Examen FC9 - Particules de Haute Énergie

Jeudi 7 janvier 2010

(I) Particule relativiste dans un champ magnétique

(1°) Une particule dans un champ magnétique $\vec{B}$ subit la force de Lorentz $e\vec{v}\times\vec{B}$ et rayonne une puissance $P = \frac{2}{3}\gamma^2 \frac{e^4 B^2 v_\perp^2}{m^2 c^5}$

→ présence d'une force de rétroaction.

La puissance émise est reliée à γ par $\frac{d\gamma}{dt}mc^2 = -\frac{2}{3}\gamma^2\frac{e^4B^2}{m^3c^5}c^2\beta_\perp^2 m$

Si on pose $\omega_r = \frac{2}{3}\frac{e^4B^2}{m^3c^5}$, la pulsation de radiation on a

$$\frac{d\gamma}{dt}mc^2 = -\omega_r\gamma^2 mc^2\beta_\perp^2 \rightarrow \boxed{\frac{d\gamma}{dt} = -\omega_r\beta_\perp^2\gamma^2}$$

(*) Hypothèse clé : l'accélération $\frac{d\vec{v}}{dt}$ est perpendiculaire à $\vec{v}_\parallel$ et donc $\vec{B}$ car la perte d'énergie est provoquée par le mvt en $\vec{v}_\perp$!

(*) Projection sur $\vec{v}_\parallel$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{v}_\parallel = \frac{d\gamma}{dt}m\,\vec{v}_\parallel\cdot\vec{v}_\parallel = \vec{f}_{rad}\cdot\vec{v}_\parallel = -\omega_r m\beta_\perp^2\gamma^2\vec{v}_\parallel\cdot\vec{v}_\parallel$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{f}_{rad_\parallel} = -m\omega_r\beta_\perp^2\gamma^2\vec{v}_\parallel}$$

(*) Projection sur $\vec{v}_\perp$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{v}_\perp = \frac{d\gamma}{dt}m\,\vec{v}_\perp\cdot\vec{v}_\perp + \gamma m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}_\perp = \vec{f}_{rad}\cdot\vec{v}_\perp$$

$$c^2\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \gamma^3\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}_\perp \quad \text{car } \frac{d\vec{v}}{dt}\perp\vec{v}_\parallel$$

$$\to -m\omega_r \beta_\perp^2 \gamma^2 \vec{v_\perp}\cdot\vec{v_\perp} - \frac{m}{\cancel{\gamma^2}} c^2 \omega_r \beta_\perp^2 \cancel{\gamma^2} = \vec{f}_{rad}\cdot\vec{v_\perp}$$

$$\to \vec{f}_{rad}\cdot\vec{v_\perp} = -m\omega_r\left(\beta_\perp^2\gamma^2+1\right)\vec{v_\perp}\cdot\vec{v_\perp}$$

$$\vec{f}_{rad\perp} = -m\omega_r\left(\beta_\perp^2\gamma^2+1\right)\vec{v_\perp}$$

$$\Rightarrow \vec{f}_{rad} = -m\omega_r\left\{\beta_\perp^2\gamma^2\left(\vec{v_\parallel}+\vec{v_\perp}\right)+\vec{v_\perp}\right\} =$$

$$\boxed{\vec{f}_{rad} = -m\omega_r\left(\beta_\perp^2\gamma^2\vec{v}+\vec{v_\perp}\right)}$$

(2°) Dans le cas du rayonnement synchrotron, on a $v_\perp \gg v_\parallel$ ce qui permet de réécrire f_{rad} comme ($\gamma \gg 1$)

$$\vec{f}_{rad_{syn}} \simeq -m\omega_r\beta_\perp^2\gamma^2\vec{v_\perp}$$

On utilise pour déterminer t_{syn} la relation $\frac{d\gamma}{dt} = -\omega_r\beta_\perp^2\gamma^2$

$$\to \frac{d\gamma}{\gamma^2} = -\omega_r\beta_\perp^2 dt \to \int_{\gamma_0}^{\frac{\gamma_0}{2}} \frac{d\gamma}{\gamma^2} = -\int_{t_0}^{t_0+t_{syn}} \omega_r\beta_\perp^2 dt$$

On a $\gamma_0 \gg 1$ donc ~~on~~ aussi $\frac{\gamma_0}{2} \gg 1 \to \beta_\perp$ reste de l'ordre de l'unité

$\to \beta_\perp \simeq$ cste

$$\to \frac{2}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma_0} = \omega_r\beta_\perp^2 t_{syn} = \frac{1}{\gamma_0} = \frac{2}{3}\frac{e^4B^2}{m^3c^5}\beta_\perp^2 t_{syn}$$

$$\to \boxed{t_{syn} \simeq \frac{3}{2}\frac{m^3c^5}{e^4B^2\beta_\perp^2\gamma_0}}$$

(2°) Si on prend en compte les champs électrique et magnétique, l'évolution temporelle de l'énergie particulaire sera

$$\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{d\gamma}{dt}mc^2 = \left(e\vec{E} - m\omega_r\left(\beta_\perp^2\gamma^2\vec{v} + \vec{v}_\perp\right) + e\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v}$$

$$= eE_0 v_\parallel - m\omega_r\left(\beta_\perp^2\gamma^2 v^2 + v_\perp^2\right)$$

$$\rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{eE_0}{mc}\beta_\parallel - \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}}\omega_r\beta_\perp^2\left(\gamma^2\beta^2 + 1\right)$$

On voit que $\gamma^2\beta^2 + 1 = \dfrac{\cancel{\beta^2} + 1 - \cancel{\beta^2}}{1-\beta^2} = \gamma^2$

$$\rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{eE_0}{mc}\beta_\parallel - \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}}\omega_r\beta_\perp^2\gamma^2 = \omega_E\beta_\parallel - \omega_r\beta_\perp^2\gamma^2$$

$\rightarrow$ Accélération possible si $\omega_E\beta_\parallel - \omega_r\beta_\perp^2\gamma^2 > 0$

$$\rightarrow \boxed{\gamma^2 < \frac{\omega_E}{\omega_r}\,\frac{\beta_\parallel}{\beta_\perp^2}} \rightarrow \text{Energie maximale !}$$

Si la particule possède une composante $\beta_\perp \neq 0 \rightarrow$ Existence d'une énergie maximale fixée par les pertes synchrotron.

