Examen - FC9 "Particules de Haute Energie"

De la dynamique des rayons cosmiques et de leur confinement dans un champ magnétique non-uniforme

Tous les documents sont autorisés ainsi que les calculatrices.
Dans tout l'examen, il vous est fortement conseillé d'utiliser le système d'unités CGS Gaussien vu en cours afin de simplifier au maximum les différentes expressions qui vous seront demandées.
Durée de l'examen : 2h

Nous allons considérer dans cet examen un champ magnétique non-uniforme dont les variations spatiales sont telles que la longueur typique de variation du champ est très grande par rapport au rayon de gyration R_L des particules relativistes électriquement chargées. On pourra donc considérer que pendant une rotation complète de ces particules, le champ magnétique reste constant. De plus, par simplicité nous considèrerons uniquement un champ magnétique poloïdal et axisymétrique (le champ magnétique s'écrira alors $\vec{B} = (B_r, 0, B_z)$ dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) tel que l'axe (Oz) est l'axe de symétrie du champ magnétique). L'axisymétrie du champ implique évidement que les composantes du champ magnétique ne dépendent que de r et z. Dans ce cadre, le potentiel vecteur $\vec{A}$ dont dérive le champ magnétique $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ peut alors s'écrire comme $\vec{A} = A(r,z)\vec{e}_\theta$ (c est la vitesse de la lumière).
On notera γ le facteur de Lorentz de la particule relativiste considérée, m la masse de la particule et q sa charge électrique. Les vecteurs unitaires de la base cylindrique utilisée seront notés $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ et on rappelle que les dérivées temporelles des vecteurs unitaires sont telles que $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$.

<u>PREMIÈRE PARTIE</u> : PARTICULE RELATIVISTE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE POLOÎDAL NON-UNIFORME

1. On considère une particule relativiste qui à un instant donné t_o possède une vitesse $\vec{v}_o = v_\perp \vec{e}_\theta + v_\parallel \vec{e}_z$. En utilisant la relation fondamentale de la dynamique relativiste, montrer que la trajectoire de cette particule dans un champ magnétique localement uniforme ($\vec{B} = B\vec{e}_z$) est un mouvement hélicoïdal centré sur l'axe de symétrie dont vous donnerez l'expression du rayon de gyration R_L ainsi que la pulsation de rotation ω_L. Dans la suite de l'examen, on notera la vitesse de la particule comme $\vec{v} = v_\perp \vec{e}_\theta + v_\parallel \vec{e}_z$.
2. Dans le cadre d'un champ magnétique purement poloîdal (pas de composante du champ selon $\vec{e}_\theta$), montrer, à partir de l'équation de Maxwell sur la conservation du flux magnétique, que le champ radial au voisinage de l'axe de symétrie peut s'écrire

$$B_r \simeq -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

On rappelle l'expression de l'opérateur divergence d'un vecteur $\vec{B}$ en coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

En déduire que si le rayon de gyration R_L de la particule est très petit par rapport à la longueur typique λ de variation de B_z, alors le champ magnétique radial subi par la particule est négligeable devant la composante B_z du champ magnétique. Quelle sera alors la nature de la trajectoire de cette particule ?

3. Le moment cinétique L_z par rapport à l'axe de symétrie du champ magnétique d'une particule relativiste chargée en mouvement autour de l'axe de symétrie est défini comme étant la composante selon $\vec{e}_z$ du moment cinétique $\vec{L} = \vec{\mathrm{r}} \wedge \vec{p}$ où $\vec{p}$ (défini par rapport au centre du repère O) est la quantité de mouvement de la particule et $\vec{\mathrm{r}} = (r\vec{e}_r + z\vec{e}_z)$ est son vecteur position. Après avoir montrer que $L_z = r\gamma m v_\perp$, utiliser le théorème du moment cinétique pour montrer que la grandeur $\vec{K}$ définie comme
$$\vec{J} = \left(L_z + \frac{q}{c} r A\right) \vec{e}_\theta$$
est un invariant du mouvement de la particule. On rappelle que le théorème du moment cinétique stipule que si une force $\vec{F}$ s'applique sur la particule alors la variation temporelle du moment cinétique est :
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathrm{r}} \wedge \vec{F}$$
On rappelle aussi l'expression de l'opérateur rotationnel en coordonnées cylindriques
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

4. Montrer que l'expression de l'élément de longueur élémentaire $\vec{dl}$ décrivant la trajectoire peut s'écrire
$$\vec{dl} = R_L d\theta \vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$
En déduire alors que si l'on intégre l'invariant $\vec{J}$ sur une rotation complète de la particule autour de l'axe de symétrie du champ magnétique, on obtient un nouvel invariant Φ_B
$$\oint \vec{J} \cdot \vec{dl} = \frac{q}{c} R_L \Phi_B$$
où $\Phi_B = \iint B_z dS$ est le flux magnétique au travers de l'orbite de la particule. On pourra utiliser le théorème de Stokes qui relie les intégrales :
$$\oint \vec{A} \cdot \vec{dl} = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}$$
Montrer que cet invariant Φ_B est directement relié à un autre invariant du mouvement qu'est le rapport $\dfrac{p_\perp^2}{B_z}$.

