Relativité Générale
Mouvement d'une particule

JK

PCC

Rappels Newtoniens

- Particule dans un champ de gravitation Newtonien :
  Lagrangien : $L_N = \frac{\vec{v}^2}{2} - V(\vec{x})$,
- Indépendance du temps : Conservation de l'énergie:
  $E = \frac{\vec{v}^2}{2} + V(\vec{x}) = E$.
- Potentiel $V(r)$ à symétrie sphérique:
  $L_N = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\right) - V(r)$
  $E = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\right) + V(r)$
- Invariance par rotation : Conservation du moment angulaire
  $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = r^2\sin\theta\cos\theta \longrightarrow$ mouvement plan ($\theta = \pi/2$),
  $r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}$ constant,
  et avec $\theta = \pi/2$,
  $r^2\dot{\phi} = j = b_0\,v_0$, ($b_0$: paramètre d'impact et v_0 vitesse initiale).

Newton : La trajectoire 1

On peut éliminer le temps en utilisant $\frac{d}{dt} = \dot\phi \frac{d}{d\phi}$ et la conservation du moment angulaire j :

$$j^2(u^2 + u'^2) = v_0^2 + 2\left(V(u_0) - V(u)\right)$$ où $u = \frac{1}{r}$

Pour le potentiel Gravitationnel de Newton où $V(u) = -G\,M\,u = -\frac{r_s\,u}{2}$,

$$u'^2 + \left(u - \frac{r_s}{2b_0^2 v_0^2}\right)^2 = \frac{1}{b_0^2} - u_0^2 + \left(u_0 - \frac{r_s}{2b_0^2 v_0^2}\right)^2 .$$

La solution générale est :

$$u - \frac{r_s}{2b_0^2 v_0^2} = \sqrt{\frac{1}{b_0^2} - u_0^2 + \left(u_0 - \frac{r_s}{2b_0^2 v_0^2}\right)^2}\ \cos(\phi - \phi_0)$$

ou, en revenant à r:

$$r = \frac{b_0}{\frac{r_s}{2b_0 v_0^2} + \sqrt{1 - b_0^2 u_0^2 + \left(b_0 u_0 - \frac{r_s}{2b_0 v_0^2}\right)^2}\ \cos(\phi - \phi_0)},$$

l'équation d'une conique de foyer l'origine.

Newton : Trajectoire ouverte

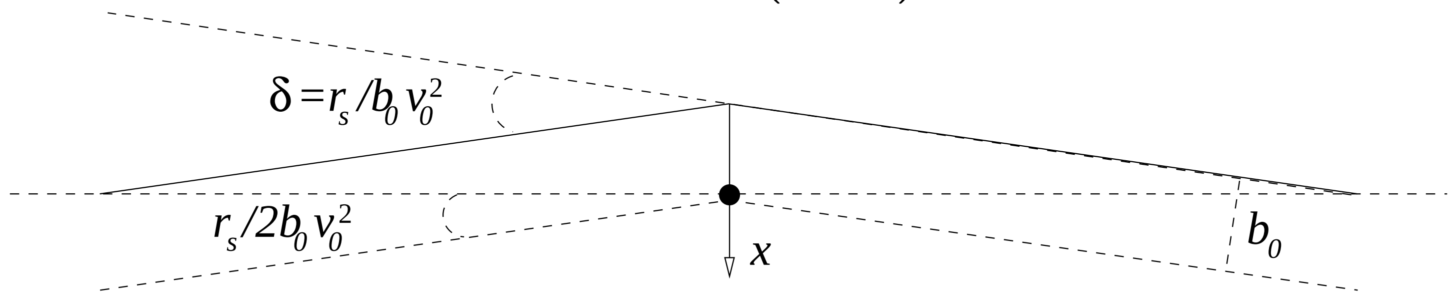
Vitesse de libération : Trajectoire ouverte si le dénominateur peut s'annuler

$$v_0^2 \geq r_s\, u_0 \sim \frac{v_0^2}{2} \geq \frac{G\,M}{r_0} = \frac{v_L^2}{2}$$

