

# 2

## Émission radiative de particules chargées

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Le système d'unités CGS Gaussien</b>	<b>17</b>
<b>2.2</b>	<b>Accélération de particules chargées et rayonnement</b>	<b>18</b>
2.2.1	Puissance de rayonnement d'une particule chargée	19
2.2.2	Formule de Larmor : approche géométrique (à faire par vous-même !)	20
<b>2.3</b>	<b>Rayonnement cyclo-synchrotron</b>	<b>22</b>
2.3.1	Puissance d'émission	22
2.3.2	Spectre d'émission en fréquence	23
2.3.3	Spectre d'émission synchrotron d'une population de particules	28
<b>2.4</b>	<b>Rayonnement de freinage - Bremsstrahlung (hors programme)</b>	<b>29</b>
2.4.1	Spectre d'émission du Bremsstrahlung thermique	29
2.4.2	Puissance d'émission du Bremsstrahlung	33
<b>2.5</b>	<b>Exercices</b>	<b>35</b>
2.5.1	Dynamique d'une particule relativiste dans un champ magnétique uniforme	35
2.5.2	Propagation dans un champ électromagnétique	35
2.5.3	Rayonnement de courbure	36

---

**N**ous abordons dans ce deuxième chapitre la physique de l'émission de rayonnement provenant de particules électriquement chargées. Nous commencerons par introduire un système d'unités physiques très commode pour l'étude de la dynamique des particules chargées, puis dans un deuxième temps, nous aborderons une propriété fondamentale de ces particules chargées, celle de pouvoir rayonner dès qu'elles sont soumises à une force quelconque. Nous verrons au passage pourquoi les électrons sont les principaux émetteurs de rayonnement dans l'Univers. Nous verrons une application directe de cette notion au travers de l'étude du rayonnement cyclotron et de sa version relativiste le synchrotron.

### 2.1 Le système d'unités CGS Gaussien

Le système d'unités CGS (on devrait plutôt parler des systèmes), se base sur trois unités fondamentales pour décrire l'ensemble des phénomènes dits mécaniques. Les trois unités de base sont le centimètre (C), le gramme (G) et la seconde (S). A partir de ces trois entités, on peut définir les grandeurs mécaniques comme

- Force  $\rightarrow$  dyne (dyn) =  $10^{-5}$  N
- Energie  $\rightarrow$  erg =  $10^{-7}$  J

## CHAPITRE 2. ÉMISSION RADIATIVE DE PARTICULES CHARGÉES

- Puissance  $\rightarrow$  erg/s =  $10^{-7}$  W
- Pression  $\rightarrow$  barye =  $10^{-1}$  Pa
- etc ...

en ce qui concerne les phénomènes électriques et magnétiques, il existe de multiples façons de définir les grandeurs électriques. Le système CGS Gaussien a la particularité de prendre une définition de la charge électrique telle que les constantes reliées à l'électromagnétisme s'expriment comme  $\epsilon_0 = 1/4\pi c^2$  et  $\mu_0 = 4\pi$  (on vérifie alors bien que  $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ ). Cette propriété est très utile car elle simplifie l'expression de la loi de Coulomb (et de Biot-Savart) car maintenant l'amplitude de la force de répulsion entre deux charges électriques identiques s'écrit en CGS Gaussien :

$$F = \frac{q^2}{d^2} \quad (2.1)$$

où  $q$  est la charge électrique et  $d$  la distance entre les deux charges. Dans ce système d'unité, la charge électrique s'exprime en Franklins (Fr) ou statcoulombs. **La charge électrique en CGS Gaussien n'est pas dimensionnellement comparable avec une charge électrique exprimée dans le système MKSA !!**. En effet ce choix de définition modifie les dimensions du champ électrique de telle façon qu'il est maintenant dimensionnellement comparable à un champ magnétique. A titre d'exemple, on peut associer un champ électrique en CGS Gaussien à un champ électrique en MKSA via la relation  $E_{\text{MKSA}} \equiv cE_{\text{CGSG}}$  ( $q_{\text{MKSA}} \equiv q_{\text{CGSG}}/c$ ) où  $c$  est la vitesse de la lumière. L'unité légale en CGS Gaussien du champ électrique est le statVolt/cm alors que l'unité du champ magnétique est le Gauss  $1G = 10^{-4}$  T. Ces deux unités sont en réalité équivalentes car les deux champs possèdent les mêmes dimensions.

Il est important de noter que suite à cette redéfinition du champ électrique, des termes supplémentaires sont incorporés dans diverses lois physiques afin de la prendre en compte. Ainsi en CGS Gaussien, tout terme faisant intervenir une charge électrique et/ou un champ électrique verra son expression altérée pour prendre en compte la redéfinition de ces termes. On citera quelques relations écrites dans ce système particulier :

$$\begin{aligned} \text{Force de Lorentz : } \vec{F} &= q \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \\ \text{Flux de Poynting : } \vec{S} &= \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \\ \text{Equations de Maxwell : } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.2)$$

### 2.2 Accélération de particules chargées et rayonnement

On considère une particule possédant une charge électrique  $q$  et initialement au repos dans son référentiel propre qui subit une accélération telle que dans son référentiel propre, elle acquière une vitesse  $\Delta v \ll c$  sur un intervalle de temps  $\Delta t$ . Par simplicité on considèrera que le gain de vitesse est orienté selon l'axe ( $Oz$ ). Cette particule rayonne en permanence un champ électrique qui, quand elle est au repos, est décrit par la loi de Coulomb. Les lignes de champ sont alors purement radiales. L'accélération subie par la particule modifie les lignes de champ électrique à cause du déplacement de la source émettrice de ce champ.

### 2.2.1 Puissance de rayonnement d'une particule chargée

Le calcul du rayonnement associé à l'accélération subie par une particule chargée se réalise grâce à l'expression des potentiels électromagnétiques engendrés par cette particule. L'expression générale de ces potentiels est donnée par les formules de Lienard et Wiechert qui stipule qu'une particule se trouvant à l'origine d'un repère à un instant  $t$  génère un potentiel électrique  $V$  et un potentiel-vecteur  $\vec{A}$  en un point  $M$  repéré par  $\vec{r}$  qui peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} V(\vec{r}, t) &= \frac{q}{r - (\vec{v}(t - r/c) \cdot \vec{r})/c} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{q\vec{v}(t - r/c)}{c^2(r - (\vec{v} \cdot \vec{r})/c)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $r = |\vec{r}|$  et où  $\vec{v}$  est la vitesse de la particule à l'instant  $t' = t - r/c$ . Dans le cas où la vitesse de la particule dans le référentiel considéré est très faible par rapport à la vitesse de la lumière, les expressions précédentes se simplifient et deviennent au premier ordre en  $v/c$  (on pourra approximer  $t' \simeq t$  si on reste dans le voisinage de la particule)

$$\begin{aligned} V(\vec{r}, t) &= \frac{q}{r} + \frac{q\vec{v}(t - r/c) \cdot \vec{r}}{cr^2} = \frac{q}{r} + \frac{qv(t - r/c) \cos \theta}{cr} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{q\vec{v}(t - r/c)}{cr} \end{aligned} \quad (2.4)$$

où l'angle  $\theta$  est un des angles des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ . L'approximation faite ici est semblable avec l'approximation dipolaire faite en électrostatique. A ce stade nous devons écrire l'expression de la vitesse de la particule a été choisie arbitrairement comme orienté selon un axe ( $Oz$ ) faisant l'angle  $\theta$  avec  $\vec{r}$ . L'expression de la vitesse de la particule est alors  $\vec{v} = (v(t - r/c) \cos \theta, -v(t - r/c) \sin \theta, 0)$ . A partir de ces potentiels, nous pouvons calculer les champs électriques et magnétiques portés par la perturbation soit

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \nabla \wedge \vec{A} = \frac{q}{r} \left( -\frac{\partial}{\partial r} \frac{v(t - r/c) \sin \theta}{c} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{v(t - r/c) \cos \theta}{rc} \right) \vec{e}_\phi \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\vec{\nabla}V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pour mener à bien ce calcul, il faut garder à l'esprit que la vitesse  $v$  dépend du rayon  $r$  et que si on pose  $t' = t - r/c$  on a

$$\frac{\partial v(t - r/c)}{\partial r} = \frac{dv(t')}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{dv(t')}{dt'} = -\frac{\dot{v}}{c} \quad (2.6)$$

L'expression du champ magnétique à laquelle nous arrivons est

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = q \sin \theta \left( \frac{\dot{v}}{rc^2} + \frac{v}{r^2c} \right) \vec{e}_\phi \quad (2.7)$$

alors que pour l'expression du champ électrique nous obtenons

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_r \left( \frac{q}{r^2} + \frac{qv \cos \theta}{r^2c} \right) + \vec{e}_\theta \left( \frac{qv}{cr^2} + \frac{q\dot{v}}{c^2r} \right) \sin \theta \quad (2.8)$$