(3°) L'évolution des composantes de la vitesse est donnée par

$$\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{v}_{\parallel} = eE_0 v_{\parallel} - m\omega_r(\beta_\perp^2\gamma^2 v_{\parallel}^2)$$

$$\rightarrow \frac{d\gamma}{dt} m v_{\parallel}^2 + \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}_{\parallel} = eE_0 v_{\parallel} - m\omega_r \beta_\perp^2\gamma^2 v_{\parallel}^2$$

$$\rightarrow (\omega_E\beta_{\parallel} - \omega_r\beta_\perp^2\gamma^2) m\beta_{\parallel}^2 + \gamma m \beta_{\parallel}\dot{\beta}_{\parallel} = \frac{eE_0}{c}\beta_{\parallel} - m\omega_r\beta_\perp^2\gamma^2\beta_{\parallel}^2$$

$$\rightarrow (\omega_E\beta_{\parallel} - \cancel{\omega_r\beta_\perp^2\gamma^2})\beta_{\parallel}^2 + \gamma\beta_{\parallel}\dot{\beta}_{\parallel} = \omega_E\beta_{\parallel} - \cancel{\omega_r\beta_\perp^2\gamma^2\beta_{\parallel}^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\dot{\beta}_{\parallel} = \omega_E\frac{(1-\beta_{\parallel}^2)}{\gamma} > 0}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{v}_\perp = \frac{d\gamma}{dt} m v_\perp^2 + \gamma m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}_\perp = -m\omega_r(\beta_\perp^2\gamma^2 v_\perp^2 + v_\perp^2)$$

$$\rightarrow (\omega_E\beta_{\parallel} - \cancel{\omega_r\beta_\perp^2\gamma^2}) m\beta_\perp^2 + \gamma m\dot{\beta}_\perp\beta_\perp = -m\omega_r\beta_\perp^2(\cancel{\beta_\perp^2\gamma^2} + 1)$$

$$\rightarrow \dot{\beta}_\perp = -\frac{m\omega_r}{\gamma m}\beta_\perp - \frac{\omega_E}{\gamma}\beta_{\parallel}\beta_\perp$$

$$\rightarrow \boxed{\dot{\beta}_\perp = -\frac{\beta_\perp}{\gamma}(\omega_r + \omega_E\beta_{\parallel}) < 0}$$

La vitesse de la particule tend à devenir telle que $\beta_{\parallel} \rightarrow 1$ et $\beta_\perp \rightarrow 0$

(4°) Dans ce régime de vitesse, on a

$$\frac{d\gamma}{dt} \simeq \omega_E\beta_{\parallel} \rightarrow \gamma(t) = \omega_E t + \gamma_0$$

On en déduit l'évolution de la vitesse parallèle :

$$\gamma^2 \simeq \frac{1}{1-\beta_{\parallel}^2} = (\omega_E t + \gamma_0)^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\beta_{\parallel}^2 \simeq 1 - \frac{1}{(\omega_E t + \gamma_0)^2}}$$

La composante perpendiculaire s'obtient sachant que

$$\dot{\beta}_\perp \simeq -\frac{\beta_\perp}{\gamma}\left(\omega_r+\omega_E\right) = -\frac{\beta_\perp}{\omega_E t+\gamma_0}\left(\omega_r+\omega_E\right)$$

$$\rightarrow \frac{\dot{\beta}_\perp}{\beta_\perp} = -\frac{\omega_r+\omega_E}{\gamma_0+\omega_E t} \rightarrow d\left(\ln\beta_\perp\right) = -d\left(\left(1+\frac{\omega_r}{\omega_E}\right)\ln(\omega_E t+\gamma_0)\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\beta_\perp(t) \simeq \beta_{\perp_0}\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_0+\omega_E t}\right)^{1+\frac{\omega_r}{\omega_E}}}$$

III) Rayonnement de courbure

1°) La particule a une vitesse qui est // à $\vec{B}$ → les lignes étant courbées la particule subira une accélération dans R telle que

$$a = \frac{v_{/\!/}^2}{R} \simeq \frac{c^2}{R}$$ → dans son référentiel propre l'accélération sera alors $a' \simeq \gamma^2\frac{c^2}{R}$ ⟹ Emission due à la courbure.

2°) Si on considère la formule de Larmor, la puissance émise sera

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2 a'^2}{c^3} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\Omega^2\gamma^4$$ où $\Omega = \frac{c}{R}$ est la vitesse angulaire de la particule.

Pour ce rayonnement, la rotation initiée par la courbure est similaire à la rotation autour du champ magnétique. Le champ magnétique correspondant vient de

$$\frac{e v_{/\!/} B_{eff}}{\gamma m c} = \frac{v_{/\!/}^2}{R} \rightarrow B_{eff} = \frac{\gamma m c v_{/\!/}}{eR} \simeq \frac{mc^2\gamma}{eR}$$

→ La fréquence d'émission principale sera

$$\boxed{\nu_c \simeq \frac{\gamma^2 e B_{eff}}{mc} = \gamma^2\frac{c}{R} = \gamma^2\Omega}$$