Conditions initiales : $r_0 = \infty \Leftrightarrow u_0 = 0, b_0, v_0$

$$u - \frac{r_s}{2b_0^2 v_0^2} = \sqrt{\frac{1}{b_0^2} + \left(\frac{r_s}{2b_0^2 v_0^2}\right)^2}\ \cos(\phi - \phi_0)$$

Asymptotes : $\phi - \phi_0 = \pi/2 \pm \arctan\left(\frac{r_s}{2b_0 v_0^2}\right)$



et donc la deviation est $\delta = 2\ \arctan\left(\frac{r_s}{2b_0 v_0^2}\right) \simeq \frac{r_s}{b_0 v_0^2}$

Pour un photon, $v_0 = 1 = c = 1$ et donc

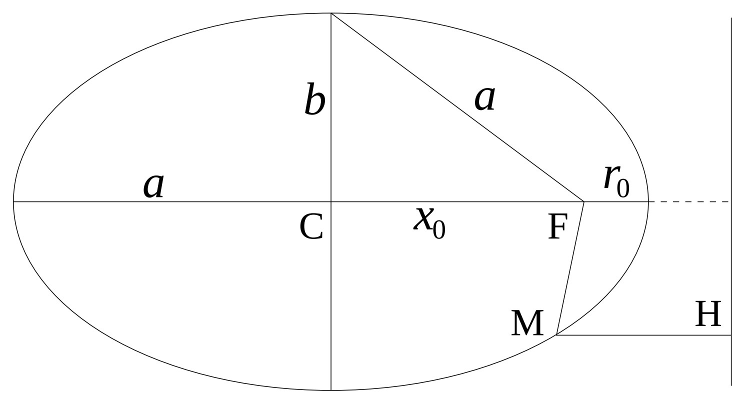
$$\delta_{\text{photon, Newton}} = 2\ \arctan\left(\frac{r_s}{2b_0}\right) \simeq \frac{r_s}{b_0}$$

Newton : Trajectoire Elliptique

$v_0 < v_L = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$, vitesse de libération, La trajectoire est une ellipse.

Conditions initiales à un sommet : $u_0 = 1/r_0 = 1/b_0, \phi_0 = 0$

L'équation est : $r = \frac{r_0}{\frac{r_s}{2r_0v_0^2} + \left|1 - \frac{r_s}{2r_0v_0^2}\right| \cos\phi} = \frac{b^2}{a + x_0 \cos\phi}$



Les paramètres de l'ellipse en fonction des conditions initiales :

$$a = \frac{r_0}{2}\frac{v_L^2}{v_L^2 - v_0^2}, \qquad b = \frac{r_0 v_0}{\sqrt{v_L^2 - v_0^2}}$$

$$x_0 = \frac{r_0}{2}\frac{|v_L^2 - 2v_0^2|}{v_L^2 - v_0^2}, \qquad e = \frac{|v_L^2 - 2v_0^2|}{v_L^2}$$

$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ est l'ellipticité.

Gravitation d'Einstein

Une particule décrit une géodésique dans l'espace-temps, donc minimise

$$\text{l'intervale de temps propre } \Delta\tau = \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x(\lambda))\,\dot{x}^{\mu}(\lambda)\,\dot{x}^{\nu}(\lambda)}\,d\lambda = \int \mathcal{L}\left(x(\lambda), \dot{x}(\lambda)\right)\,d\lambda$$

Le Lagrangien $\mathcal{L}$ est singulier pour les trajectoires de longueur nulle, mais :

1. $L = \frac{\mathcal{L}^2}{2}$ et $\mathcal{L}$ sont équivalents s'ils sont constants et non nuls long des trajectoires
2. Il est toujours possible de choisir le paramètre λ tel que $\mathcal{L}$ soit constant le long de la trajectoire
3. L est *toujours constant* le long des trajectoires qui satisfont ses équations de Lagrange.
4. L n'est pas singulier pour les trajectoires de longueur nulle (masse nulle)

Le bon choix est donc

$$L = \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}(x(\lambda))\,\dot{x}^{\mu}(\lambda)\,\dot{x}^{\nu}(\lambda),$$

λ est alors un "paramètre affine", proportionnnel au temps propre τ

Gravitation d'Einstein 2

Les 4 propriétés ci-dessus viennent de l'homohénéité de $\mathcal{L}$ et L en $\dot{x}$:
$f(\eta z) = \eta^\alpha f(z) \leftrightarrow z\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \alpha f(z)$, $\alpha = 1$ pour $\mathcal{L}$ et 2 pour L.