Cette dernière expression du champ électrique comporte un terme bien connu en électrostatique, celui du champ coulombien généré par la charge au repos. Dans le cas où la particule subie une

## CHAPITRE 2. ÉMISSION RADIATIVE DE PARTICULES CHARGÉES

accélération dans un référentiel où elle initialement au repos, une contribution dépendante du temps se rajoute au champ coulombien. Le champ électromagnétique s'écrit alors (la contribution du champ coulombien au flux d'énergie est nulle de par son orientation)

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{q\dot{v}}{c^2 r} \sin \theta \vec{e}_\phi \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{q}{r^2} \vec{e}_r + \frac{q\dot{v}}{c^2 r} \sin \theta \vec{e}_\theta\end{aligned}\quad (2.9)$$

Le flux d'énergie associé à cette onde électromagnétique nous est donné par le vecteur de Poynting

$$\vec{S}_{\text{poy}} \cdot \vec{e}_r = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_r = \frac{q^2 \dot{v}^2 \sin^2 \theta}{r^2 c^4} \quad (2.10)$$

Le flux d'énergie orienté dans la direction radiale est similaire à une onde sphérique qui décroît en  $1/r^2$  et qui conserve le flux d'énergie. Il n'y a pas de dissipation d'énergie électromagnétique durant le transport de ce rayonnement. La puissance totale émise par la particule s'obtient en intégrant sur une sphère de rayon  $r$  quelconque

$$P = 2\pi r^2 \int_0^\pi \vec{S}_{\text{poy}} \cdot \vec{e}_r \sin \theta d\theta = \frac{q^2 \dot{v}^2}{2c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad (2.11)$$

Cette dernière intégrale se calcule facilement en linéarisant l'expression et ainsi on a  $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3$ . La puissance rayonnée par une particule dont la vitesse  $v$  dans un référentiel est très inférieure à la vitesse de la lumière et subissant une accélération  $\dot{v}$  est donnée par la formule de Larmor

$$P = \frac{2q^2 \dot{v}^2}{3c^3} \quad (2.12)$$

Il est très important de garder à l'esprit que cette formule n'est valide dans un référentiel que si la particule considérée est non relativiste dans ce référentiel.

### 2.2.2 Formule de Larmor : approche géométrique (à faire par vous-même !)

L'accélération subie par la particule provoque un déplacement de cette particule dans son référentiel qui initialement était son référentiel propre. Afin de quantifier la déformation des lignes de champ électrique, nous pouvons tout d'abord écrire qu'à tout instant  $t$  compris entre 0 et  $\Delta t$ , un photon émis par la particule à l'instant  $t_e$  avec un angle  $\theta$  par rapport à  $(Ox)$  parcourra la trajectoire

$$\begin{cases} x = c(t - t_e) \cos \theta + \Delta v t_e & 0 \leq t_e \leq t \leq \Delta t \\ y = c(t - t_e) \sin \theta \end{cases} \quad (2.13)$$

Quand  $t = \Delta t$ , nous pouvons réexprimer les coordonnées de tous les photons émis selon l'angle  $\theta$  pour obtenir les nouvelles lignes de champ soit

$$y = \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \frac{\Delta v}{c}} (x - \Delta v \Delta t) \quad (2.14)$$

ce qui correspond à l'équation d'une droite dont le coefficient directeur est  $\sin \theta / (\cos \theta - \Delta v/c)$  et passant, quelque soit l'angle  $\theta$ , par le point  $(x = \Delta v \Delta t, y = 0)$  qui correspond à la position de la particule chargée. En nous plaçant dans le référentiel d'inertie de la particule où elle est

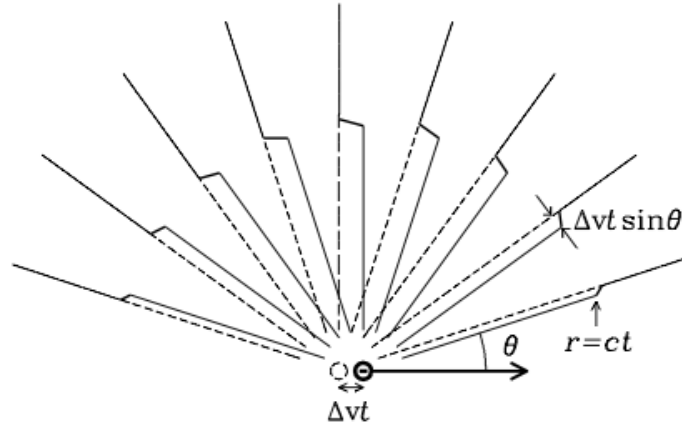


FIGURE 2.1 – Modifications des lignes de champ électrique engendrées par le déplacement de la charge électrique.

initialement au repos, nous avons  $\Delta v \ll c$  ce qui permet de voir que les lignes de champ électriques déformées conservent quasiment (à  $\Delta v/c$  près) leur formes initiales à une translation selon  $(Ox)$  près. A l'interface entre la zone perturbée et la zone non perturbée, nous aurons une contribution non-radiale du champ électrique telle que

$$\frac{E_{\perp}}{E_r} = \frac{\Delta v \Delta t \sin \theta}{c \Delta t} \quad (2.15)$$

où le champ radial est donné par la loi de Coulomb  $E_r = q^2/c^2 \Delta t^2$ . On en déduit donc que la composante orthoradiale peut s'écrire

$$E_{\perp} = \frac{q \Delta v \sin \theta}{c^3 \Delta t^2} = \frac{q a \sin \theta}{c^2 r} \gg E_r \propto \frac{1}{r^2} \quad (2.16)$$

L'accélération subie par la particule dans son référentiel propre est  $a = \Delta v/\Delta t$ . Comme on peut le voir dans la dernière expression, le champ orthoradial présent à l'interface des zones perturbée et non-perturbée sera très dominant à grande distance car celui-ci ne décroît qu'en  $1/r$ . De plus cette composante électrique est dépendante du temps, ce qui implique qu'elle induit une composante magnétique donnant naissance à une onde électromagnétique se propageant dans l'espace. Le flux d'énergie emportée par cette onde est donné par le flux de Poynting  $\vec{S}$  d'une onde électromagnétique sphérique où en moyenne sur une période de l'onde  $|E_r| = |B|$ . Ce flux d'énergie s'écrit alors

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} E_{\perp}^2 = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{c^3 r^2 4\pi} \quad (2.17)$$

La puissance totale  $P$  emportée par l'onde s'obtient à partir de ce flux en intégrant sur une sphère de rayon  $r$  centrée sur la particule, ce qui donne

$$P = \iint \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{q^2 a^2 r^2 \sin^3 \theta}{c^3 r^2 4\pi} d\theta d\phi = \frac{q^2 a^2}{2c^3} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \quad (2.18)$$

On calcule la dernière intégrale en posant un changement de variable  $\alpha = \cos \theta$  et on obtient

$$P = \frac{2q^2 a^2}{3c^3} \quad (2.19)$$

Je rappelle ici que ce résultat n'est valide que dans le référentiel propre de la particule de charge  $q$  subissant une accélération  $a$  dans ce même référentiel. Ainsi dans les diverses applications que nous rencontrerons nous aurons à déterminer cette accélération grâce aux transformations de Lorentz vues dans le précédent chapitre.

Pour conclure ce paragraphe, nous pouvons remarquer que la puissance émise par une charge accélérée ne dépend pas de la masse de la particule. Cela ne signifie en rien que protons et électrons vont émettre la même quantité de rayonnement car à force égale, l'accélération ressentie par le proton sera  $m_p/m_e = 1836$  fois plus petite que celle ressentie par l'électron. On voit ici une explication simple du fait que les électrons sont les principaux émetteurs de lumière dans l'Univers.

### 2.3 Rayonnement cyclo-synchrotron

L'essentiel de la matière dans l'Univers se trouve sous la forme de plasma, c'est à dire sous la forme de gaz ionisés. Au sien de ces plasmas, on trouve naturellement des champs magnétiques de différentes intensités. Nous avons vu précédemment que des particules soumises à une accélération généraient une émission dont nous avons estimé la puissance. Nous allons estimer et analyser l'émission des particules chargées d'un plasma au travers de leur interaction avec le champ magnétique ambiant.

