

# Cosmologie Moderne

## Cours 8



J.-Ch. Hamilton, APC  
hamilton@apc.univ-paris7.fr



# Vue d'ensemble de la cosmologie

- Les échelles en cosmologie
- Les piliers de la cosmologie
  - ★ Relativité Générale
  - ★ Expansion de l'Univers
  - ★ Principe cosmologique
  - ★ Schéma de principe de la cosmologie observationnelle
- L'Univers de Friedman-Lemaître
  - ★ Métrique de F.L.
  - ★ Redshift
  - ★ Équations de Friedman
  - ★ Histoire de l'expansion
  - ★ Big-Bang
- F.A.Q. de cosmologie
- Histoire thermique de l'Univers



# Solutions simples des équations de Friedman

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Éq. de Friedman I

&

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$$

Cons. Tenseur Énergie/Impulsion

- Équation différentielle pour  $a(t)$

- ★ Selon la forme de  $k$ ,  $\Lambda$  et  $\rho$  on va trouver des solutions différentes
- ★ Ces solutions vont décrire diverses phases de l'Univers dans lesquelles l'un ou l'autre des composants dominait
- ★ Ex/
  - Univers primordial: domination du rayonnement
  - Univers récent: domination de la matière
  - Univers présent: domination de l'énergie sombre
- ★ Différence entre les phases: évolution de  $\rho$  avec le temps
  - Différentes phases : différentes équations d'état



# Équation d'état

- Kezaco ?

- ★ Relation entre les différentes grandeurs macroscopiques (donc statistiques) d'un système en interactions multiples (par exemple à l'équilibre thermodynamique)

- Rappel sur un gaz parfait:

$$PV = Nk_B T \Leftrightarrow P = \frac{n}{V} k_b T$$

$$\Rightarrow [P] = [E] \times [L]^{-3}$$

$$= [M] \times [L]^{-3} \times [L.T^{-1}]^2$$

$$\Rightarrow P = \rho_m v^2 \quad v : \text{Vitesse «caractéristique» des particules}$$

$$\Rightarrow P = \rho_E \frac{v^2}{c^2} \quad \Rightarrow \text{Pour un gaz «lent»: pression}$$

négligeable devant la densité d'énergie



# ● Univers primordial : domination du rayonnement

- ★ équation d'état de la matière relativiste :  $p = \frac{1}{3}\rho$
- ★ Conservation du tenseur énergie-impulsion :  $\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$

$$\Leftrightarrow \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \times \frac{4}{3}\rho = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{\rho} + 4\rho\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -4\frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Leftrightarrow \log \rho = \log(a^{-4}) + \text{Cte}$$

$$\Leftrightarrow \rho \propto a^{-4}$$

$$\Rightarrow \Omega_R = \Omega_R^0 (1+z)^4$$

- ★ Première équation de Friedman :  $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto a^{-4}$$

$$\Leftrightarrow \dot{a} \propto a^{-1}$$

$$\Leftrightarrow a \propto t^{1/2}$$



- Solution générale

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = a^\lambda$$

$$\Leftrightarrow \dot{a}^2 = a^{\lambda+2}$$

$$\Leftrightarrow \dot{a} = a^{\lambda/2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{da}{dt} = a^{\lambda/2+1}$$

$$\Leftrightarrow dt = a^{-\lambda/2+1} da$$

$$\Leftrightarrow t \propto a^{-\lambda/2}$$

$$\Leftrightarrow a \propto t^{-2/\lambda}$$



# ● Univers «récent»: domination de la matière

★ équation d'état de la matière non relativiste :  $p \ll \rho$

★ Conservation du tenseur énergie-impulsion :  $\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + \cancel{p}) = 0$

$$\Leftrightarrow \dot{\rho} + 3\rho\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Leftrightarrow \log \rho = \log(a^{-3}) + \text{Cte}$$

$$\Leftrightarrow \rho \propto a^{-3}$$

$$\implies \Omega_R = \Omega_R^0 (1+z)^3$$

★ Première équation de Friedman :  $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\cancel{k}}{a^2} + \frac{\cancel{\Lambda}}{3}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto a^{-3}$$

$$\Leftrightarrow \dot{a} \propto a^{-1/2}$$

$$\Leftrightarrow a \propto t^{2/3}$$



# ● Univers actuel (?): domination de $\Lambda$

★ Densité constante :  $\frac{\Lambda}{3}$

★ Conservation du tenseur énergie-impulsion :  ~~$\dot{\rho}$~~  +  $3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$

★ Équation d'état:  $p = -\rho$   
- Pression négative...

★ Première équation de Friedman :  $\implies \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3}$

$$\implies a \propto \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right) \quad \Omega_{\Lambda}(z) = \Omega_{\Lambda}$$

★ Expansion accélérée !

★ Cela semble être notre situation actuelle...