Le quadri-moment
$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = g_{\alpha\,\gamma}\dot{x}^\gamma$ est constant si $\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0$ (L, ne dépend pas de x^α)

La masse :

$p^\alpha = g^{\alpha\,\gamma}\,p_\gamma = \dot{x}^\alpha$ et $L = \frac{1}{2}g_{\alpha\,\gamma}\,\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\gamma$, donc

$$2\,L = p^\alpha\,p_\alpha = m^2 = \left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2$$

Changer la masse change le coefficient de proportionnalité entre τ et λ mais ne change pas la trajectoire.
Le mouvement d'une particule dans un champ de gravitation ne dépend pas de sa masse

En partant de $\mathcal{L}$, $p^\alpha\,p_\alpha \equiv 1$ et n'apporte pas d'information

Einstein : Symétrie sphérique

Symétrie sphérique (voir cours d'Alain) :
$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$
Je préfère la forme:
$d\tau^2 = H(r')dt^2 - K(r')(dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)) = H(r')\, dt^2 - K(r')\, d\vec{r'}^2$
ce qui s'obtient par le changement de variable : $r' =$ cte $\exp\left[\int \sqrt{A(r)}\, \frac{dr}{r}\right]$

Pour Schwarzschild
$B(r) = 1 + 2V(r) \rightarrow H(r') = \left(\frac{1+\frac{V(r')}{2}}{1-\frac{V(r')}{2}}\right)^2$ et $A(r) = \frac{1}{1+2V(r)} \rightarrow K(r') = \left(1 - \frac{V(r')}{2}\right)^4$
où $V(r) = -\frac{r_s}{2\,r} = -\frac{G\,M}{r}$

Le Lagrangien est

$$2\,L = H(r)\dot{t}^2 - K(r)(\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2)) = H(r)\dot{t}^2 - K(r)\vec{v_\lambda}^2 = m^2$$

où $\dot{f} = \frac{df}{d\lambda}$, $\vec{v_\lambda} = \frac{d\vec{r}}{d\lambda}$ et $m = \frac{d\tau}{d\lambda}$.

Einstein : Symétrie sphérique 2

Equations de Lagrange

$\frac{dp_t}{d\lambda} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow H(r)\,\dot{t} = E$: Conservation de l'énergie

$\frac{dp_\theta}{d\lambda} = \frac{d(K(r)r^2\dot{\theta})}{d\lambda} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = K(r)r^2 \sin\theta\cos\theta\dot{\phi} \rightarrow$ Mouvement plan ($\theta = \pi/2$ constant)

$\frac{dp_\phi}{d\lambda} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \rightarrow$ conservation du moment angulaire : $K(r)r^2\dot{\phi} = E\,J$

Intégrale première $2L = m^2$,

en tenant compte des autres équations de Lagrange :

$m^2 = \frac{E^2}{H(r)} - K(r)\,\dot{\vec{r}}^2 = \frac{E^2}{H(r)} - \left(K(r)\dot{r}^2 + \frac{E^2\,J^2}{K(r)\,r^2}\right)$

Trajectoire

On peut de nouveau éliminer le paramètre λ (conservation du moment angulaire) :

$$\frac{E^2}{H(u)} - \frac{E^2 J^2}{K(u)}(u'^2 + u^2) = m^2 \quad \text{où } u = \frac{1}{r} \text{ et } u' = \frac{du}{d\phi}$$

Einstein : Symétrie sphérique 3

Conditions initiales

On écrit les relations de conservations sous les conditions initiales,

en utilisant la vitesse mesurée localement.