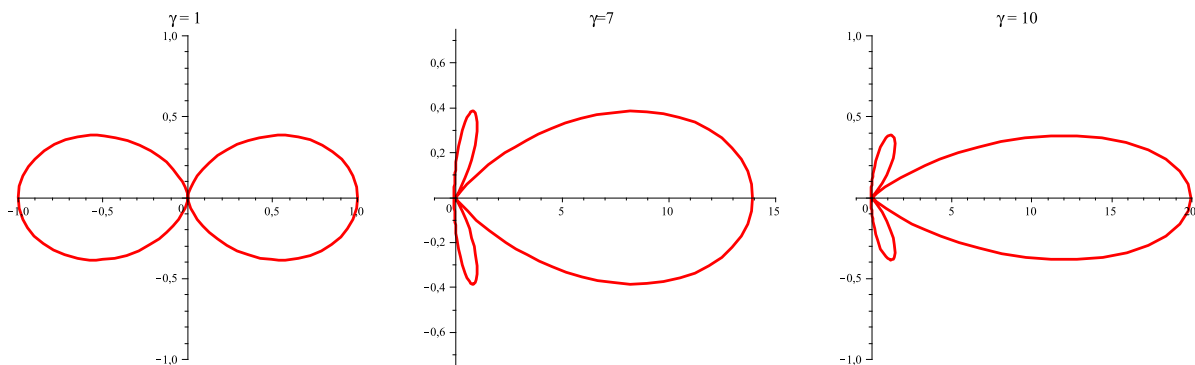


FIGURE 2.2 – Déformation des lobes d'émission dipolaire due à l'effet Doppler relativiste. Le rayon des lobes est proportionnel à la quantité d'énergie émise dans la direction considérée. La particule se trouve à l'origine du repère pendant que sa vitesse est alignée avec l'axe horizontal. L'accélération dans le cas présent est parallèle à l'axe vertical des figures.

#### 2.3.1 Puissance d'émission

On considère une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , nous avons vu alors dans les exercices du premier chapitre que l'accélération ressentie par cette particule dans le référentiel de l'observateur est orthogonale à sa vitesse et d'amplitude  $a$  telle que

$$a = \frac{|q|v_{\perp}B}{\gamma mc} \quad (2.20)$$

où  $\gamma$  est son facteur de Lorentz et  $v_{\perp}$  est la composante de la vitesse orthogonale au champ magnétique. L'accélération étant toujours orthogonale à la vitesse d'après l'expression de la force de Lorentz, on peut donc voir que l'expression de cette accélération dans le référentiel propre  $\mathcal{R}'$  de la particule sera

$$a' = \gamma^2 a = \frac{\gamma |q| v_{\perp} B}{mc} \quad (2.21)$$

D'après le paragraphe précédent, on en déduit alors la puissance d'émission de cette particule dans son référentiel propre

$$P' = \frac{2\gamma^2 q^4 v_{\perp}^2 B^2}{3m^2 c^5} \quad (2.22)$$

Cette puissance exprimée dans le référentiel propre de la particule est identique à celle perçue par l'observateur car la puissance est une grandeur physique invariante par transformation de Lorentz ( $P = P'$ ). En effet, la puissance étant définie comme  $dE/dt$  et sachant que l'énergie  $E$  et le temps  $t$  se transforment de la même façon dans une transformation de Lorentz, on voit que la puissance reste inchangée lors d'une telle transformation.

Nous avons déjà évoqué que les électrons étaient les meilleurs émetteurs de rayonnement grâce à leur faible masse donc en nous intéressant aux électrons nous aurons l'essentiel de cette émission (nous reviendrons plus tard sur le cas des protons). Dans le cas d'un électron, la puissance exprimée plus haut peut se réécrire en utilisant la section efficace de Thomson  $\sigma_T = 8\pi e^4/3m^2 c^4$  :

$$P = 2\sigma_T c \gamma^2 \frac{v_{\perp}^2}{c^2} U_B \quad (2.23)$$

où  $U_B$  représente la densité d'énergie magnétique du milieu  $U_B = B^2/8\pi$ . Pour avoir une estimation de la puissance moyenne rayonnée, il nous faut prendre en compte la valeur moyenne de l'angle  $\alpha$  entre la vitesse de l'électron et le champ magnétique  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ . Ainsi la valeur moyenne de la puissance s'obtient en posant

$$P_{SYN} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P \sin \alpha d\alpha d\phi = \sigma_T c U_B \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \int_0^{\pi} \sin^3 \alpha d\alpha = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B \quad (2.24)$$

où on rappelle que  $\beta = v/c$ . La puissance moyenne rayonnée par particule est ainsi obtenue. On constate facilement que les électrons relativistes seront de très puissants émetteurs par rapport aux électrons thermiques non-relativistes. Nous allons voir que ces deux types de populations sont respectivement responsables du rayonnement dit synchrotron (relativistes) et cyclotron (non-relativistes).

### 2.3.2 Spectre d'émission en fréquence

Avant d'aborder la question du spectre en fréquence émis par une particule plongée dans un champ magnétique, nous devons d'abord étudier la façon dont le déplacement de cette particule altère son propre rayonnement. En premier lieu, si nous reprenons la présentation de la puissance émise par une particule accélérée, nous avons vu que l'énergie émise par cette particule est de type dipolaire, i.e.  $P \propto \sin^2 \theta$  où  $\theta$  est l'angle entre la direction de visée et la direction définie par le vecteur accélération.

Dans le cas qui nous intéresse ici, l'accélération subie par la particule est toujours perpendiculaire à sa vitesse dans le référentiel de l'observateur. Nous nous trouvons alors dans la configuration décrite par la figure (2.2). Dans l'exercice portant sur l'effet Doppler, nous avons montré

qu'un photon émis par une source en mouvement avec une vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel de l'observateur n'était pas perçu par l'observateur avec le même angle que celui vu par un observateur placé dans le référentiel de la particule. Ainsi si on appelle  $\alpha'$  l'angle que font la vitesse et la direction d'émission du photon dans le référentiel propre de la particule  $\mathcal{R}'$ , l'angle  $\alpha$  avec lequel sera reçu le photon par un observateur dans  $\mathcal{R}$  sera

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + \beta}{1 + \beta \cos \alpha'} \\ \sin \alpha = \frac{\sin \alpha'}{\gamma(1 + \beta \cos \alpha')} \\ \nu = \gamma(1 + \beta \cos \alpha')\nu' \end{cases} \quad (2.25)$$

où  $\beta = v/c$  et où  $\nu$  et  $\nu'$  sont les fréquences de réception et d'émission du photon considéré. Le rayonnement dipolaire émis par la particule dans un champ magnétique sera donc déformé par le mouvement de la particule. A un instant donné, on oriente les axes d'un repère cartésien centré sur la particule de telle manière que la vitesse est orientée selon  $(Ox)$  et l'accélération selon  $(Oy)$ . Si  $\alpha$  est l'angle entre la direction considérée et la vitesse, on a  $\alpha = \pi/2 - \theta$ , ce qui fait que la puissance rayonnée par la particule sera de la forme  $P \propto \cos^2 \alpha$ . En utilisant les relations données par l'effet Doppler, on en déduit que la relation entre l'énergie du photon émis  $\nu_o$  et l'énergie du photon reçu selon la direction  $\alpha$  par l'observateur immobile sera

$$\frac{\nu_{obs}}{\nu_o} = \frac{(\cos \alpha - \beta)^2}{\gamma(1 - \beta \cos \alpha)^3} \quad (2.26)$$

La figure (2.2) montre la forme des lobes d'émission pour quatre valeurs du facteur de Lorentz de la particule émettrice. On voit que dès que  $\gamma$  devient plus grand que l'unité qu'un effet de focalisation intervient, concentrant l'essentiel de l'émission d'énergie dans la direction de la vitesse de la particule. La largeur du lobe principal d'émission, peut s'estimer en constatant que la frontière entre lobe principal et lobe secondaire se trouve en  $\cos \alpha = \beta$ . Pour des facteurs de Lorentz assez grands ( $\gamma \geq 5$ ), cela correspond alors à  $\beta \simeq 1 - 1/2\gamma^2$  et  $\cos \alpha \simeq 1 - \alpha^2/2$ . On voit alors que la largeur angulaire du cône d'émission principal est  $\Delta\alpha \simeq 2/\gamma$ .

