champs scalaires  $E$  et  $B$  s'écrit :

$$E(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}^E Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{n}}) \quad (139)$$

$$B(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}^B Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{n}}). \quad (140)$$

Les nombres complexes  $a_{\ell m}^E$  et  $a_{\ell m}^B$  sont les *coefficients du développement* des champs sur les harmoniques sphériques. De même que pour la température, on définit les spectres de puissance par :

$$C_{\ell}^E = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{\ell m}^E|^2 = \langle |a_{\ell m}^E|^2 \rangle$$

$$C_{\ell}^B = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{\ell m}^B|^2 = \langle |a_{\ell m}^B|^2 \rangle$$

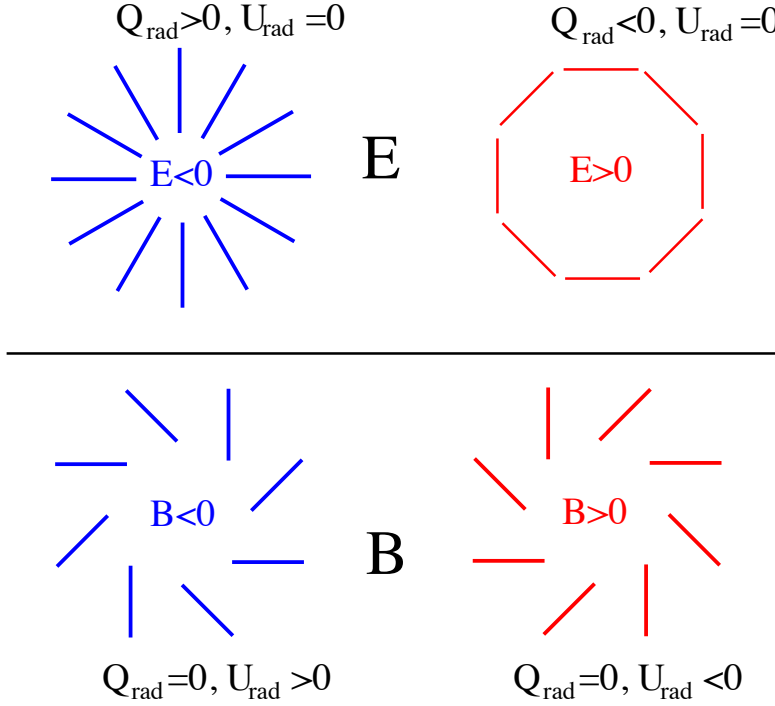


FIGURE 41 – **Figures de polarisation autour des champs  $E$  et  $B$ .** La figure de polarisation autour de  $E$  est manifestement invariante par parité, contrairement à celle autour du champ  $B$ . Le lien entre le signe de  $E$  ou  $B$  et les paramètres de Stokes définis dans le système radial se déduit facilement des Eqs. 137 et 138.

et les spectres de corrélation par :

$$\begin{aligned}
 C_\ell^{ET} &= \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{\ell m}^E * a_{\ell m}^T = \langle a_{\ell m}^E * a_{\ell m}^T \rangle \\
 C_\ell^{BT} &= \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{\ell m}^B * a_{\ell m}^T = \langle a_{\ell m}^B * a_{\ell m}^T \rangle \\
 C_\ell^{EB} &= \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{\ell m}^E * a_{\ell m}^B = \langle a_{\ell m}^E * a_{\ell m}^B \rangle.
 \end{aligned}$$

Pour des raisons de parité, les spectres  $C_\ell^{BT}$  et  $C_\ell^{EB}$  sont nuls.

En pratique, nous n'avons pas accès directement aux champs  $E$  et  $B$ . Ce que l'on mesure avec un instrument, ce sont les paramètres de Stokes  $Q$  et  $U$ . Nous avons vu que  $Q + iU$  et  $Q - iU$  sont des quantités de spin-2. Pour les décrire sur la sphère, il nous faut des fonctions de base ayant les mêmes propriétés de symétrie : ce sont les harmoniques sphériques de spin-2, notées  ${}_2Y_\ell^m$  et  ${}_{-2}Y_\ell^m$ . Sur ces fonctions de base, la décomposition de  $Q \pm iU$  s'écrit :

$$(Q \pm iU)(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} a_{\pm 2\ell m} {}_{\pm 2}Y_\ell^m(\hat{\mathbf{n}}). \quad (141)$$

Le lien entre  $Q$  et  $U$  avec  $E$  et  $B$  se fait via les coefficients des développements qui vérifient les relations :

$$a_{\ell m}^E = -\frac{a_{2\ell m} + a_{-2\ell m}}{2} \quad (142)$$

$$\text{et } a_{\ell m}^B = i \frac{a_{2\ell m} - a_{-2\ell m}}{2}. \quad (143)$$

Le fait que  $Q$  et  $U$  sont des champs réels implique que les coefficients doivent être tels que :

$$\begin{aligned} a_{\ell m}^{E*} &= (-1)^m a_{\ell -m}^E, & a_{\ell m}^{B*} &= (-1)^m a_{\ell -m}^B \\ a_{2\ell m}^{E*} &= (-1)^m a_{-2\ell -m}^E, & a_{-2\ell m}^{E*} &= (-1)^m a_{2\ell -m}^E. \end{aligned}$$

Le signal polarisé étant de l'ordre du  $\mu\text{K}$ , on s'attend à mesurer des spectres de puissance comme ceux indiqués dans la FIG. 42, extraite de Kinney (1998).