★ NB: ici on a considéré un constante cosmologique mais on peut avoir une expansion accélérée dans un cadre plus général: énergie sombre





# ● Énergie sombre pour expliquer l'accélération

★ Équation de Friedman 2 : 
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

# ● Comment avoir accélération sans $\Lambda$ ?

★ Équation d'état constante:  $p = w\rho$

- On doit avoir  $w < -\frac{1}{3}$

- (constante cosmologique = cas particulier pour  $w=-1$ )

- Équation de conservation de l'énergie: 
$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{\rho} + \frac{\dot{a}}{a}\rho(3 + 3w) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -(3 + 3w)\frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Leftrightarrow \log \rho = -(3 + 3w) \log a$$

$$\Leftrightarrow \rho \propto a^{-(3+3w)}$$

$$\Omega_X(z) = \Omega_X(1 + z)^{3+3w}$$

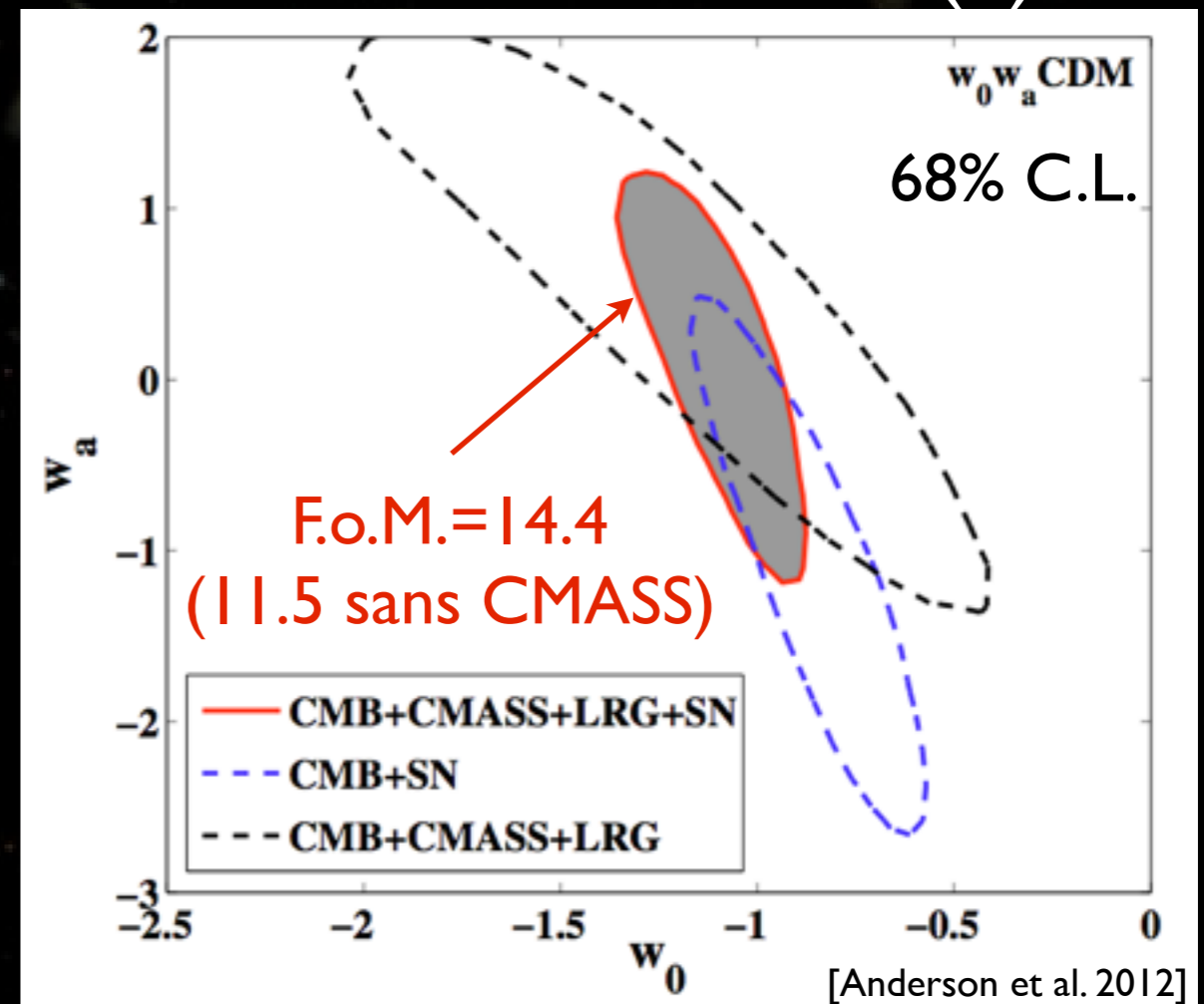
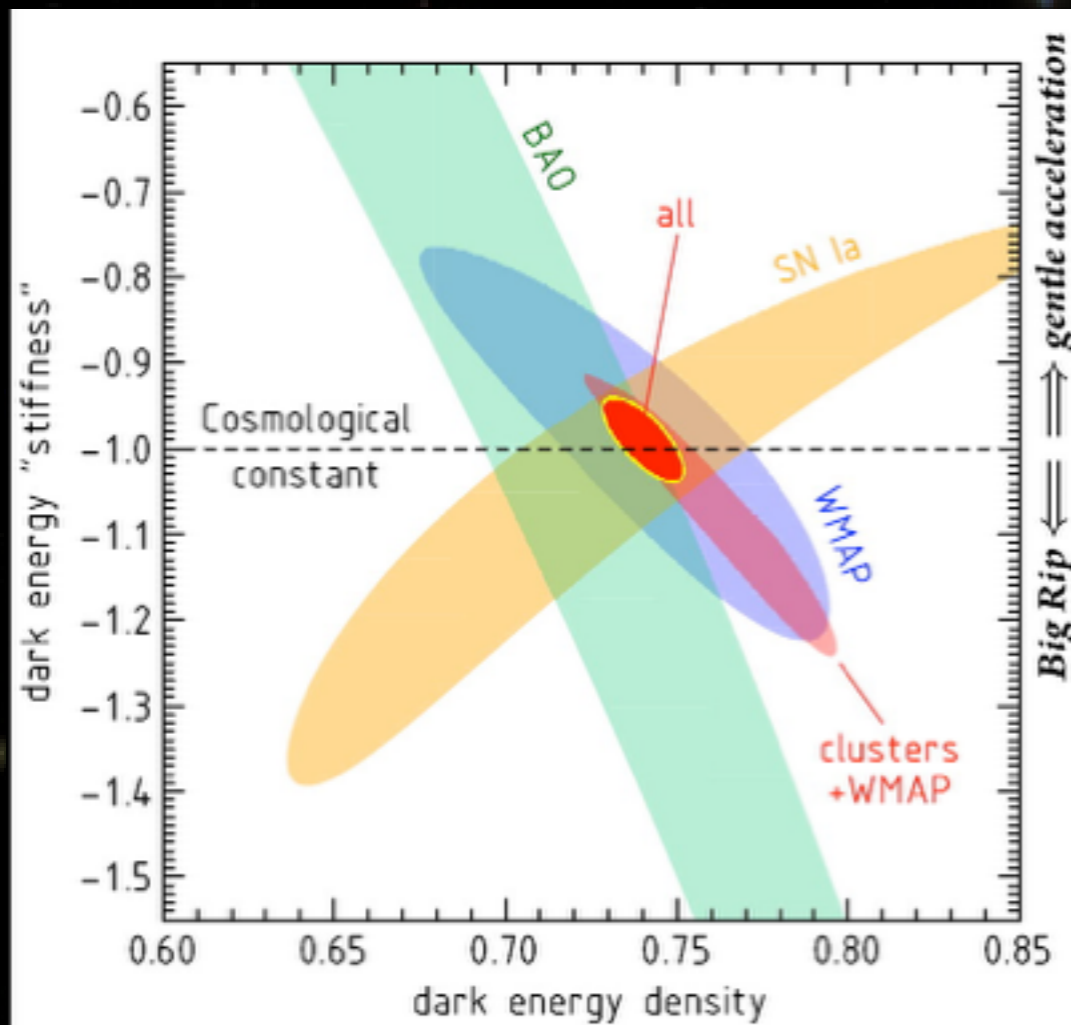
Accélééré  $\longrightarrow a \propto t^{2/(3+3w)}$