Au cours d'une rotation autour du champ magnétique, une particule chargée émet de la lumière visible pour un observateur fixe durant seulement une partie de son orbite (voir figure 2.3). Si on note  $\Delta x$  la portion de l'orbite où la particule envoie de la lumière vers l'observateur,  $x$  la distance entre la particule et l'observateur et si on pose  $t = 0$  comme le temps où la particule commence à rentrer dans la zone d'émission visible par l'observateur, alors le temps  $\Delta t_p$  pendant lequel la particule envoie de la lumière vers l'observateur sera

$$\Delta t_p = \frac{x - \Delta x}{c} + \frac{\Delta x}{v_{\perp}} - \frac{x}{c} = \frac{\Delta x}{v_{\perp}} \left(1 - \frac{v_{\perp}}{c}\right) \quad (2.27)$$

Selon la configuration de la vitesse de la particule dans le champ magnétique, on peut se trouver alors dans deux types de configuration :

- **Régime cyclotron** : la configuration de la vitesse est telle que  $v_{\perp} \ll c$ . Il n'y a alors pas de focalisation relativiste en direction de l'observateur (la vitesse parallèle au champ peut néanmoins être proche de la vitesse de la lumière mais dans ce cas là les particules rayonneront peu car elles ne subissent pas d'accélération importante). La durée d'émission sera alors de l'ordre de grandeur de la période de rotation de la particule.
- **Régime synchrotron** : la configuration est telle que  $v_{\parallel} \ll v_{\perp} \simeq c$ . Le mouvement de la particule est essentiellement perpendiculaire au champ magnétique. On peut écrire dans cette



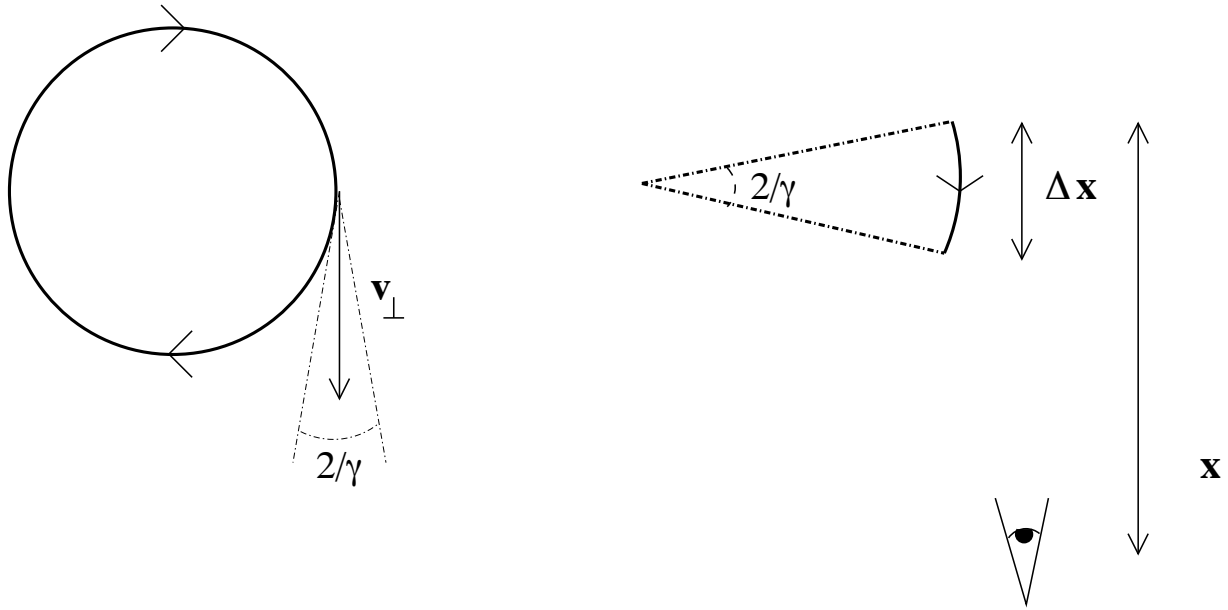


FIGURE 2.3 – Description de la zone d'émission visible d'une particule relativiste en rotation dans un champ magnétique par un observateur fixe avec un facteur de Lorentz  $\gamma \gg 1$ . Dans le cas où la vitesse perpendiculaire au champ magnétique est proche de celle de la lumière, une petite fraction seulement de l'orbite  $\Delta x$  sera propice à la réception de l'émission de lumière en provenance de cette particule pour un observateur fixe.

configuration que  $1 - v_{\perp}/c \simeq 1/2\gamma^2$ , ce qui donne un temps d'émission visible

$$\Delta t_p \simeq R_L \frac{2}{\gamma v_{\perp} 2\gamma^2} = \frac{m}{|q|B\gamma^2} \quad (2.28)$$

où  $R_L$  est le rayon de Larmor de la particule. Si on compare ce temps d'émission au temps nécessaire pour que la particule fasse une rotation complète autour du champ magnétique  $\Delta t$ , on obtient  $\Delta t/\Delta t_p \simeq \gamma^3 \gg 1$ . Une particule chargée en rotation dans un champ magnétique n'enverra donc une émission très intense que dans pendant une fraction très petite de son orbite si la vitesse perpendiculaire au champ est proche de la vitesse de la lumière.

Le profil de champ électrique perçu par un observateur extérieur fixe sera différent suivant s'il est dans un régime ou dans l'autre. Le spectre de puissance en fréquence par unité d'angle solide du signal reçu par l'observateur dépend essentiellement de la forme du champ électrique vu depuis le référentiel car la relation entre le spectre de puissance  $S(\nu)$  et la transformée de Fourier du champ électrique est

$$s(\nu) = \frac{dS}{d\Omega} \frac{c}{4\pi} \hat{E}(\nu) \hat{E}^*(\nu) \quad (2.29)$$

où  $\hat{E}^*(\nu)$  est le conjugué de  $\hat{E}(\nu)$ . Dans le régime cyclotron, il est assez facile de voir quel sera ce spectre d'émission. En effet, si aucun effet relativiste transverse ne perturbe l'émission de la particule, le signal du champ électrique sera simplement sinusoïdal tel que  $E(t) \propto \cos(\omega_L t)$  où  $\omega_L$  est la pulsation de Larmor. La transformée de Fourier d'un tel champ sera un pic de Dirac  $\delta(\nu - \frac{\omega_L}{2\pi})$  centré sur la fréquence cyclotron. Cette fréquence s'écrit  $\omega_L = |q|B/m$  dans le régime cyclotron et outre les propriétés intrinsèques des particules ne dépend que de l'intensité du champ magnétique local. Bien-sûr les plasmas astrophysiques ne sont pas tous ordonnés et paisibles et localement le

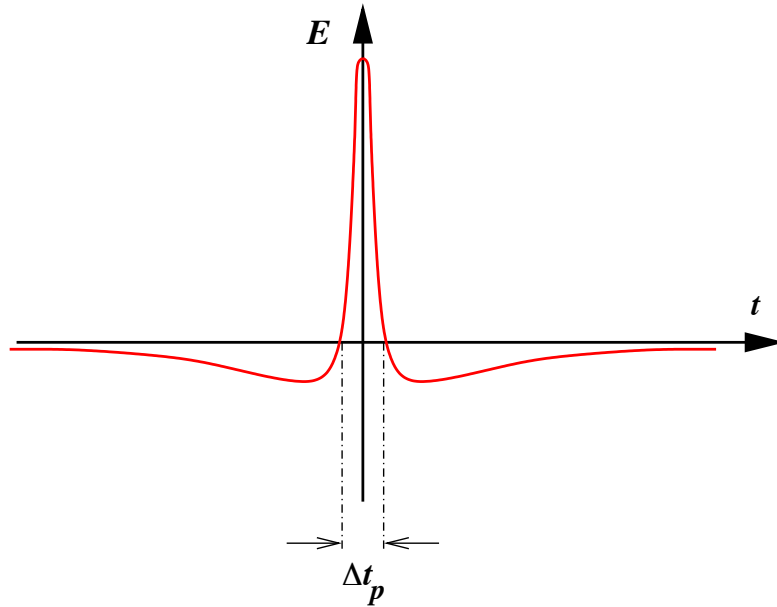


FIGURE 2.4 – Profil temporel du champ électrique perçu par un observateur fixe et émis par une particule chargée en rotation dans un champ magnétique en ayant une vitesse  $v_{\parallel} \ll v_{\perp} \simeq c$ . Le mouvement relativiste transverse au champ magnétique induit une focalisation de l'émission qui devient très brève (largeur temporelle  $\sim \Delta t_p$ ) par rapport à la périodicité du signal  $\Delta t$ .

champ magnétique varie dans ces régions. Ainsi ces fluctuations engendrent un élargissement du pic cyclotron permettant de diagnostiquer la variance du champ magnétique local ainsi que la turbulence du milieu.