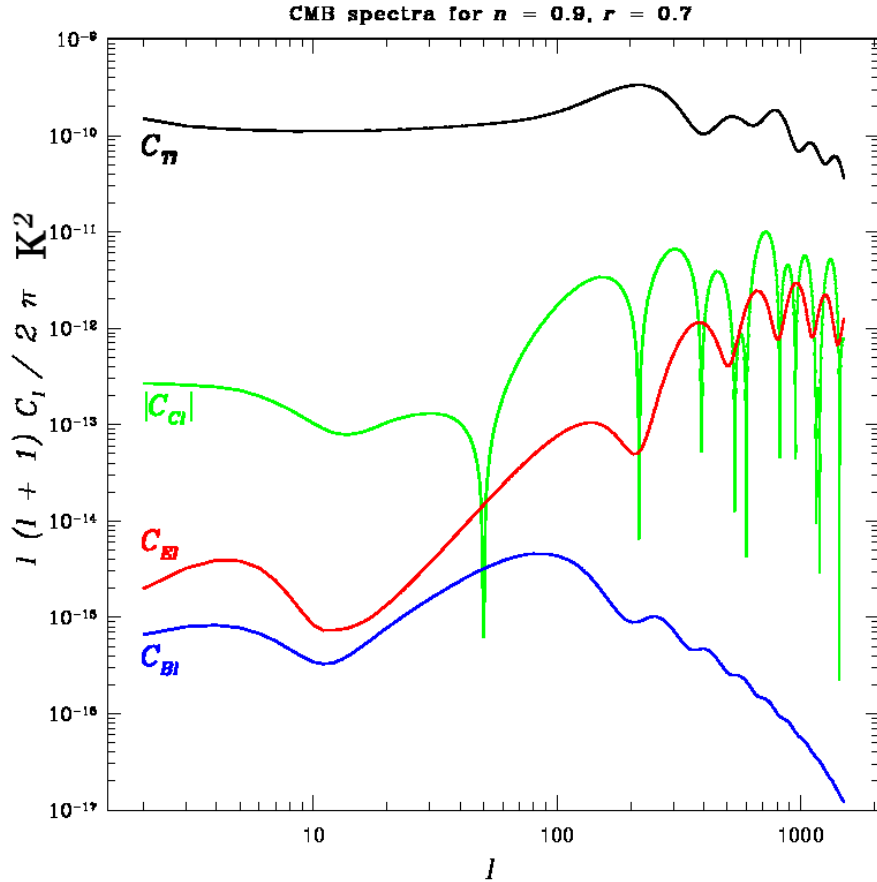


FIGURE 42 – **Spectres simulés de température et de polarisation.** Même si les spectres polarisés attendus dans les modèles inflationnaires les plus classiques sont de 1 à 5 ordres inférieurs au spectre de température selon la valeur de  $\ell$ , le satellite PLANCK devrait être capable de les mesurer avec une bonne précision jusqu'à  $\ell \sim 1200$ . Les spectres  $C_{T\ell}$ ,  $C_{C\ell}$ ,  $C_{E\ell}$  et  $C_{B\ell}$  présentés dans cette figure sont, respectivement, les spectres de température, corrélation  $T - E$ , polarisation  $E$  et polarisation  $B$ .

### 3.2.5 Aperçu de l'équation de transfert

De même que pour la température, il nous faut étudier la fonction de distribution des photons. Le cas polarisé est plus compliqué car il faut considérer l'évolution des quatre paramètres de Stokes. Pour cela, nous posons :

$$\widehat{\mathbf{i}}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} I_l \\ I_r \\ U \\ V \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur colonne représente les paramètres de Stokes de l'onde provenant de la direction définie par les angles  $(\theta, \phi)$  à la fréquence  $\nu$ . Les intensités  $I_l$  et  $I_r$  sont celles mesurées sur deux directions orthogonales; leur somme est l'intensité totale  $I$  et leur différence est le paramètre de Stokes  $Q$ . Avec ces variables, et au premier ordre, les équations de transfert s'écrivent :

$$\boxed{\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma_\alpha}{a} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{d\nu}{dt} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \widehat{\mathbf{i}} = -\sigma_T n_e \mathbb{D}(\widehat{\mathbf{i}})}$$

où  $\sigma_T$  est la section efficace totale (intégrée) de la diffusion Thomson,  $n_e$  est la densité des électrons libres (ceux qui sont susceptibles de diffuser les photons) et  $\gamma_\alpha$  sont les cosinus directeurs du vecteur unitaire dans la direction  $(\theta, \phi)$ . L'opérateur  $\mathbb{D}$  est donné par :

$$\mathbb{D}(\widehat{\mathbf{i}}) = \widehat{\mathbf{i}} - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mathbf{P}(\mu, \phi, \mu', \phi') \widetilde{\mathbf{i}} d\mu' d\phi'. \quad (144)$$

Dans cette équation,  $\mu = \cos \theta$ ,  $\mu' = \cos \theta'$ .  $\mathbf{P}$  est une matrice  $4 \times 4$  (introduite par Chandrasekhar), appelée *matrice de phase*. Elle s'écrit comme le produit de 3 matrices :

$$\mathbf{P}(\cos \theta, \phi, \cos \theta', \phi') = \mathbf{L}(\pi - i_2) \mathbf{R}(\cos \Theta) \mathbf{L}(-i_1).$$

La matrice  $\mathbf{L}$  caractérise la façon dont changent les composantes  $(I_y, I_x, U, V)$  au cours d'une rotation des axes d'un angle  $\phi$ . Son expression est la suivante :

$$\mathbf{L}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \frac{\sin 2\phi}{2} & 0 \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\frac{\sin 2\phi}{2} & 0 \\ -\sin 2\phi & \sin 2\phi & \cos 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $\mathbf{R}$  contient les coefficients de la diffusion Thomson; parmi ces coefficients, nous en avons déjà trouvé deux  $((3/2) \cos^2 \Theta)$  sur la composante  $y$  et  $(3/2)$  sur la composante  $x$