Les invariants du mouvement sont obtenus sous l'hypothèse que la longueur de variation spatiale du champ magnétique est très grande par rapport au rayon de l'orbite des particules. Cette variation du champ magnétique est donc ressentie de façon lente et douce par les particules et c'est pourquoi ces invariants du mouvement sont appelés *invariants adiabatiques*.

SECONDE PARTIE :
CONFINEMENT DES RAYONS COSMIQUES DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE

5. On considère un proton d'énergie $E = 10^{14} eV$ se trouvant au voisinage d'un choc de supernovae. Dans cet environnement, il règne un champ magnétique moyen dont l'intensité est de l'ordre de $100\mu G$. En utilisant l'expression de la puissance moyenne du rayonnement synchrotron d'une particule plongée dans un champ magnétique, calculer l'ordre de grandeur du temps caractéristique nécessaire pour que ce proton perde la moitié de son énergie par rayonnement synchrotron. En déduire que les pertes radiatives sont négligeables pour les rayons cosmiques. Quelle serait la conclusion si la particule était un électron ayant la même énergie ?
On donne les valeurs suivantes : $m_p = 1.7 \times 10^{-24}\ g$, $m_e = 9,1 \times 10^{-28}\ g$, $c = 3 \times 10^{10}\ cm/s$, les sections efficaces de Thomson $\sigma_{T,p} \simeq 4 \times 10^{-28} cm^2$, $\sigma_{T,e} \simeq 6,65 \times 10^{-25} cm^2$.

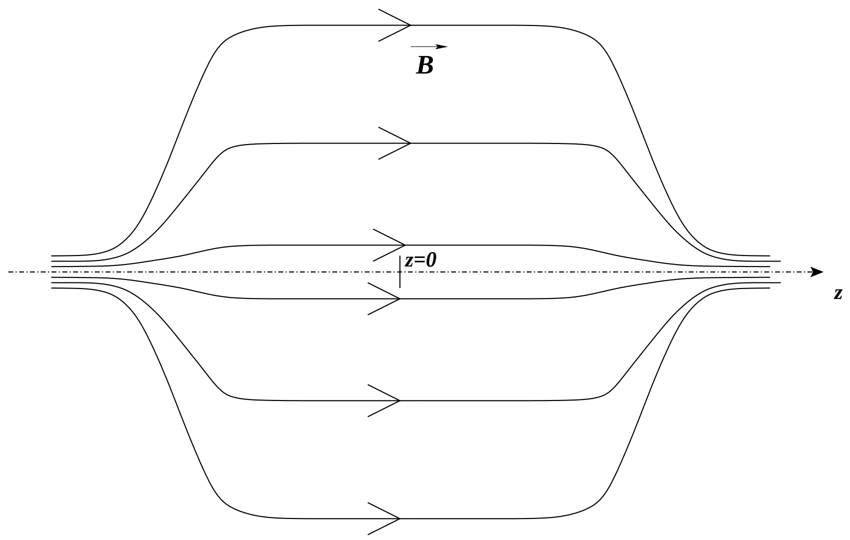

FIG. 1 – Représentation schématique d'un champ magnétique dont la structure est poloïdal et axisymétrique (l'axe de symétrie est l'axe z représenté sur la figure).

6. Le proton de la question précédente se trouve dans une région où le champ magnétique est axisymétrique et poloïdal. Ce proton est en mouvement hélicoïdal autour de l'axe de symétrie avec un rayon de gyration très faible par rapport à la longueur caractéristique de variation du champ magnétique. Les lignes de champ magnétique de cette région sont représentées sur la Fig.1. Représenter le profil du champ magnétique B_z sur l'axe de symétrie en fonction de z. Sachant que l'on peut négliger les pertes énergétiques liées au rayonnement, montrer que ce proton restera confiné dans la zone où le champ magnétique est le plus faible si la relation suivante est vérifiée
$$\frac{v_{\parallel,o}^2}{v_{\perp,o}^2} < \frac{B_{z,M}}{B_{z,o}} - 1$$
où la vitesse de la particule en $z = 0$ est $\vec{v}_o = v_{\perp,o}\vec{e}_\theta + v_{\parallel,o}\vec{e}_z$ et où B_o est la valeur de B_z en $z = 0$ et $B_{z,M}$ est la valeur maximal de B_z dans cette région.
Vous pourrez par exemple vous servir de l'existence de l'invariant adiabatique $p_\perp^2/B_z$ ainsi que de la conservation de l'énergie. Expliquer pourquoi cette condition est facilement vérifiée pour les particules émettant un rayonnement synchrotron.
7. On appelle λ la longueur typique de variation du champ magnétique dans cette région de l'espace telle que l'on peut approximer la dérivée $\dfrac{\partial B_z}{\partial z} \sim \pm\dfrac{B_z}{\lambda}$. Montrer alors que la variation du champ magnétique entraine une accélération parallèle à l'axe de symétrie du champ magnétique et que cette accélération est très inférieure à l'accélération perpendiculaire ressentie par le proton. Calculer l'ordre de grandeur de la puissance d'émission radiative associée à cette accélération.
Comment évoluent les composantes de la vitesse quand le champ magnétique varie ?