Le calcul du profil temporel du champ électrique ainsi que sa transformée de Fourier est très complexe dans le cas où  $v_{\perp} \simeq c$  et il n'est pas d'intérêt ici de détailler ces calculs. Néanmoins, on peut appréhender quelques propriétés de ce spectre en regardant le profil d'une impulsion du champ électrique. En effet si on appelle  $\varepsilon(t)$  le profil temporel d'une impulsion (comme représentée sur la figure 2.4), alors on peut écrire que le champ électrique perçu par un observateur sera

$$E(t) = \varepsilon(t) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta t) \quad (2.30)$$

où le symbole  $\otimes$  représente le produit de convolution. La convolution par un peigne de Dirac permet de prendre en compte la périodicité du signal. La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est le peigne de Dirac lui-même. La transformée de Fourier du champ électrique perçu sera alors

$$\hat{E}(\nu) = \hat{\varepsilon}(\nu) \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{\Delta t}\right) \quad (2.31)$$

La fonction  $\hat{\varepsilon}(\nu)$  qui s'écrit

$$\hat{\varepsilon}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t) \cos(2\pi\nu t) dt \quad (2.32)$$

présente deux grands régimes de comportement :

- La partie basse fréquence où  $\nu \ll 1/\Delta t_p$  : pour  $\nu = 0$ , la fonction  $\hat{\varepsilon}$  est nulle car l'intégrale de l'impulsion est nulle. Pour  $\nu$  croissant, mais toujours très inférieur à  $1/\Delta t_p$ , le  $\cos(2\pi\nu t)$

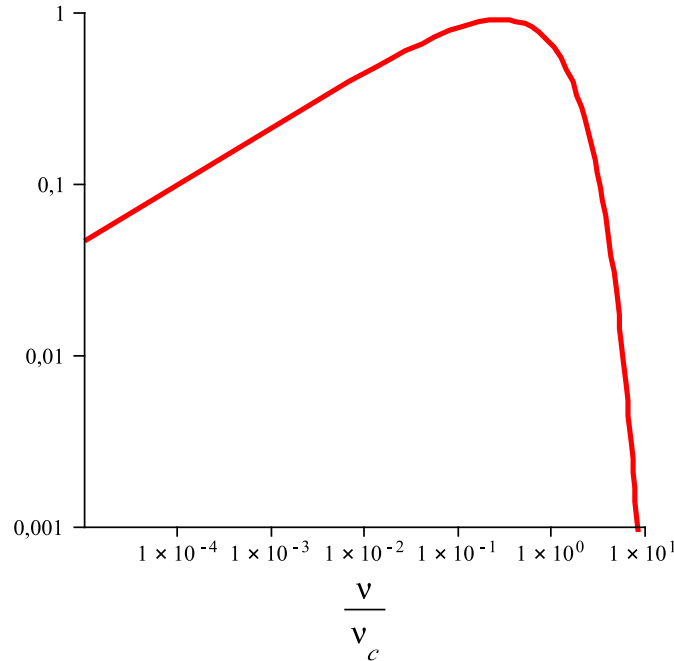


FIGURE 2.5 – Spectre synchrotron d’une particule chargée.

décroit légèrement ce qui a pour effet d’atténuer la contribution des parties négatives de la fonction (associées aux lobes secondaires) et de faire croître très lentement  $\hat{\varepsilon}$  tant que  $\nu < 1/\Delta t_p$ .

- La partie haute fréquence où  $\nu > 1/\Delta t_p$  : dans ce domaine, la fonction  $\cos(2\pi\nu t)$  varie très vite par rapport à  $\varepsilon(t)$ , ce qui a pour effet de faire décroître très rapidement  $\hat{\varepsilon}$  à mesure que  $\nu$  augmente.

La fonction  $\hat{\varepsilon}$  aura donc un comportement légèrement croissant pour  $0 \leq \nu \leq 1/\Delta t_p$ , puis rencontrera un maximum en  $\nu \simeq 1/\Delta t_p$  avant de rapidement décroître vers zéro pour  $\nu > 1/\Delta t_p$ . Le profil de la transformée de Fourier du champ électrique est proche de celui que nous venons de voir. En effet, la multiplication par le peigne de Dirac laisse quasiment inchangé la fonction  $\hat{\varepsilon}$  car la largeur en fréquence du peigne est très petite ( $\sim 1/\Delta t$ ) par rapport à l’étendue de la fonction  $\hat{\varepsilon}$  ( $\sim \gamma^3/\Delta t$ ). Le peigne de Dirac n’agira donc que pour les basses fréquences du spectre.

Je donne ici l’expression exacte du spectre synchrotron dont l’obtention n’est pas des plus aisées. Ainsi pour une particule de charge  $q$ , de masse  $m$  et de facteur de Lorentz ( $\gamma \simeq (1 - v_{\perp}^2/c^2)^{-1/2}$ ),

le spectre en fréquence est

$$S(\nu, \gamma) = \frac{\sqrt{3}|q|^3 B}{mc^2} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx \quad (2.33)$$

où la fréquence critique  $\nu_c = 3\gamma^2|q|B/2m$  et où  $K_{5/3}$  est une fonction de Bessel modifiée. Ce spectre est représentée par la figure (2.5). Le maximum de ce spectre se trouve à la fréquence  $\nu_m = 0.29\nu_c$  et la largeur à mi-hauteur est  $\Delta\nu = 2\nu_c/3$ . Il est intéressant de noter que cette fonction dont l'expression est complexe peut être approximée par une fonction d'expression plus simple :

$$S(\nu, \gamma) \sim \frac{\sqrt{3}|q|^3 B}{mc^2} \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/3} \exp\left(-\frac{\nu}{\nu_c}\right) \quad (2.34)$$

Nature des particules émettrices : A ce stade nous pouvons remarquer les principales différences entre les propriétés d'émission des protons et des électrons d'un même plasma. En effet, nous avons déjà vu que la puissance d'émission des protons était très inférieure à celle des électrons en vertu de leur grande différence de masse. Nous pouvons ajouter ici qu'à même énergie, les protons émettent un rayonnement jusqu'à une fréquence inférieure à celle des électrons car  $\nu_{c,p} = \nu_{c,e}m_e/m_p$ . Ainsi les protons émettent une énergie bien plus faible que les électrons et à des fréquences beaucoup plus basse que pour les électrons dans le cas du rayonnement cyclo-synchrotron.

### 2.3.3 Spectre d'émission synchrotron d'une population de particules

Dans les plasmas astrophysiques émetteurs de rayonnement synchrotron, une population de particules relativistes est présente en son sein. Divers mécanismes d'accélération permettent de donner naissance à ce genre de population. Il est courant de décrire ces particules par nature supra-thermiques grâce à une fonction de distribution  $f$  donnant leur densité dans l'espace des phases position-quantité de mouvement. Si on estime que ces particules sont localement isotropiquement réparties, on peut alors en déduire le spectre d'émission total de cette population de particule par le calcul de l'intégrale suivante :

$$S_{TOT}(\nu) = \int f(\gamma)S(\nu, \gamma)d\gamma \quad (2.35)$$

Parmi les différents mécanismes d'accélération de particules existant dans l'Univers, le plus commun est un mécanisme que nous verrons à la fin de ce cours, et appelé accélération de Fermi. Ce genre donne naissance à des populations de particules relativistes dont la fonction de distribution a la forme de lois de puissances. Dans ce cas, on écrira que cette fonction de distribution est  $f(\gamma) = f_0\gamma^{-p}$  pour  $\gamma \in [\gamma_{min}, \gamma_{max}]$  et  $p > 0$ . L'équation précédente peut alors se réécrire comme

$$S_{TOT}(\nu) = \int f_0\gamma^{-p}S(\nu, \gamma)d\gamma \quad (2.36)$$

Pour savoir quelle sera la forme du spectre en fonction de la fréquence d'émission, il nous faut réarranger les différents termes de l'expression afin de faire apparaître la dépendance en fréquence seule. Un moyen pour y arriver est de faire un changement de variable de façon à utiliser la variable  $y = \nu/\nu_c$ . Il faut se rappeler ici que  $\nu_c \propto \gamma^2$  et donc on aura

$$\begin{cases} d\gamma \propto \nu^{1/2} \frac{dy}{y^{3/2}} \\ \gamma \propto \left(\frac{\nu}{y}\right)^{1/2} \end{cases} \quad (2.37)$$

## 2.4. RAYONNEMENT DE FREINAGE - BREMSSTRAHLUNG (HORS PROGRAMME)

L'expression du spectre total va alors se réduire à

$$\begin{aligned}
 S_{TOT}(\nu) &\propto \int_{y_{min}}^{y_{max}} f_o \left( \frac{\nu}{y} \right)^{-p/2} S(y) \frac{\nu^{1/2}}{y^{3/2}} dy \\
 \Rightarrow S_{TOT}(\nu) &\propto \nu^{-(p-1)/2} \int_{y_{min}}^{y_{max}} f_o y^{(p-3)/2} S(y) dy
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Dans la dernière expression, l'intégrale est une constante numérique qui certes dépend des paramètres physiques de l'environnement mais qui surtout ne dépend pas de la fréquence. Le spectre d'émission synchrotron en provenance d'une population de particules relativistes organisée en loi de puissance sera lui-même une loi de puissance dont l'indice sera relié à l'indice de distribution des particules.