★ Équation d'état variable:  $p = w(z)\rho$

- idem :  $w < -\frac{1}{3}$
- et:  $\rho \propto a^{-(3+3w)}$
- Par contre:  $\Omega_X(z) = \Omega_X \times \exp\left(3 \int_0^z \frac{1+w(z')}{1+z'} dz'\right)$
- a(t) plus complexe

Une des grandes questions observationnelles en cosmologie aujourd'hui est de déterminer  $w(z)$



# Vue d'ensemble de la cosmologie

- Les échelles en cosmologie
- Les piliers de la cosmologie
  - ★ Relativité Générale
  - ★ Expansion de l'Univers
  - ★ Principe cosmologique
  - ★ Schéma de principe de la cosmologie observationnelle
- L'Univers de Friedman-Lemaître
  - ★ Métrique de F.L.
  - ★ Redshift
  - ★ Équations de Friedman
  - ★ Histoire de l'expansion
  - ★ Big-Bang
- F.A.Q. de cosmologie
- Histoire thermique de l'Univers



# Quid du Big Bang ?

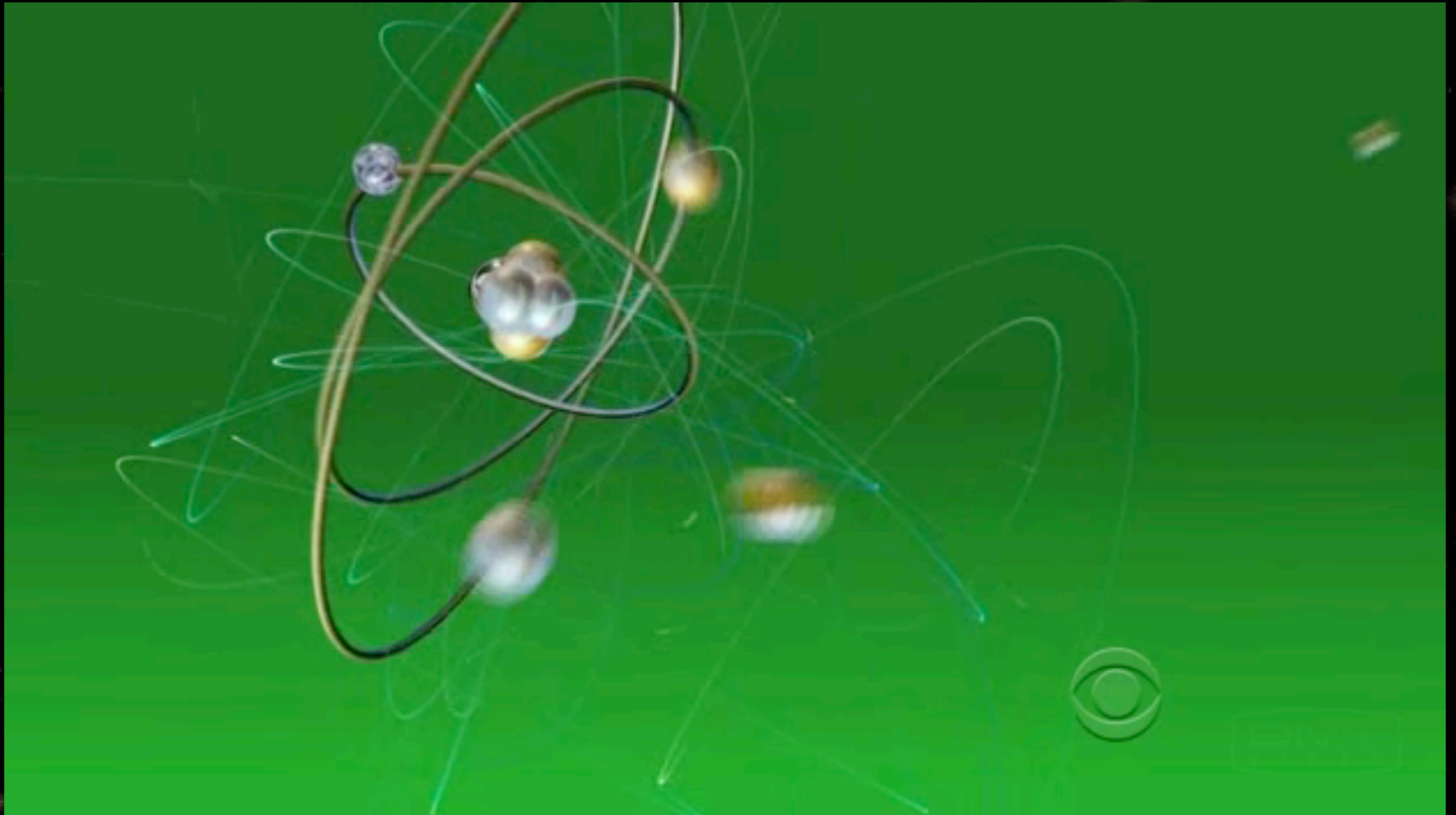
- Pas grand chose ...
  - ★ La relativité Générale n'est pas une théorie quantique de l'espace-temps (elle est dite «classique»)
- La mécanique quantique donne une échelle en dessous de laquelle les effets quantiques devraient se faire sentir :

Temps de Planck  $t_{P1} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.4 \times 10^{-44} \text{ s}$

- On n'a pas de théorie valide pour décrire ce qui s'est passé avant ...
  - ★ Espoirs :
    - Théorie des cordes
    - Gravité quantique à boucles
    - ...



# La gravité quantique ...



Extrait de la série TV «The Big Bang Theory»



# La gravité quantique ...



Extrait de la série TV «The Big Bang Theory»



# Vue d'ensemble de la cosmologie

- Les échelles en cosmologie
- Les piliers de la cosmologie
  - ★ Relativité Générale
  - ★ Expansion de l'Univers
  - ★ Principe cosmologique
  - ★ Schéma de principe de la cosmologie observationnelle
- L'Univers de Friedman-Lemaître
  - ★ Métrique de F.L.
  - ★ Redshift
  - ★ Équations de Friedman
  - ★ Histoire de l'expansion
  - ★ Big-Bang
- F.A.Q. de cosmologie
- Histoire thermique de l'Univers



# Cosmo F.A.Q.





# Cosmo F.A.Q.

- Qu'y avait-il avant le Big-Bang ?



# Cosmo F.A.Q.

- Qu'y avait-il avant le Big-Bang ?
  - ★ Mauvaise question : il n'y a pas d'avant l'apparition du temps.  
C'est comme se demander ce qui est au Nord du pôle Nord.
  - ★ Comment sont apparus l'espace et le temps ? Cf. Saint Augustin ...



# Cosmo F.A.Q.

- Qu'y avait-il avant le Big-Bang ?

- ★ Mauvaise question : il n'y a pas d'avant l'apparition du temps.  
C'est comme se demander ce qui est au Nord du pôle Nord.
- ★ Comment sont apparus l'espace et le temps ? Cf. Saint Augustin ...

*"Je réponds à cette demande : Que faisait Dieu avant de créer le ciel et la terre ? Je réponds, non comme celui qui éluda, dit-on, les assauts d'une telle question par cette plaisanterie : Dieu préparait des supplices aux sondeurs de mystères. Rire n'est pas répondre. Et je ne réponds pas ainsi. Et j'aimerais mieux confesser mon ignorance, que d'appeler la raillerie sur une demande profonde, et l'éloge sur une réponse ridicule.*

*Les confessions - Saint Augustin*



# Cosmo F.A.Q.

- Qu'y avait-il avant le Big-Bang ?