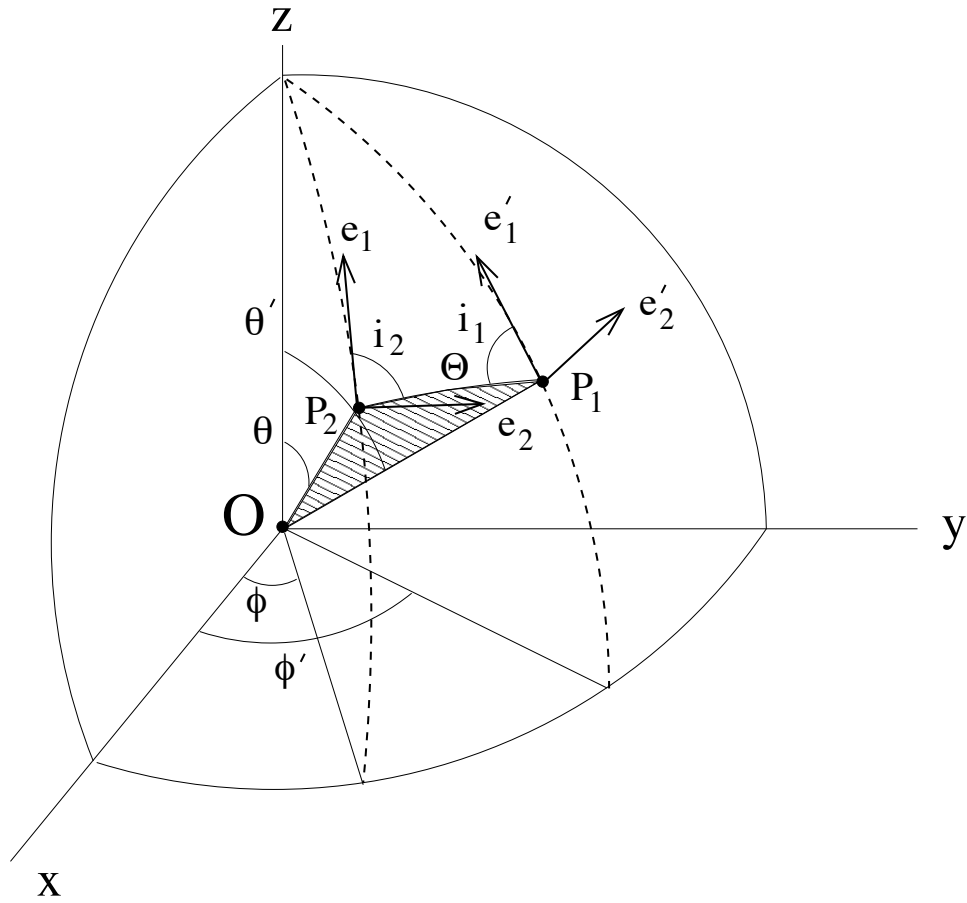


FIGURE 43 – **Géométrie de la diffusion Thomson.** Le plan de la diffusion est le plan  $[OP_1P_2]$ . L'angle  $\Theta$  est défini par  $\Theta = (\mathbf{OP}_1, \mathbf{OP}_2)$ .

lorsque nous avons montré que la polarisation était créée par les quadrupôles, page 94, Eqs. 130 et 131. Un calcul plus général donnerait sur les vecteurs  $(I_y, I_x, U, V)$ <sup>21</sup> :

$$\mathbf{R} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} \cos^2 \Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix}.$$

Avec cette matrice, et en se plaçant dans le système de coordonnées canonique lié au plan de la diffusion comme dans la FIG. 37, l'intensité sortante  $\hat{\mathbf{i}}$  est relié à l'intensité entrante  $\hat{\mathbf{i}}'$  par :

$$\hat{\mathbf{i}} = \mathbf{R} \hat{\mathbf{i}}'.$$

Supposons qu'un rayonnement provenant de la direction  $(\theta', \phi')$  soit diffusé dans la direction  $(\theta, \phi)$ . Le plan de la diffusion est le plan  $[\mathbf{OP}_1, \mathbf{OP}_2]$ . Les points  $P_1$  et  $P_2$  sont repérés par

21. l'ordre  $x$  et  $y$  a été inversé de façon à avoir exactement la même matrice que dans Chandrasekhar (1960).



leurs coordonnées  $(\theta', \phi')$  et  $(\theta, \phi)$  respectivement. En chacun de ces points, on définit deux vecteurs  $((\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$  pour  $P_1$  et  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  pour  $P_2$ ) tangents à la sphère, orthogonaux entre eux. L'un d'eux est parallèle au plan  $[\mathbf{OX}, \mathbf{OY}]$ , l'autre pointe vers les  $Z$  positifs (voir FIG. 43). Les angles  $i_1$  et  $i_2$  sont les angles séparant les vecteurs  $\mathbf{e}'_1$  et  $\mathbf{e}_1$  respectivement du plan de la diffusion. Ces vecteurs sont très commodes d'utilisation mais ils diffèrent des vecteurs canoniques de la diffusion par une rotation autour de  $\mathbf{OP}_1$  et de  $\mathbf{OP}_2$ . L'effet d'une telle rotation se traduit sur les paramètres de Stokes par la multiplication par la matrice  $\mathbf{L}$ . Dans le cas général que nous considérons ici, l'intensité  $\hat{\mathbf{i}}$  diffusée dans la direction  $(\theta, \phi)$  s'écrit donc :

$$\hat{\mathbf{i}}(\theta, \phi) = \underbrace{\mathbf{L}(\pi - i_2)}_{\substack{\text{du repère} \\ \text{canonique} \\ \text{vers le repère} \\ \text{sur la sphère} \\ \text{en } P_2}} \times \underbrace{\mathbf{R}(\cos \Theta)}_{\substack{\text{diffusion} \\ \text{dans le repère} \\ \text{canonique}}} \times \underbrace{\mathbf{L}(i_1)}_{\substack{\text{du repère sur} \\ \text{la sphère en } P_1 \\ \text{vers le repère} \\ \text{canonique}}} \times \underbrace{\hat{\mathbf{i}}'(\theta', \phi')}_{\substack{\text{dans le repère} \\ \text{sur la sphère} \\ \text{en } P_1}} .$$

La contribution de l'intégrale définissant l'opérateur  $\mathbb{D}$  dans l'Eq. 144 représente donc celle des photons diffusés, puisque l'intégrale est faite sur toutes les directions incidentes.