### 2.4 Rayonnement de freinage - Bremsstrahlung (hors programme)

Le rayonnement de freinage ou "Bremsstrahlung" en allemand (appellation historique conservée pour réduire la longueur du nom de ce processus) est le mécanisme d'émission associé au freinage ressenti par une espèce de particules chargées lors de son passage près de particules d'autres espèces ayant une charge électrique opposée ou non. Parmi toutes les interactions entre espèces se produisant dans un plasma, c'est l'interaction entre les électrons et les ions qui sera celle produisant l'essentiel de l'émission radiative. En effet, les électrons sont les particules les plus émettrices à cause de leur faible masse et leurs voisins les plus proches seront les ions ayant des charges de signe opposé. L'interaction coulombienne entre ces deux espèces sera ainsi la plus intense et donc celle produisant le plus de rayonnement. Dans le premier paragraphe, nous allons nous intéresser à dériver le spectre de puissance en fréquence de ce processus en provenance d'un plasma thermique. Par thermique, j'entends un plasma dont les particules se trouvent dans un équilibre thermodynamique local, ce qui sous-entend que la vitesse moyenne des particules est faible devant celle de la lumière. En effet, un électron relativiste ayant une énergie cinétique bien supérieure à  $m_e c^2$  définirait une température du plasma telle que  $T \gg m_e c^2 / k_B \simeq 6 \times 10^9 K$  ce qui ne représente pas la grande majorité des plasmas astrophysiques. Nous verrons néanmoins dans le second paragraphe les modifications à prendre en compte pour caractériser l'émission de freinage associée à un électron relativiste.

#### 2.4.1 Spectre d'émission du Bremsstrahlung thermique

Pour connaître le spectre d'émission associé au Bremsstrahlung, nous allons procéder par étape. Dans un premier temps, nous allons considérer un couple électron-ion (ion de charge  $Ze$  avec  $Z$  un entier positif et  $e > 0$  la charge électrique fondamentale), puis nous verrons l'effet de multiples interaction entre l'électron et un ensemble d'ions puis enfin nous généraliserons ce résultat à un population d'électrons non-relativistes. L'inertie de l'ion de masse  $m_i$  étant très supérieure à celle de l'électron, on peut faire l'approximation que lors d'une interaction coulombienne entre l'électron et l'ion, cet ion va rester immobile. Nous nous placerons donc dans le référentiel d'inertie de l'ion pour la description de l'interaction. On va noter  $v$  la vitesse de l'électron dans ce référentiel et nous supposerons que cet électron est non-relativiste ( $v \ll c$ ). La nature non-relativiste de l'électron nous permet d'utiliser directement la formule de Larmor car l'accélération ressentie par l'électron dans le référentiel de l'ion sera identique à celle ressentie par cet électron dans son référentiel d'inertie. Ce couple de particules forme un dipole électrostatique dont nous appellerons  $\vec{d} = e \vec{l}$

## CHAPITRE 2. ÉMISSION RADIATIVE DE PARTICULES CHARGÉES

le moment dipolaire ( $\vec{l}$  est la distance entre l'ion et l'électron). On peut voir alors en prenant la dérivée temporelle seconde que la formule de Larmor appliquée à l'électron peut se réécrire

$$P = \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3} \quad (2.39)$$

Lors de l'interaction électrostatique, nous avons vu en début de chapitre que le champ électrique généré par cette accélération a comme expression

$$E(t, \theta) = \frac{\ddot{d}(t) \sin \theta}{rc^2} \quad (2.40)$$

où  $\theta$  est l'angle entre la direction d'émission de  $E(t)$  et le vecteur accélération. Le spectre en fréquence de ce signal fait intervenir la transformée de Fourier de ce champ électrique qui sera proportionnelle à celle de  $\ddot{d}$ . En utilisant les propriétés de cette transformée, on voit facilement que

$$\ddot{d}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2\nu^2 \hat{d}(\nu) \exp(2i\pi\nu t) d\nu \quad (2.41)$$

où  $\hat{d}(\nu)$  est la transformée de Fourier de  $d(t)$ . La transformée de Fourier du champ électrique rayonné sera donc alors

$$\hat{E}(\nu, \theta) = -\frac{4\pi^2\nu^2 \sin \theta \hat{d}(\nu)}{rc^2} \quad (2.42)$$

Le spectre de puissance par unité d'angle solide est donné par la transformée de Fourier du flux de Poynting associé à ce champ électrique rayonné, soit

$$\frac{dS}{d\Omega}(\nu, \theta) = \frac{c}{4\pi} |\hat{E}(\nu)|^2 = \frac{c}{4\pi} \frac{16\pi^4\nu^4 \sin^2 \theta |\hat{d}(\nu)|^2}{r^2 c^4} = \frac{4\pi^3\nu^4 \sin^2 \theta |\hat{d}(\nu)|^2}{r^2 c^3} \quad (2.43)$$

On obtient le spectre moyen  $S(\nu)$  en intégrant l'expression précédente sur une sphère de rayon  $r$ , ce qui donne

$$S(\nu) = \iint \frac{dS}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{dS}{d\Omega} \sin \theta r^2 d\theta d\phi = \frac{2}{3} \frac{(2\pi\nu)^4 |\hat{d}(\nu)|^2}{c^3} \quad (2.44)$$

On retrouve au passage une expression ici directement de la formule de Larmor où on voit apparaître ce qui est associée à la transformée de Fourier de la dérivée temporelle seconde du moment dipolaire  $d$ . Il ne nous reste plus qu'à calculer cette transformée de Fourier. Pour l'obtenir on doit voir que  $\ddot{d}(t) = e\dot{v}(t)$  ce qui implique que

$$\hat{d}(\nu) = -\frac{e}{4\pi^2\nu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t) \exp(2i\pi\nu t) dt \quad (2.45)$$

Considérons l'interaction de cet électron avec un ion de charge  $Ze$  comme montré sur la figure (2.6) : l'électron subit une déflexion de sa trajectoire à cause de l'attraction coulombienne exercée par l'ion. Le temps d'interaction significative où la vitesse de l'électron va effectivement changer est environ  $\tau \simeq b/v$  où  $b$  est le paramètre d'impact de l'électron. On peut donc logiquement réduire les bornes de l'intégrale (on pose que  $t = 0$  correspond au temps d'entrée de l'électron dans la zone d'interaction)

$$\hat{d}(\nu) = -\frac{e}{4\pi^2\nu^2} \int_0^\tau \dot{v}(t) \exp(2i\pi\nu t) dt \quad (2.46)$$

## 2.4. RAYONNEMENT DE FREINAGE - BREMSSTRAHLUNG (HORS PROGRAMME)

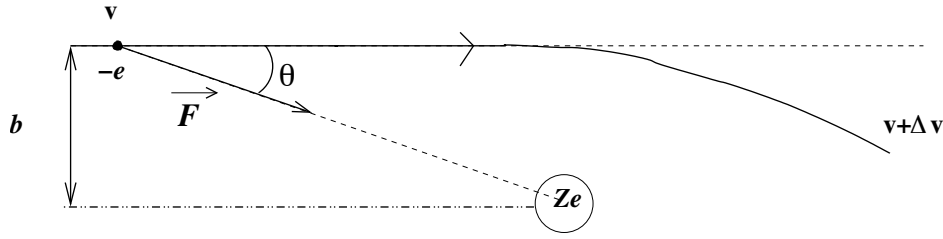


FIGURE 2.6 – Trajectoire d'un électron lors d'une déflexion coulombienne induite par un ion de charge  $Ze$ . Le paramètre d'impact  $b$  est la distance initiale transverse entre l'électron et l'ion considéré ici comme fixe. La force d'attraction coulombienne exercée par le noyau permet à l'électron d'augmenter sa vitesse.