- ★ Mauvaise question : il n'y a pas d'avant l'apparition du temps.  
C'est comme se demander ce qui est au Nord du pôle Nord.
- ★ Comment sont apparus l'espace et le temps ? Cf. Saint Augustin ...

*"Je réponds à cette demande : Que faisait Dieu avant de créer le ciel et la terre ? Je réponds, non comme celui qui éluda, dit-on, les assauts d'une telle question par cette plaisanterie : Dieu préparait des supplices aux sondeurs de mystères. Rire n'est pas répondre. Et je ne réponds pas ainsi. Et j'aimerais mieux confesser mon ignorance, que d'appeler la raillerie sur une demande profonde, et l'éloge sur une réponse ridicule.*

*Les confessions - Saint Augustin*

- Si l'Univers est plat ou ouvert, il est infini spatialement. L'a-t-il toujours été ?



# Cosmo F.A.Q.

- Qu'y avait-il avant le Big-Bang ?

- ★ Mauvaise question : il n'y a pas d'avant l'apparition du temps. C'est comme se demander ce qui est au Nord du pôle Nord.
- ★ Comment sont apparus l'espace et le temps ? Cf. Saint Augustin ...

*"Je réponds à cette demande : Que faisait Dieu avant de créer le ciel et la terre ? Je réponds, non comme celui qui éluda, dit-on, les assauts d'une telle question par cette plaisanterie : Dieu préparait des supplices aux sondeurs de mystères. Rire n'est pas répondre. Et je ne réponds pas ainsi. Et j'aimerais mieux confesser mon ignorance, que d'appeler la raillerie sur une demande profonde, et l'éloge sur une réponse ridicule.*

*Les confessions - Saint Augustin*

- Si l'Univers est plat ou ouvert, il est infini spatialement. L'a-t-il toujours été ?

- ★ Oui.
- ★ Les mesures actuelles favorisent un Univers plat, donc infini.
- ★ Sauf s'il est multiples connexe. Les contraintes à ce jour sont telles que la taille de la cellule (si elle existe) est grande par rapport à l'Univers observable.
- ★ L'image du Big Bang comme une explosion à partir d'un point est fautive.



# Cosmo F.A.Q.

- Qu'y avait-il avant le Big-Bang ?

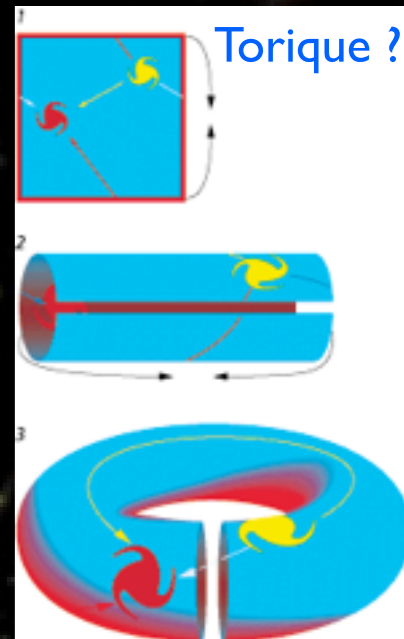
- ★ Mauvaise question : il n'y a pas d'avant l'apparition du temps. C'est comme se demander ce qui est au Nord du pôle Nord.
- ★ Comment sont apparus l'espace et le temps ? Cf. Saint Augustin ...

"Je réponds à cette demande : Que faisait Dieu avant de créer le ciel et la terre ? Je réponds, non comme celui qui éluda, dit-on, les assauts d'une telle question par cette plaisanterie : Dieu préparait des supplices aux sondeurs de mystères. Rire n'est pas répondre. Et je ne réponds pas ainsi. Et j'aimerais mieux confesser mon ignorance, que d'appeler la raillerie sur une demande profonde, et l'éloge sur une réponse ridicule.

*Les confessions - Saint Augustin*

- Si l'Univers est plat ou ouvert, il est infini spatialement. L'a-t-il toujours été ?

- ★ Oui.
- ★ Les mesures actuelles favorisent un Univers plat, donc infini.
- ★ Sauf s'il est multiples connexe. Les contraintes à ce jour sont telles que la taille de la cellule (si elle existe) est grande par rapport à l'Univers observable.
- ★ L'image du Big Bang comme une explosion à partir d'un point est fausse.



# Cosmo F.A.Q.

- Qu'y avait-il avant le Big-Bang ?