Nous avons montré que le CMB est vraisemblablement polarisé et que cette polarisation est due aux quadrupôles présents à l'époque de dernière diffusion. Nous avons ensuite introduit deux champs scalaires définis sur la sphère : ce sont les champs  $E$  et  $B$ . Ces champs ont l'immense avantage d'être invariants sous les rotations, contrairement aux paramètres de Stokes  $Q$  et  $U$ . Enfin, nous avons montré que les fluctuations scalaires (ou de densité) ne pouvaient que contribuer à  $E$  alors que les fluctuations tensorielles (ou ondes gravitationnelles primordiales) contribuaient à la fois à  $E$  et à  $B$ . L'un des intérêts de mesurer la polarisation du CMB est que son spectre de puissance  $E$  permet de séparer ces deux contributions et de fournir des contraintes fortes sur les modèles d'inflation. La détection de polarisation de type  $B$  serait une preuve directe de l'existence des ondes gravitationnelles primordiales.



## Conclusion

Le modèle standard du *Big-Bang* est maintenant accepté par une énorme majorité de physiciens. Il reste, heureusement, quelques irréductibles mais ils se font de plus en plus rares, les faits observationnels étant le plus souvent en désaccord avec les autres théories proposées ; citons par exemple le travail de Narlikar et Hoyle sur le modèle de l'état quasi-stationnaire, alternative au *Big-Bang*, qui a eu pendant très longtemps une certaine popularité. Une revue récente de cette théorie est donnée dans Nayeri et al. (1999). On trouvera une discussion de plusieurs théories alternatives sur la page web de E.L. Wright <sup>22</sup>.

La théorie décrivant l'Univers primordial n'existe pas encore. On a besoin, aux échelles d'énergie mises en jeu, d'une description quantique de la gravitation. Les théories les plus prometteuses actuellement sont la M-théorie et la cosmologie branaire qui, en ayant le bon goût de proposer de nombreux tests observationnels, pourra être testée dans un futur proche (Binétruy et al., 1999; Easson, 2000). Le cadre général du *Big-Bang* est globalement fixé, tout au moins dans ses grandes lignes. Il reste encore bien évidemment des problèmes non résolus : pour n'en citer qu'un, le mécanisme responsable de la formation des structures — ou plus précisément de l'apparition des premières inhomogénéités — n'est pas encore complètement élucidé. Sur ce point particulier, la théorie de l'inflation, que nous avons décrite page 55, semble cependant extrêmement favorisée par rapport au modèle concurrent, celui des défauts topologiques que nous n'abordons pas dans ce document ; la présence indéniable de trois pics dans le spectre de puissance angulaire des fluctuations de température du CMB obtenus par les expériences Boomerang, MAXIMA et DASI notamment, semblent rejeter complètement l'hypothèse de génération des fluctuations dans le cadre de ce modèle. Le CMB est bien loin d'avoir livré tous ses secrets : personne n'a, à ce jour, mesuré sa polarisation et cette mesure sera la prochaine priorité de l'ensemble des expériences dédiées au CMB. La polarisation du CMB, outre les paramètres cosmologiques, permet d'avoir accès aux ondes gravitationnelles primordiales. Les satellites MAP et PLANCK permettront sans doute des progrès très importants dans ce domaine.

Nous avons essentiellement parlé du CMB comme moyen de mesurer les paramètres cosmologiques et de comprendre l'Univers primordial. Il est vrai qu'ayant été émis très tôt par rapport à l'âge de l'Univers, il contient des informations plus fondamentales que d'autres processus physiques plus tardifs. Il existe pourtant bien d'autres façons de mesurer ces paramètres ; nous en avons énuméré quelques-unes page 18. Rappelons par exemple l'utilisation des supernovæ de type Ia qui permettent d'avoir accès à la combinaison  $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ , à condition que ces étoiles soient bien des "chandelles standard" comme on le pense (c'est-à-dire ont les mêmes propriétés quelque soit le *redshift* auquel elles se trouvent). Jusqu'à quelques années, selon la méthode utilisée, on ne trouvait pas toujours les mêmes valeurs pour les paramètres mesurés ; les barres d'erreurs étaient souvent de quelques dizaines de pourcents. Depuis peu, ces incertitudes tendent à diminuer de façon très significative : les expériences sont de mieux en mieux conçues (techniquement et intellectuellement) et les systématiques sont mieux comprises (en parallèle avec les modèles théoriques). Par exemple, les dernières observations des grandes structures (IRAS-PSCz notamment) donnent la constante de Hubble à 10 % près. Les prochains relevés à grande échelle comme le "Sloan Digital Sky Survey" ou VIRMOS devraient considérablement améliorer cette précision.

---

22. <http://www.astro.ucla.edu/~wright/errors.html>

La cosmologie observationnelle aura rempli sa tâche quand toutes les méthodes convergeront vers les mêmes résultats. Et il est bien possible que nous commençons à nous rapprocher de cet idéal...