La valeur de ce temps de traversée  $\tau$  va déterminer la valeur de l'intégrale à estimer. Ainsi dans le domaine des basses fréquences  $2\pi\nu\tau \ll 1$ , l'exponentiel dans l'intégrale vaudra 1, ce qui donnera comme valeur de l'intégrale  $\Delta v$ . Dans le cas contraire, soit  $2\pi\nu\tau \gg 1$ , l'exponentiel varie très vite, ce qui donne une valeur nulle pour l'intégrale. Ainsi, on peut résumer la valeur de  $\hat{d}(\nu)$  :

$$S(\nu, v, b) = \begin{cases} \frac{2e^2\Delta v^2}{3c^3} & \text{pour } \frac{2\pi\nu b}{v} \ll 1 \\ 0 & \text{pour } \frac{2\pi\nu b}{v} \gg 1 \end{cases} \quad (2.47)$$

Pour calculer la variation de vitesse que subit l'électron, nous devons tout d'abord réaliser que les électrons responsables du rayonnement de freinage doivent être des particules qui peuvent se propager librement dans le plasma afin d'assurer la pérennité du processus. Pour ce faire, il ne saurait être question pour un électron de subir une importante variation de vitesse lors d'une interaction avec un ion, au risque pour cet électron d'être capturé par l'ion et de ne plus pouvoir de propager. Dans la suite de notre raisonnement, nous supposons que  $\Delta v \ll v$  et nous vérifierons à posteriori pour quelles valeurs de  $b$  cela est valide. Lors d'une déflexion, comme présentée sur la figure (2.6), la projection de la force d'attraction coulombienne s'appliquera dans la direction parallèle à  $\vec{v}$  mais aussi dans la direction transverse à la vitesse. Si comme nous le supposons, la trajectoire de l'électron n'est que faiblement perturbée alors on peut voir que le travail de la force parallèle à la vitesse sera nul par projection. La variation de vitesse interviendra donc principalement dans la direction transverse à la vitesse initiale. La projection de la force coulombienne dans la direction transverse s'exprime comme :

$$F_{\perp} = \frac{Ze^2b}{(b^2 + v^2t^2)^{3/2}} = m_e \frac{dv_{\perp}}{dt} \quad (2.48)$$

où on a posé arbitrairement que  $t = 0$  correspond au passage de l'électron à la "verticale" de l'ion. Le calcul de la variation de vitesse donne alors

$$\Delta v = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv_{\perp}}{dt} dt = \frac{Ze^2b}{m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(b^2 + v^2t^2)^{3/2}} = \frac{Ze^2\tau}{b^2m_e} \left[ \frac{t/\tau}{(1 + t^2/\tau^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2Ze^2}{m_e b v} \quad (2.49)$$

Pour vérifier que l'hypothèse de départ est valide ( $\Delta v \ll v$ ), nous voyons que la condition est que le paramètre d'impact ne doit pas être trop petit car sinon la déflexion est importante. La valeur minimale de ce paramètre d'impact  $b_{min}$  s'obtient en posant  $\Delta v \sim v$  et donne  $b_{min} = 2Ze^2/m_e v^2$ . Cette valeur correspond à une énergie mécanique nulle de l'électron, marquant la frontière entre électron libre et électron lié.

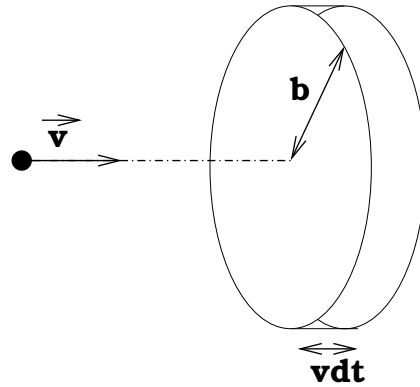


FIGURE 2.7 – Schéma montrant la zone d'interaction d'un électron avec les ions contenu dans un volume défini par le paramètre d'impact  $b$ .

Ayant obtenu toutes les parties manquantes, nous pouvons donc recomposer le spectre d'émission d'une électron interagissant avec un ion de charge  $Ze$  :

$$S(\nu, v, b) = \begin{cases} \frac{8Z^2e^6}{3m_e^2b^2v^2c^3} & \text{pour } \frac{2\pi\nu b}{v} \ll 1 \\ 0 & \text{pour } \frac{2\pi\nu b}{v} \gg 1 \end{cases} \quad (2.50)$$

A ce stade, nous voyons que le spectre en fréquence de cette interaction est celui d'un signal "blanc", c'est à dire indépendant de la valeur de la fréquence tant que la fréquence  $\nu < v/2\pi b$ . Au delà de cette fréquence, le spectre est nul, il n'y a pas d'émission.

• Généralisation à un ensemble d'électrons mono-énergétique : considérant le spectre émis par un électron lors d'une interaction avec un ion, nous pouvons moyenniser l'émission obtenue en prenant en compte la moyenne des interactions subies pendant un intervalle de temps  $dt$  dans un volume  $dV$ . Pour ce faire nous utiliserons les densités électronique  $n_e$  et ionique  $n_i$ . Pour commencer, le nombre d'interaction qu'un électron ayant un paramètre d'impact entre  $b$  et  $b + db$  peut avoir avec les ions pendant un temps  $dt$  sera  $n_i v dt 2\pi b db$  (voir figure 2.7). Sachant que nous avons  $n_e$  électrons par unité de volume, on en déduit le spectre en puissance par unité de volume et par unité de temps du rayonnement de freinage :

$$\frac{dS}{dt dV}(\nu, v) = n_e n_i v \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi b S(\nu, v, b) db \quad (2.51)$$

Nous avons vu qu'il existe un paramètre d'impact minimal  $b_{min}$  en deça duquel les électrons sont capturés par les ions. A quoi correspond la borne supérieure de l'intégrale ? Cette borne supérieure correspond au fait qu'à une fréquence  $\nu$  donnée, le spectre  $S$  est nul si  $b$  est supérieur à  $v/2\pi\nu = b_{max}$ . Le calcul de l'intégrale amène le résultat suivant :

$$\frac{dS}{dV dt}(\nu, v) = \frac{16\pi}{3} \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{m_e^2 c^3 v} \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \quad (2.52)$$

Le facteur logarithmique apparaissant dans l'expression est appelé facteur de Gaunt  $g$ . Dans la réalité, la prise en compte d'effets quantiques plus fins que la description proposée ici est insérée dans la définition de ce facteur. L'expérience montre que ces corrections sont mineures et que l'expression trouvée ici est une bonne approximation de la réalité.



## 2.4. RAYONNEMENT DE FREINAGE - BREMSSTRAHLUNG (HORS PROGRAMME)

Au sein des plasmas astrophysiques dits classiques, la distribution en vitesse des particules n'est pas mono-énergétique mais suit une statistique de répartition appelée statistique de Maxwell-Boltzmann. Cette statistique stipule que la probabilité  $d\mathcal{P}$  pour une particule d'avoir une vitesse entre  $v$  et  $v + dv$  dans un plasma de température  $T$  est

$$d\mathcal{P} = \frac{v^2 \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T}\right) dv}{\int_0^\infty v^2 \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T}\right) dv} \quad (2.53)$$

En combinant cette densité de probabilité avec l'expression du spectre que nous avons obtenue à la fin du paragraphe précédent, nous pouvons alors avoir le spectre de puissance par unité de volume du rayonnement de freinage émis par un plasma thermique, soit

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dV dt}(\nu) &= \frac{\int_{v_{min}}^\infty \frac{dS}{dV dt}(\nu, v) v^2 \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T}\right) dv}{\int_0^\infty v^2 \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T}\right) dv} \\ \Rightarrow \frac{dS}{dV dt}(\nu) &= \frac{32\pi^{1/2} g Z^2 e^6 n_e n_i}{3m_e^2 c^3} \left(\frac{m_e}{2k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

La borne inférieure apparaissant dans l'intégrale au numérateur de la première ligne provient du fait que pour qu'un électron puisse émettre un photon d'énergie  $h\nu$ , il faut qu'il ait une énergie cinétique suffisante pour le faire soit  $v \geq v_{min} = \sqrt{2h\nu/m_e}$ . Le spectre en puissance obtenu pour un plasma thermique possède une forme particulière car il est constant pour toute fréquence inférieure à la fréquence maximale  $\nu_{max} = k_B T/h$ , puis présente une coupure exponentielle pour toute fréquence supérieure à cette limite. Ce mécanisme de rayonnement est ainsi utile pour déterminer la température du plasma émetteur.

### 2.4.2 Puissance d'émission du Bremsstrahlung

Le bilan énergétique du rayonnement Bremsstrahlung pour un électron peut se faire ne considérant les deux régimes non-relativiste ( $NR$ ) et relativiste ( $R$ ). Commençons par estimer l'énergie émise par un électron lors d'une interaction coulombienne avec un ion dans ces deux régimes.