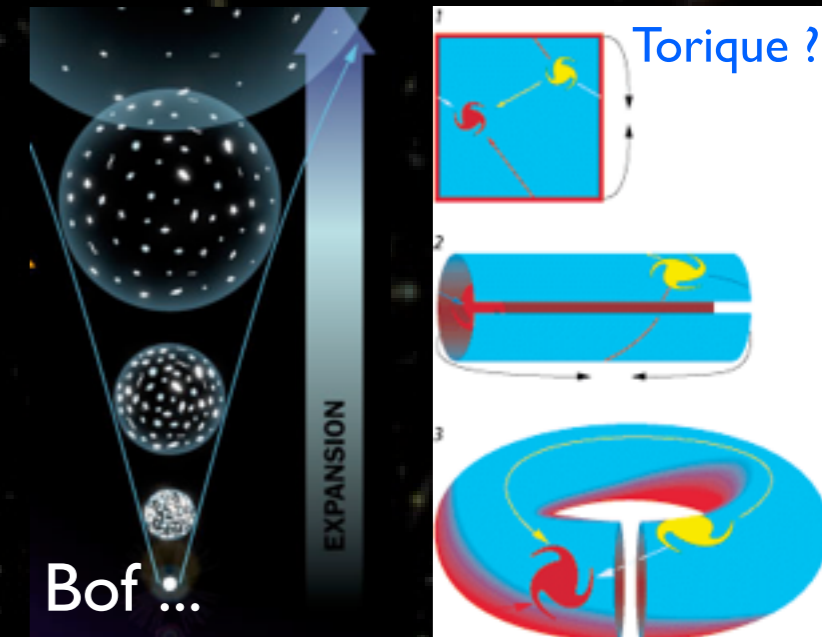
- ★ Mauvaise question : il n'y a pas d'avant l'apparition du temps. C'est comme se demander ce qui est au Nord du pôle Nord.
- ★ Comment sont apparus l'espace et le temps ? Cf. Saint Augustin ...

"Je réponds à cette demande : Que faisait Dieu avant de créer le ciel et la terre ? Je réponds, non comme celui qui éluda, dit-on, les assauts d'une telle question par cette plaisanterie : Dieu préparait des supplices aux sondeurs de mystères. Rire n'est pas répondre. Et je ne réponds pas ainsi. Et j'aimerais mieux confesser mon ignorance, que d'appeler la raillerie sur une demande profonde, et l'éloge sur une réponse ridicule.

Les confessions - Saint Augustin

- Si l'Univers est plat ou ouvert, il est infini spatialement. L'a-t-il toujours été ?

- ★ Oui.
- ★ Les mesures actuelles favorisent un Univers plat, donc infini.
- ★ Sauf s'il est multiples connexe. Les contraintes à ce jour sont telles que la taille de la cellule (si elle existe) est grande par rapport à l'Univers observable.
- ★ L'image du Big Bang comme une explosion à partir d'un point est fautive.



# Cosmo F.A.Q.

- Qu'y avait-il avant le Big-Bang ?

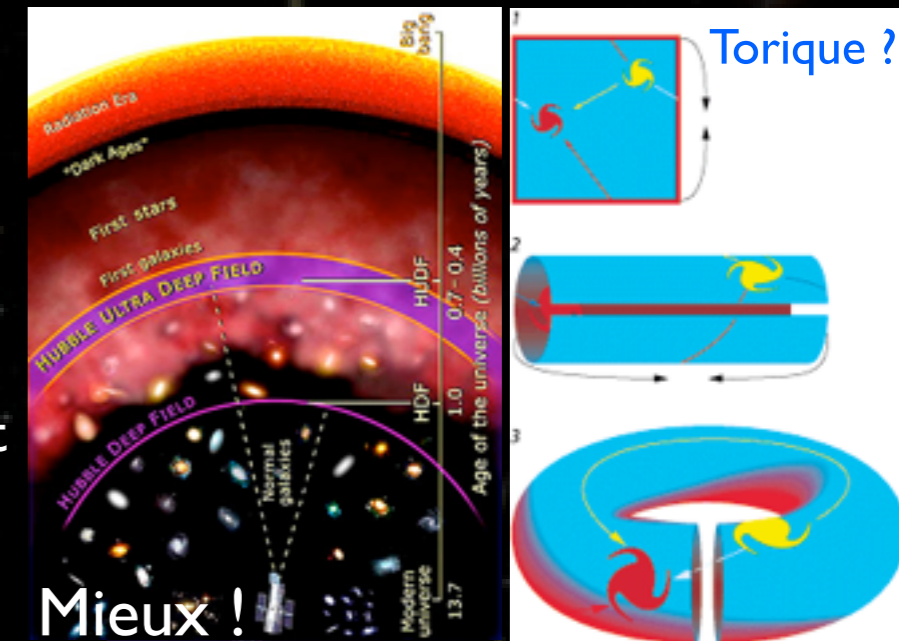
- ★ Mauvaise question : il n'y a pas d'avant l'apparition du temps. C'est comme se demander ce qui est au Nord du pôle Nord.
- ★ Comment sont apparus l'espace et le temps ? Cf. Saint Augustin ...

"Je réponds à cette demande : Que faisait Dieu avant de créer le ciel et la terre ? Je réponds, non comme celui qui éluda, dit-on, les assauts d'une telle question par cette plaisanterie : Dieu préparait des supplices aux sondeurs de mystères. Rire n'est pas répondre. Et je ne réponds pas ainsi. Et j'aimerais mieux confesser mon ignorance, que d'appeler la raillerie sur une demande profonde, et l'éloge sur une réponse ridicule.

Les confessions - Saint Augustin

- Si l'Univers est plat ou ouvert, il est infini spatialement. L'a-t-il toujours été ?

- ★ Oui.
- ★ Les mesures actuelles favorisent un Univers plat, donc infini.
- ★ Sauf s'il est multiplement connexe. Les contraintes à ce jour sont telles que la taille de la cellule (si elle existe) est grande par rapport à l'Univers observable.
- ★ L'image du Big Bang comme une explosion à partir d'un point est fausse.





# Cosmo F.A.Q.

- Qu'y avait-il avant le Big-Bang ?