## Références

- Afonso, C. et al. : 1999, Microlensing Towards the Small Magellanic Cloud EROS2 two-year analysis, *Astron. Astrophys.* **344**, L63
- Aguirre, A. : 1999, Intergalactic Dust and Observations of Type Ia Supernovæ, *Astrophys. J.*, in press; astro-ph/9904319
- Alcock, C. et al. : 1997, The MACHO Project Large Magellanic Cloud Microlensing Results from the First Two Years and the Nature of the Galactic Dark Halo, *Astrophys. J.* **486**, 697
- Alcock, C. et al. : 1998, EROS and MACHO Combined Limits on Planetary-Mass Dark Matter in the Galactic Halo, *Astrophys. J.* **499**, 9
- Alpher, R., Bethe, H., et Gamow, G. : 1948, The Origin of Chemical Elements, *Phys. Rev. Lett.* **73(7)**, 803
- Alpher, R. et Herman, R. : 1948, Evolution of the Universe, *Nature* **162**, 774
- Applegate, J., Hogan, C., et Scherrer, R. : 1987, Cosmological baryon diffusion and nucleosynthesis, *Phys. Rev. D* **35**, 1151
- Bardeen, J., Bond, J., Kaiser, N., et Szalay, A. : 1986, The Statistics of Peaks of Gaussian Random Fields, *Astrophys. J.* **304**, 15
- Bartlett, J. : 1999, The Standard Cosmological Model and CMB Anisotropies, astro-ph/9903260
- Begeman, K. G., Broeils, A. H., et Sanders, R. H. : 1991, Extended rotation curves of spiral galaxies - Dark haloes and modified dynamics, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **249**, 523
- Binétruy, P., Deffayet, C., et Langlois, D. : 1999, Non-conventional cosmology from a brane-universe, hep-th/9905012
- Burles, S., Nollett, K., Truran, J., et Turner, M. : 1999, Sharpening the Predictions of Big-Bang Nucleosynthesis, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4176, astro-ph/9901157
- Carlberg, R. G., Yee, H. K. C., Ellingson, E., Abraham, R., Gravel, P., Morris, S., et Pritchet, C. J. : 1996, Galaxy Cluster Virial Masses and Omega, *Astrophys. J.* **462**, 32, astro-ph/9509034
- Chandrasekhar, S. : 1960, *Radiative Transfer*, Dover
- Coulson, D., Crittenden, R., et Turok, N. : 1994, Polarization and Anisotropy of the Microwave Sky, *Phys. Rev. Lett.* **73(18)**, 2390
- Crittenden, R., Davis, R., et Steinhardt, P. : 1993, Polarization of the Microwave Background due to Primordial Gravitational Waves, *Astrophys. J.* **417**, 13
- Crittenden, R. G., Coulson, D., et Turok, N. : 1995, Temperature-Polarization Correlations from Tensor Fluctuations, *Phys. Rev. D* **52**, 5402, astro-ph/9411107
- de Bernardis, P. et al. : 2002, Multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background : significance and consequences for cosmology, *Astrophys. J.* **564**, 559, astro-ph/0105296
- Dicke, R., Peebles, P., Roll, P., et Wilkinson, D. : 1965, Cosmic Blackbody Radiation, *Astrophys. J., Lett.* **142**, 383
- Easson, D. : 2000, The Interface of Cosmology with String and M(illennium) Theory, hep-th/0003086
- Fixsen, D., Cheng, E., Gales, J., Mather, J., Schafer, R., et Wright, E. : 1996, The Cosmic Microwave Background Spectrum from the full COBE FIRAS Data Set, *Astrophys. J.* **473**, 576, astro-ph/9605054
- Freedman, W. et al. : 2001, Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to

- Measure the Hubble Constant, *Astrophys. J.* **553**, 47, astro-ph/0012376
- Fukuda, Y. et al. : 1998, Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562
- Gamow, G. : 1946, Expanding Universe and the Origin of Elements, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 572
- Gamow, G. : 1948, The Evolution of the Universe, *Nature* **162**, 680
- Gaztañaga, E. et Baugh, C. : 1998, Testing Deprojection Algorithms on Mock Angular Catalogues : Evidence for a Break in the Power Spectrum, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **294**, 229
- Griest, K. : 1991, Galactic Microlensing as a Method of Detecting Massive Compact Halo, *Astrophys. J.* **366**, 412
- Griffiths, L., Barbosa, D., et Liddle, A. : 1998, Cosmic Microwave Background Constraints on the Epoch of Reionization, astro-ph/9812125
- Grishchuk, L. P. et Martin, J. : 1997, Best Unbiased Estimates for the Microwave Background Anisotropies, *Phys. Rev. D* **D(56)**, 1924, gr-qc/9701024
- Gunn, J. et Peterson, B. : 1965, On the Density of Neutral Hydrogen in Intergalactic Space, *Astrophys. J.* 142(1633)
- Gurvits, L., Kellermann, K., et Frey, S. : 1998, The “angular size - redshift” relation for compact radio structures in quasars and radio galaxies, *Accepted for publication in Astron. Astrophys.*, astro-ph/9812018
- Guth, A. : 1981, Inflationary Universe : A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems, *Phys. Rev. D* **23(2)**, 347
- Haiman, Z. et Knox, L. : 1999, Reionization of the Intergalactic Medium and its Effect on the CMB, astro-ph/9902311
- Hamuy, M. et al. : 1996, The Hubble Diagram of the Calan/Tololo Type Ia Supernovae and the Value of  $H_0$ , *Astron. J.* **112**, 2398
- Harari, D. et Zaldarriaga, M. : 1993, *Phys. Rev. B* **319**, 96
- Hogan, C. : 1997, in N. Turok (ed.), *Critical Dialogues in Cosmology*, World Scientific, astro-ph/9609138
- Hu, W. : 1995, *Wandering in the Background : A CMB Explorer*, Ph.D. thesis, UC Berkeley
- Hubble, E. : 1929, A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-galactic Nebulae, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **15**, 168
- Jungman, G., Kamionkowski, M., et Griest, K. : 1996, Supersymmetric Dark Matter, *Phys. Rep.* **267**, 195, hep-ph/9506380
- Kiefer, K., Lesgourgues, J., Polarski, D., et Starobinsky, A. : 1998, The Coherence of Primordial Fluctuations Produced During Inflation, *Classical Quantum Gravity* **15**, L67, gr-qc/9806066
- Kinney, W. : 1998, Constraining Inflation with Cosmic Microwave Background Polarization, *Phys. Rev. D* **58**, 123506, astro-ph/9806259
- Kolb, E. et Turner, M. : 1990, *The Early Universe*, Addison Wesley
- Kosowsky, A. : 1996, Cosmic Microwave Background Polarization, *Ann. Phys.* **246**, 49
- Lange, A. et al. : 2001, First estimations of cosmological parameters from BOOMERANG, *Phys. Rev. D* **63**, 042001, astro-ph/0005004
- Lineweaver, C. : 1997, Gold in the Doppler Hills : Cosmological Parameters in the Microwave Background, astro-ph/9702042
- Lyth, D. et Riotto, A. : 1999, Particle Physics Models of Inflation and the Cosmological Density Perturbation, *Phys. Rep.* **314**, 1