#### Energie d'émission par un électron pendant une déflexion

$NR$  : Dans ce régime, on peut estimer l'ordre de grandeur de l'énergie émise  $dE$  pendant la déflexion en prenant la puissance émise due à l'accélération d'origine coulombienne et le temps typique d'interaction  $\tau \simeq b/v$ . L'accélération  $a$  subie par un électron ayant un paramètre d'impact  $b$  sera en moyenne  $Z e^2 / b^2 m_e$ , ce qui donne une quantité d'énergie

$$dE \sim \frac{2Z^2 e^6}{3b^3 m_e^2 c^3 v} \quad (2.55)$$

$R$  : Ici une modifications relativiste est à prendre en compte. Tout d'abord il faut exprimer l'accélération  $a'$  ressentie par l'électron dans son référentiel propre, soit  $a' = \gamma^2 a$  pour pouvoir appliquer la formule de Larmor que nous avons vue ici. Nous avons utiliser le fait que la force coulombienne agit principalement dans la direction perpendiculaire au déplacement pour déduire

## CHAPITRE 2. ÉMISSION RADIATIVE DE PARTICULES CHARGÉES

le lien entre les deux accélérations. Nous pouvons en déduire alors la puissance d'émission de l'électron dans son référentiel propre, puissance qui étant un invariant de Lorentz sera identique dans le référentiel de l'observateur. Le temps typique d'interaction sera  $\tau = b/c$ , ce qui amène alors

$$dE \sim \frac{2Z^2 e^6}{3b^3 m_e^2 c^4} \gamma^2 \quad (2.56)$$

On peut au passage remarquer que la puissance moyenne associée peut se réécrire sous la forme

$$\frac{dE}{\tau} \sim \sigma_T c \gamma^2 U_E \quad (2.57)$$

où  $U_E = Z^2 e^2 / 4\pi b^4$  est la densité d'énergie électrostatique des ions du plasma. On retrouve une structure similaire à celle de la puissance émise par rayonnement synchrotron, à la différence que la densité d'énergie magnétique est remplacée par la densité d'énergie électrostatique. On voit ici que ces deux mécanismes d'émission peuvent cohabiter à condition que le plasma soit ionisé et qu'un champ magnétique à grande échelle soit présent.

### Paramètre d'impact minimal

NR : Nous avons vu précédemment qu'en deçà d'une valeur minimale du paramètre d'impact  $b_{min}$ , un électron se trouverait capturé par un ion avec lequel il interagit. La valeur de  $b_{min}$  est alors  $h/mv$  où l'on a utilisé le fait que la fréquence maximale du photon émis correspond à  $1/\tau(b_{min})$ .

R : Le même raisonnement peut s'appliquer dans le cas où l'électron est relativiste à la différence que son énergie est maintenant  $\gamma m_e c^2$ , ce qui amène à une nouvelle expression  $b_{min} = \gamma h/mc$ . Pour obtenir cette expression, il faut bien réaliser que la fréquence du photon vu par l'observateur sera  $\gamma/\tau'$  où  $\tau'$  est le temps d'interaction caractéristique dans le référentiel propre de l'observateur. A cause de la dilatation du temps dans ce référentiel, on sait que  $\tau' = b/\gamma c$ .

### Puissance d'émission moyenne d'émission par un électron

NR : Pour calculer la puissance moyenne émise par l'électron, il faut tout d'abord savoir le nombre d'interaction que cet électron aura au cours d'un intervalle de temps  $dt$ . Ce nombre est égal au nombre d'ions présent dans la zone d'interaction. Ainsi pour un électron ayant un paramètre d'impact compris entre  $b$  et  $b + db$ , le nombre d'ion interagissant sera  $dn = n_i 2\pi b db v dt$ . Le calcul de la valeur moyenne se fait en intégrant sur les valeur du paramètre d'impact :

$$P_{moy} = \int dE \frac{dn}{dt} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{2Z^2 e^6 n_i v}{3b^3 m_e^2 c^3 v} 2\pi b db = \frac{2\pi Z^2 e^6 n_i}{3m_e^2 c^3} \frac{1}{b_{min}} \quad (2.58)$$

Etant donnée la dépendance en  $1/b^3$  de l'énergie émise lors d'une interaction, on voit que la production principale d'énergie sera engendrée par les électrons ayant un paramètre d'impact proche de la valeur minimale  $b_{min}$ , ce qui correspond à une fréquence  $\nu_{max} \sim m_e v^2/h$ .

R : Dans le cas d'un électron relativiste, le même calcul nous amène à une puissance moyenne

$$P_{moy} = \int dE \frac{dn}{dt} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{2Z^2 e^6 n_i c}{3b^3 m_e^2 c^3 v} \gamma^2 2\pi b db = \frac{2\pi Z^2 e^6 n_i}{3m_e^2 c^3} \gamma^2 \frac{1}{b_{min}} \quad (2.59)$$

Ici aussi les électrons ayant un paramètre d'impact proche de la valeur minimale domineront l'émission d'énergie avec une fréquence  $\nu_{max} \sim \gamma m_e c^2/h$ . On voit ici le lien de proportionnalité entre la fréquence d'émission d'un électron et son facteur de Lorentz. Comme nous l'avons évoqué, les populations relativistes sont très souvent distribuées selon des lois de puissance, on voit alors que l'émission de Bremsstrahlung suivra elle aussi une distribution spectrale en loi de puissance.

## 2.5 Exercices

### 2.5.1 Dynamique d'une particule relativiste dans un champ magnétique uniforme

On considère une zone de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B}$ . Dans cette zone, une particule de charge  $e$  et de masse  $m$  se propage à un instant  $t_o$  avec une vitesse  $v = v_o$  proche de celle de la lumière. On notera le vecteur vitesse de cette particule comme  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$  où  $\vec{v}_{\parallel}$  est la composante de la vitesse parallèle au champ magnétique tandis que  $\vec{v}_{\perp}$  est la composante de la vitesse perpendiculaire au champ magnétique. On supposera que la composante de la vitesse  $v_{\perp}$  est très grande par rapport à  $v_{\parallel}$ .

1. Exprimer la quantité d'énergie émise au cours du temps par la particule en fonction de  $d\gamma/dt$ ,  $m$  et  $c$ . En déduire l'expression de  $d\gamma/dt$  en sachant que cette particule émet un rayonnement synchrotron.
2. On va supposer par la suite que l'accélération subie par la particule sera perpendiculaire au champ magnétique. Dans le cadre de cette hypothèse, projeter la relation fondamentale de la dynamique de cette particule dans la direction parallèle au champ magnétique ainsi que parallèlement à la vitesse perpendiculaire  $\vec{v}_{\perp}$ . En déduire les composantes de la force de freinage associée au rayonnement de la particule. Montrer enfin que le rayonnement émis par la particule au cours de sa propagation dans le champ magnétique  $\vec{B}$  peut se traduire comme une force de freinage ressentie par la particule dont l'expression est

$$\vec{f}_{rad} = -\omega_r m (\beta_{\perp}^2 \gamma^2 \vec{v} + \vec{v}_{\perp}) \quad (2.60)$$

où  $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$ ,  $\gamma^{-2} = 1 - v^2/c^2$  et où  $\omega_r$  est une pulsation dont on donnera l'expression.

3. On définit le temps caractéristique synchrotron  $t_{syn}$  comme le temps nécessaire à une particule pour perdre la moitié de son énergie totale par émission synchrotron. En vous servant de l'expression de la force de radiation précédente, donner l'expression de  $t_{syn}$ . Pourquoi peut-on supposer que  $\beta_{\perp}$  reste à peu près constant durant le temps  $t_{syn}$  ?

### 2.5.2 Propagation dans un champ électromagnétique

On se placera, dans cet exercice dans un référentiel où les champs électrique et magnétique sont parallèles. On notera  $E_o$  et  $B_o$  les amplitudes de ces champs dans ce référentiel. La vitesse de la particule (de masse  $m$ ) dans ce référentiel sera toujours notée  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$  où  $\vec{v}_{\parallel}$  est la composante de la vitesse parallèle aux champs électrique et magnétique tandis que  $\vec{v}_{\perp}$  est la composante de la vitesse perpendiculaire aux champs électrique et magnétique.

1. En prenant en compte toutes les forces qui s'appliquent sur la particule de charge  $e$  (électrique, magnétique et rayonnement), montrer que cette particule subit une accélération tant que son énergie totale est inférieure à une valeur critique dont on donnera l'expression.
2. Montrer ensuite que la particule, au cours de sa propagation, tend vers une situation où sa vitesse tend à devenir parallèle aux champs électrique et magnétique.
3. En se plaçant dans ce régime asymptotique de vitesse, donner les expressions des composantes de la vitesse de la particule en fonction du temps. On prendra comme origine des temps le temps où la particule entre dans ce régime asymptotique.

### 2.5.3 Rayonnement de courbure

Dans cette dernière partie, on va considérer un champ magnétique dont les lignes de champs sont localement courbées avec un rayon de courbure  $R$ . On supposera aussi que la vitesse de la particule reste parallèle au champ magnétique au cours de sa propagation.

1. Expliquer pourquoi la particule va émettre un rayonnement au cours de sa propagation, même si sa vitesse reste parallèle au champ magnétique.
2. Donner l'expression de la puissance émise par la particule ainsi que la fréquence d'émission principale. Expliquer comment ce rayonnement (appelé rayonnement de courbure) peut être comparé à un rayonnement de type synchrotron. Donner l'expression du champ magnétique correspondant à ce rayonnement de courbure.