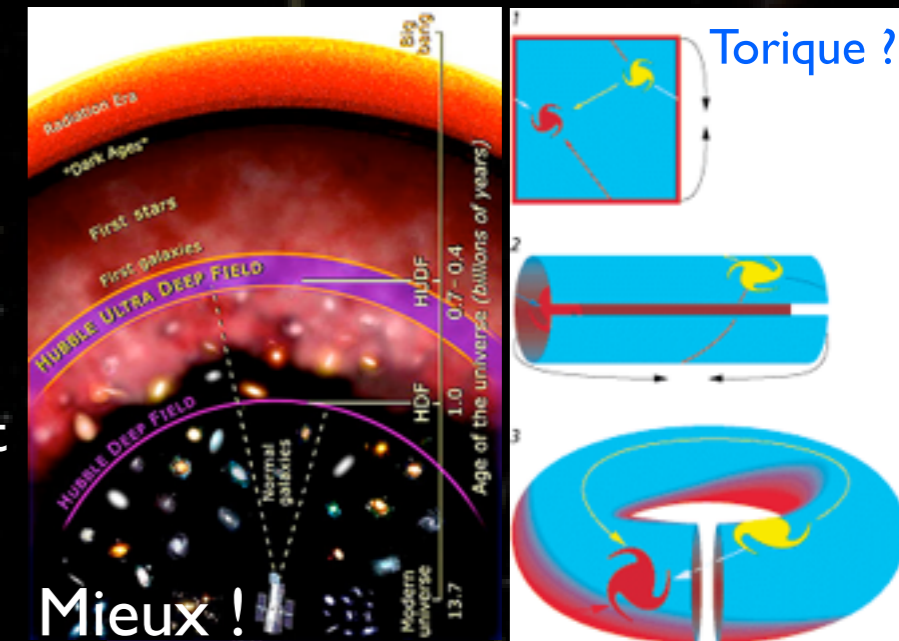
- ★ Mauvaise question : il n'y a pas d'avant l'apparition du temps. C'est comme se demander ce qui est au Nord du pôle Nord.
- ★ Comment sont apparus l'espace et le temps ? Cf. Saint Augustin ...

"Je réponds à cette demande : Que faisait Dieu avant de créer le ciel et la terre ? Je réponds, non comme celui qui éluda, dit-on, les assauts d'une telle question par cette plaisanterie : Dieu préparait des supplices aux sondeurs de mystères. Rire n'est pas répondre. Et je ne réponds pas ainsi. Et j'aimerais mieux confesser mon ignorance, que d'appeler la raillerie sur une demande profonde, et l'éloge sur une réponse ridicule.

Les confessions - Saint Augustin

- Si l'Univers est plat ou ouvert, il est infini spatialement. L'a-t-il toujours été ?

- ★ Oui.
- ★ Les mesures actuelles favorisent un Univers plat, donc infini.
- ★ Sauf s'il est multiplement connexe. Les contraintes à ce jour sont telles que la taille de la cellule (si elle existe) est grande par rapport à l'Univers observable.
- ★ L'image du Big Bang comme une explosion à partir d'un point est fausse.



- L'expansion se fait-elle dans quelque chose ?



# Cosmo F.A.Q.

## ● Qu'y avait-il avant le Big-Bang ?

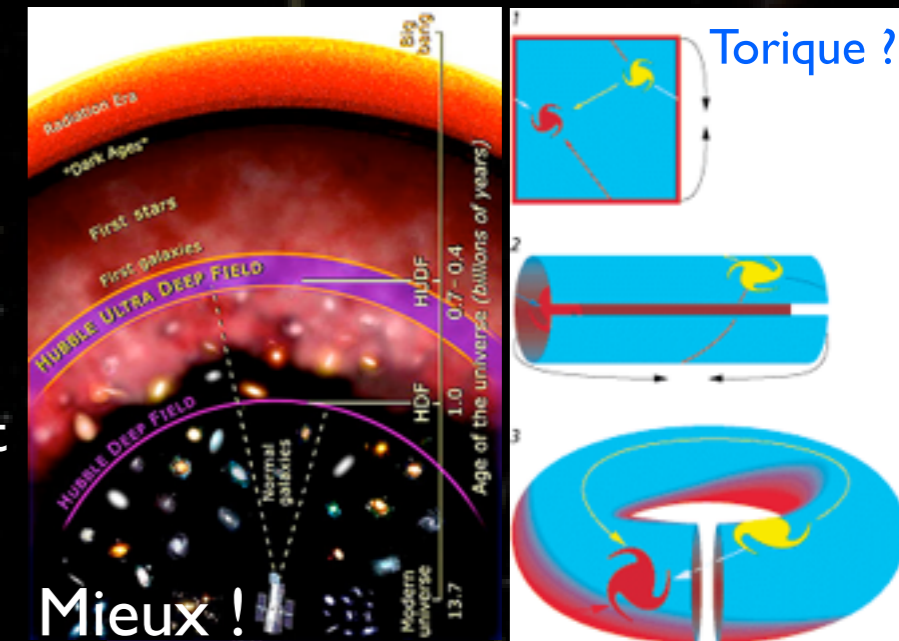
- ★ Mauvaise question : il n'y a pas d'avant l'apparition du temps. C'est comme se demander ce qui est au Nord du pôle Nord.
- ★ Comment sont apparus l'espace et le temps ? Cf. Saint Augustin ...