- Ma, C.-P., Small, T., et Sargent, W. : 1998, Weighing Superclusters, [astro-ph/9808034](#)
- Madore, B. et al. : 1999, The HST KEY PROJECT on the extragalactic distance scale. XV. A Cepheid Distance to the Fornax Cluster, *Astrophys. J.*, **in press**. [astro-ph/9812157](#)
- Mannheim, P. : 1993, Linear Potentials and Galactic Rotation Curves, *Astrophys. J.* **419**, 150
- Mather, J. et al. : 1994, Measurement of the Cosmic Background Spectrum by the COBE FIRAS Instrument, *Astrophys. J.* **420**, 439
- Melchiorri, A. : 2001, in *COSMO-01*, [astro-ph/0201237](#)
- Misner, C., Thorne, K., et Wheeler, J. : 1973, *Gravitation*, Freeman
- Nayeri, A., Engineer, S., Narlikar, J., et Hoyle, F. : 1999, Structure Formation in the Quasi-Steady State Cosmology : a Toy Model, *to appear in Astrophys. J.*, <http://weplib.cern.ch//Home/index.php>
- Olive, K. : 1999, Primordial Big-Bang Nucleosynthesis, [astro-ph/9901231](#)
- Olive, K., Steigman, G., et Walker, T. : 1999, Primordial Nucleosynthesis : Theory and Observations, [astro-ph/9905320](#)
- Oort, J. : 1940, Some Problems Concerning the Structure and Dynamics of the Galactic System and the Elliptical Nebulae NGC 3115 and 4494, *Astrophys. J.* **91(3)**, 273
- Ostriker, J., Peebles, P., et Yahil, A. : 1974, The Size and Mass of Galaxies and the Mass of the Universe, *Astrophys. J.* **193**, 1
- Paczynski, B. : 1986, Gravitational Microlensing by the Galactic Halo, *Astrophys. J.* **304**, 1
- Padmanabhan, T. : 1993, *Structure Formation in the Universe*, Cambridge University Press
- Peebles, P. : 1980, *The Large Scale Structure of the Universe*, Princeton University Press
- Peebles, P. : 1993, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press
- Penzias, A. et Wilson, R. : 1965, A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s, *Astrophys. J., Lett.* **142**, 419
- Perlmutter, S. et al. : 1999, Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae, *Astrophys. J.* **517**, 565
- Puget, J.-L. et al. : 1996, Tentative Detection of a Cosmic Far-Infrared Background, *Astron. Astrophys.* **308**, 5
- Revenu, B. : 1998, 600 000 ans après le *Big-Bang* : comment la gravitation a pris le pas, *Science & Vie (205)*, 100, Hors-Série
- Riess, A. et al. : 1998, Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, *Astron. J.* **116**, 1009 :1038
- Riess, A., Filippenko, A., Li, W., et Schmidt, B. : 1999, An Indication of Evolution of Type Ia Supernovae from their Risetimes, [astro-ph/9907038](#)
- Sachs, R. et Wolfe, A. : 1967, Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background, *Astrophys. J.* **147**, 73
- Sarkar, S. : 1996, *Rep. Prog. Phys.* **59**, 1493
- Saunders, W. et al. : 2000, The PSCz catalogue, **317(1)**, 55, [astro-ph/0001117](#)
- Smoot, G. : 1994, *Wrinkles in time*, William Morrow and Co
- Smoot, G. et al. : 1992, Structure in the COBE Differential Microwave Radiometer First-Year Maps, *Astrophys. J., Lett.* **396**, L1
- Stewart, E. et Lyth, D. : 1993, A More Accurate Analytic Calculation of the Spectrum of Cosmological Perturbations Produced During Inflation, *Phys. Lett. B* **302**, 171, [gr-qc/9302019](#)
- Tegmark, M. : 1999, Cosmological constraints from current CMB and SN 1a data : a brute force 8 parameter analysis, *Astrophys. J., Lett.* **514**, 69, [astro-ph/9809201](#)

- Valentijn, E. et van der Werf, P. : 1999, First Extragalactic Direct Detection of Large-Scale Molecular Hydrogen in the Disk of NGC 891, *Astrophys. J.* **522**, L29
- Wang, X., Tegmark, M., et Zaldarriaga, M. : 2001, Is cosmology consistent?, [astro-ph/0105091](#)
- Weinberg, S. : 1972, *Gravitation and Cosmology*, Wiley
- White, M. et Srednicki, M. : 1994, Window Functions for CMB Experiments, *Astrophys. J.* **443**, 6, [astro-ph/9402037](#)
- White, S., Frenk, C., et Davis, M. : 1983, Clustering in a Neutrino-Dominated Universe, *Astrophys. J.* **274**, 1
- Zaldarriaga, M. : 1998, *Fluctuations in the Cosmic Microwave Background*, *Ph.D. thesis*, [astro-ph/9806122](#)
- Zwicky, F. : 1933, *Helv. Phys. Acta* **6**, 110