"Je réponds à cette demande : Que faisait Dieu avant de créer le ciel et la terre ? Je réponds, non comme celui qui éluda, dit-on, les assauts d'une telle question par cette plaisanterie : Dieu préparait des supplices aux sondeurs de mystères. Rire n'est pas répondre. Et je ne réponds pas ainsi. Et j'aimerais mieux confesser mon ignorance, que d'appeler la raillerie sur une demande profonde, et l'éloge sur une réponse ridicule.

Les confessions - Saint Augustin

## ● Si l'Univers est plat ou ouvert, il est infini spatialement. L'a-t-il toujours été ?

- ★ Oui.
- ★ Les mesures actuelles favorisent un Univers plat, donc infini.
- ★ Sauf s'il est multiplement connexe. Les contraintes à ce jour sont telles que la taille de la cellule (si elle existe) est grande par rapport à l'Univers observable.
- ★ L'image du Big Bang comme une explosion à partir d'un point est fautive.



## ● L'expansion se fait-elle dans quelque chose ?

- ★ Non. L'Univers est tout par définition. Il n'y a pas d'expansion «dans» quelque chose.
- ★ Dans l'image du ballon qui se gonfle, on vit «à la surface du ballon» donc sur 2 dimensions. La troisième dimension n'a pas lieu d'être.
- ★ Notre esprit plonge une sphère dans 3 dimensions et voit une boule, mais la surface de la sphère est à 2 dimensions.



# Cosmo F.A.Q.

## ● Qu'y avait-il avant le Big-Bang ?

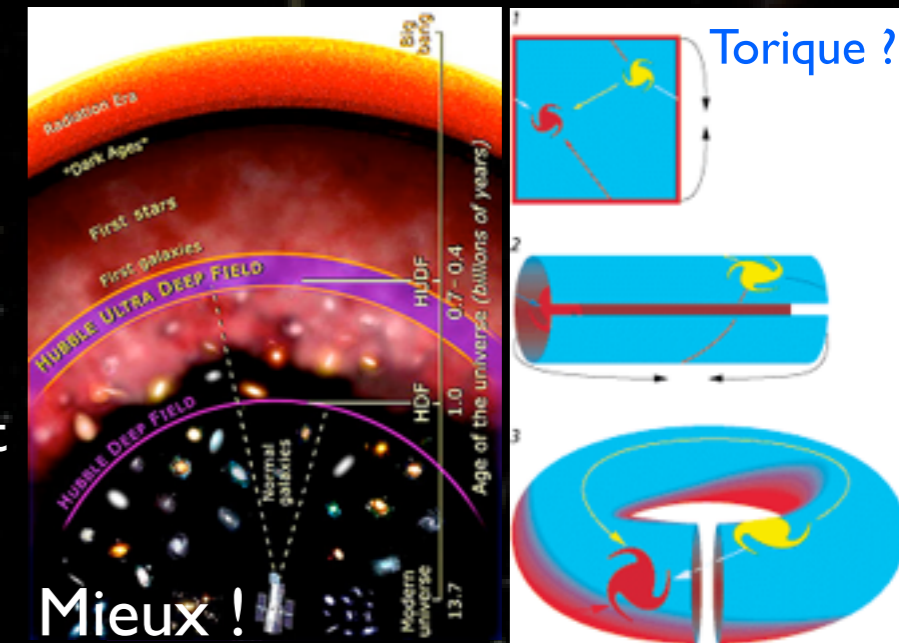
- ★ Mauvaise question : il n'y a pas d'avant l'apparition du temps. C'est comme se demander ce qui est au Nord du pôle Nord.
- ★ Comment sont apparus l'espace et le temps ? Cf. Saint Augustin ...

"Je réponds à cette demande : Que faisait Dieu avant de créer le ciel et la terre ? Je réponds, non comme celui qui éluda, dit-on, les assauts d'une telle question par cette plaisanterie : Dieu préparait des supplices aux sondeurs de mystères. Rire n'est pas répondre. Et je ne réponds pas ainsi. Et j'aimerais mieux confesser mon ignorance, que d'appeler la raillerie sur une demande profonde, et l'éloge sur une réponse ridicule.

Les confessions - Saint Augustin

## ● Si l'Univers est plat ou ouvert, il est infini spatialement. L'a-t-il toujours été ?

- ★ Oui.
- ★ Les mesures actuelles favorisent un Univers plat, donc infini.
- ★ Sauf s'il est multiplement connexe. Les contraintes à ce jour sont telles que la taille de la cellule (si elle existe) est grande par rapport à l'Univers observable.
- ★ L'image du Big Bang comme une explosion à partir d'un point est fautive.



## ● L'expansion se fait-elle dans quelque chose ?

- ★ Non. L'Univers est tout par définition. Il n'y a pas d'expansion «dans» quelque chose.
- ★ Dans l'image du ballon qui se gonfle, on vit «à la surface du ballon» donc sur 2 dimensions. La troisième dimension n'a pas lieu d'être.
- ★ Notre esprit plonge une sphère dans 3 dimensions et voit une boule, mais la surface de la sphère est à 2 dimensions.