# Index

## A

- abondances primordiales ..... 36
- adiabaticité
  - de l'expansion de l'Univers ..... 31
- ajustement
  - fin ..... voir "fine tuning"
- anisotropies
  - du CMB ..... 77
  - et paramètres cosmologiques ..... 80
  - et échelles angulaires ..... 77
- antenne
  - diagramme d' ..... voir lobe

## B

- Big-Bang ..... 26
  - et température ..... 33
  - et température de l'Univers ..... 28
- "bottom-up" ..... voir scénario "bottom-up"

## C

- causalité ..... 53
- cinématique ..... 26
- CMB ..... 45, 48
  - anisotropies de température ..... 50
  - dipôle ..... 49
  - effet Sachs-Wolfe ..... 77
  - et oscillations acoustiques ..... 78
  - et paramètres cosmologiques ..... 81
  - et échelles angulaires ..... 77, 80
  - spectre mesuré par FIRAS ..... 49
- conservation
  - de l'entropie ..... 10
  - du nombre baryonique ..... 45
  - du tenseur énergie-impulsion ..... 9, 10
- constante
  - cosmologique ..... 12
  - de Hubble ..... 14
- coordonnées comobiles ..... 10
- corps noir ..... 35
  - distribution du ..... 27
  - température du ..... 28
- courbure ..... 65
  - de l'espace-temps ..... 8
  - domination ..... 11
  - en relativité générale ..... 8

- et densité d'énergie ..... 10
- et fluctuations de densité ..... 62
- et inflation ..... 52
- spatiale ..... 9
- tenseur ..... 10, 73
- couverture du ciel
  - et rapport signal sur bruit ..... 83

## D

- décalage vers le rouge ..... voir redshift
- découplage ..... 29, 70
  - époque ..... 48
  - redshift ..... 48
  - température ..... 48
- dégénérescence
  - entre paramètres cosmologiques ..... 82
- densité
  - critique ..... 16
  - d'énergie de la courbure ..... 10
  - d'énergie de la matière voir paramètres cosmologiques
  - d'énergie du vide ..... 10, 113
  - perturbations de .... voir perturbations scalaires
- diagramme
  - d'antenne ..... 84
- diamètre angulaire ..... 22
  - en fonction du redshift ..... 21
- diffusion Thomson ..... 92
  - et polarisation ..... 94
- dipôle ..... 49
- distance
  - angulaire ..... 20
  - luminosité ..... 22
  - propre ..... 14
- distribution
  - des particules et expansion ..... 33
  - des photons du CMB ..... 34
  - du corps noir ..... 27
  - fonctions de ..... 30
- Doppler ..... 14
  - et dipôle cosmologique ..... 49
  - et redshift ..... 27
  - pics ..... 76, 78

<b>E</b>	
”e-folds”	61
égalité matière-rayonnement	
époque	13
redshift	18
entropie de l’Univers	10, 31
équation	
d’Einstein	8, 73
de Friedmann	10
de Liouville	88
de Saha	46
de transfert pour la polarisation	103
événement	6, 7
expansion	
de l’Univers adiabatique	31
et distribution des particules	33
et température de l’Univers	30, 33
<b>F</b>	
facteur	
d’échelle	10
de biais	40
”fine tuning”	52
fluctuations	
de densité voir perturbations de densité	
de la métrique . voir perturbations de la métrique	
quantiques	61
fluide	
newtonien	63
vorticité	66, voir perturbations vectorielles
fonctions fenêtres	83
formation	
des structures	56
des structures	34, 55
<b>G</b>	
gel	
des particules	30
géodésique	7
géométrie	
et anisotropies du CMB	81
et relativité	7
<b>H</b>	
horizon	
des particules	24
des événements	25
problème de l’	52
Hubble	
loi de	14
rayon de	25
<b>I</b>	
inflation	50
approximation de roulement lent	60
et champ scalaire	57
fluctuations gaussiennes	61
principe	57
instabilité	
gravitationnelle	50
interaction	
électrofaible	36
et thermalisation	30
forte	36
taux	30
<b>J</b>	
jaugé	
choix	71
invariance	7
<b>L</b>	
libre parcours moyen	30, 34, 47, 48
lobe	
et fonctions fenêtres	84
loi	
de Hubble	14
de transformation des paramètres de Stokes	95
luminosité apparente	voir distance de luminosité
<b>M</b>	
matière noire	41
nature	43
mesure	
des paramètres cosmologiques	18
modèle	
du Big-Bang	26
métrique	9
perturbations de la	71
<b>N</b>	
neutrinos	
fossiles	33

masse des .....	44	cosmologique .....	5
nucléosynthèse .....	29, 35	thermodynamique .....	31
<b>O</b>		principe cosmologique .....	5
observation		extension du .....	39
et matière noire .....	41	problème	
ondes gravitationnelles .....	74	de l'horizon .....	52
et polarisation .....	99	de la génération des fluctuations ....	55
oscillations acoustiques .....	76	de la platitude .....	51
et pics Doppler .....	79	puissance .....	voir spectre de puissance
<b>P</b>		<b>R</b>	
paramètres		rapport	
cosmologiques .....	16	masse sur luminosité .....	41
et CMB .....	81	photons, baryons .....	78
mesure .....	18	rayon	
de l'inflation .....	60, 83	de Hubble .....	25, 55, 56
de Stokes .....	89	rayonnement	
particules		à 3 K .....	voir CMB
et cinématique .....	26	de fond cosmologique .....	voir CMB
et découplage .....	29	fossile .....	voir CMB
et température .....	33	réchauffement .....	61
gel .....	30	recombinaison .....	45
perturbations		époque .....	46
cosmologiques .....	63	redshift .....	46
de la métrique .....	71	température .....	46
quantiques voir fluctuations quantiques		redshift .....	14
scalaires .....	65, 71	reheating .....	voir réchauffement
et polarisation .....	96	réionisation .....	80
tensorielles .....	59, 61	relativité	
et polarisation .....	99	générale .....	7
vectorielles .....	66, 71	restreinte .....	6
pics Doppler .....	78	roulement lent .....	voir inflation
contribution adiabatique .....	79	<b>S</b>	
Planck		Saha	
distribution de Planck du CMB ....	34	équation de .....	46
temps de .....	33	scénario	
plasma .....	45	"bottom-up" .....	34
platitude		du Big-Bang .....	26
problème .....	51	"top-down" .....	44
polarisation		section efficace	
équation de transfert .....	103	et taux de réaction .....	29
description quantitative .....	89	spectre de puissance	
du CMB .....	92	angulaire .....	79
et diffusion Thomson .....	94	de la distribution des galaxies ...	40, 41
et quadrupôles .....	93	des fluctuations scalaires .....	62
figures de .....	96	des fluctuations tensorielles .....	62
principe		Stokes	

paramètres .. voir paramètres de Stokes  
structures  
  formation des ..... voir formation des  
  structures

## T

taux  
  d'accélération ..... 18, voir paramètres  
  cosmologiques  
  de polarisation du CMB ..... 96  
  de réaction ..... 29  
température  
  de l'Univers ..... 33  
  de la recombinaison voir recombinaison  
  des particules ..... 33  
  du corps noir ..... 28  
  et Big-Bang ..... 28, 33  
temps  
  caractéristiques ..... 68  
  conforme ..... 70  
  de Hubble ..... 29  
  de Planck ..... 33  
tenseur  
  de courbure ..... 8  
  de Ricci ..... 8  
  énergie-impulsion ..... 8  
  métrique ..... 7  
thermodynamique  
  principe ..... 31  
"top-down" ..... voir scénario "top-down"

## V

variable d'ionisation ..... 46  
variance cosmique ..... 86

## W

WIMPS ..... 44

# Glossaire

## Cosmologie

*Les quantités apparaissant dans le texte  
avec l'indice "0" sont considérées à notre époque.*

$z$	.....	<i>redshift</i>
$\kappa$	.....	courbure spatiale de l'Univers
$a$	.....	facteur d'échelle
$q$	.....	paramètre de décélération
$\Lambda$	.....	constante cosmologique
$H$	.....	constante de Hubble
$h$	.....	constante de Hubble réduite $h = H/100$
$\rho_c$	.....	densité critique, $\rho_c(t) = 3H(t)^2/(8\pi G)$
$\Omega_i^?$	.....	$\rho_i^?/\rho_c$
$\Omega^R$	.....	contribution des espèces relativistes
$\rho^R$	.....	densité d'énergie des espèces relativistes
$\Omega^{NR}$	.....	contribution des espèces non relativistes
$\rho^{NR}$	.....	densité d'énergie des espèces non relativistes
$\Omega_m$	.....	contribution matière et rayonnement $\Omega_m = \Omega^R + \Omega^{NR}$
$\Omega_\Lambda$	.....	contribution de la constante cosmologique
$\Omega_\kappa$	.....	contribution de la courbure
$D_{\text{ang}}$	.....	distance angulaire
$D_L$	.....	distance de luminosité
$t_{\text{eq}}, T_{\text{eq}}$ et $z_{\text{eq}}$	.....	époque, température et <i>redshift</i> de l'égalité matière-rayonnement
$t_{\text{rec}}, T_{\text{rec}}$ et $z_{\text{rec}}$	.....	époque, température et <i>redshift</i> de la recombinaison
$t_{\text{dec}}, T_{\text{dec}}$ et $z_{\text{dec}}$	.....	époque, température et <i>redshift</i> du découplage

## Recombinaison et nucléosynthèse

$n_B$	..... densité de baryons	$n_B = n_p + n_H$
$n_H$	..... densité d'atomes hydrogène	
$n_{e^-}$	..... densité électronique	
$n_p$	..... densité de protons	
$n_\gamma$	..... densité de photons	
$\eta$	.....	$n_B/n_\gamma$
$x$	..... paramètre d'ionisation	$x = n_p/n_B = n_p/(n_p + n_H)$
$\mu_E$	..... potentiel chimique de l'espèce E	
$g_E$	..... facteur de dégénérescence	de l'espèce E
$m_E$	..... masse de l'espèce E	
$\sigma_T$	..... section efficace totale de la diffusion Thomson	
$\ell_\gamma$	..... libre parcours moyen des photons	

## Inflation

$V$	..... potentiel de l'inflation	
$\phi$	..... champ scalaire responsable de l'inflation	(c'est l'inflaton)
$\epsilon$ et $\eta$	..... paramètres de roulement lent	
$N$	..... nombre de "e-folds"	
$\delta_H$	..... amplitude des perturbations scalaires	
$P_{\mathcal{R}}$	..... spectre de puissance des perturbations scalaires	
$n$	..... indice spectral scalaire	
$A_G$	..... amplitude des perturbations tensorielles	
$P_{\mathcal{T}}$	..... spectre de puissance des perturbations tensorielles	
$n_T$	..... indice spectral tensoriel	

## Rayonnement fossile

CMB	..... "Cosmic Microwave Background",	rayonnement fossile à 3 K
$I, Q, U$ et $V$	..... paramètres de Stokes	
$\Delta T/T$	..... fluctuations de température	
$E$ et $B$	..... champs de polarisation	
$C_\ell^T$	..... spectre de puissance angulaire des fluctuations de température	
$C_\ell^E$ et $C_\ell^B$	..... spectres de puissance angulaire de polarisation	
$a_{\ell m}^T$	..... coefficients du développement de $\Delta T/T$	sur les harmoniques sphériques $Y_\ell^m$
$a_{\ell m}^E$ et $a_{\ell m}^B$	..... coefficients des développements des champs $E$ et $B$	sur les harmoniques sphériques de spin 2 $_{\pm 2}Y_\ell^m$