Repère local : localement la métrique est Minkowski

$d\tau^2 = H(r)\,dt^2 - K(r)\,d\vec{r}^2 \rightarrow dt_L{}^2 - d\vec{r}_L{}^2$ donc $dt_L = \sqrt{H(r)}\,dt$ et $d\vec{r}_L = \sqrt{K(r)}\,d\vec{r}$

$\vec{v}_t = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sqrt{\frac{H(r)}{K(r)}}\,\frac{d\vec{r}_L}{dt_L} = \sqrt{\frac{H(r)}{K(r)}}\,\vec{v}_L$

Dans les équations du mouvement $\lambda \rightarrow t$ (En utilisant l'équation $\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{H(r)}$) :

$K(r)\,r^2\,\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{E\,K(r)}{H(r)}\,r^2\,\frac{d\phi}{dt} = \frac{E\,K(r)}{H(r)}\,b\,v_t = E\,\sqrt{\frac{K(r)}{H(r)}}\,b\,v_L = E\,J$

$\frac{E^2}{H(r)}\left(1 - \frac{K(r)}{H(r)}\,v_t{}^2\right) = \frac{E^2}{H(r)}\,(1 - v_L{}^2) = m^2$

$\Longrightarrow$ La vitesse locale d'un photon est toujours $c\ (=1)$

D'où les conditions initiales, en fonction de la vitesse locale et du paramètre d'impact.

$$E^2 = \frac{H_0\,m^2}{1 - v_{L0}{}^2} \qquad \text{et} \qquad J = \sqrt{\frac{K_0}{H_0}}\,b_0\,v_{L0} = \sqrt{\frac{K_0}{H_0}}\,j_0$$

Einstein : Champ faible

Dévelopement au premier ordre

À l'ordre le plus bas: $H(r) \simeq 1 + 2\,V(r)$ et $K(r) \simeq 1 - 2\,V(r)$

L'équation $\frac{E^2}{H(u)} - \frac{E^2 J^2}{K(u)}\,(u'^2 + u^2) = m^2$ devient:

$(E^2 - m^2)\,(1 - 2\,V(u)) - 2\,E^2\,V(u) - E^2 J^2\,(u'2 + u^2) = 0$

On voit que le potentiel $V(u)$ est couplé à l'impulsion à l'ordre le plus bas.

Limite Newtonnienne

Energie potentielle petite : $|V| \ll 1$ ET Energie cinétique petite : $v^2 \lesssim |V|$

Les conditions initiales donnent

$E^2 - m^2 \simeq m^2({v_0}^2 + 2V_0)$ et $J \simeq j_0 = b_0 v_0$

À l'ordre le plus bas en V ET ${v_0}^2$ on retrouve l'équation newtonienne

${v_0}^2 + 2(V_0 - V(u)) - {j_0}^2\,(u'2 + u^2) = 0$

Le mouvement ne dépend pas de la masse.

Non valable pour les photons car $m^2 = 0$ et ${v_0}^2 = 1$, n'est pas petit

Einstein : photons en champ faible

La masse est nulle: $m^2 = 0$
$1 - 4\,V(u) - J^2\,(u'2 + u^2) = 0$:
Le mouvement d'un photon ne depend pas de son énergie.

Conditions initiales :
$J^2 = \frac{K_0}{H_0}\,{j_0}^2 \simeq (1 - 4\,V_0)\,{j_0}^2$

On obtient l'équation Newtonienne avec la vitesse ${v_0}^2 = c = 1$ et le potentiel $2\,V(u)$:
$1 - 4\,(V(u) - V_0) - J^2\,(u'2 + u^2) = 0$ donc, au premier ordre en V,

$$\delta_{photon,Einstein} \simeq 2\,\delta_{photon,Newton} \simeq 2\,\frac{r_s}{b}$$

Pour le soleil : dépacement apparent d'une étoile juste avant l'occultation
b : Rayon du soleil : 6.96 10^5 km
r_s : Rayon de Schwarzschild: 2.95 km

Déviation $\simeq$ 1.8"

Einstein : Orbite des planètes

Equation: $\frac{E^2}{H(u)} - \frac{E^2 J^2}{K(u)} \left(u'^2 + u^2\right) = m^2$

Conditions initiales: $E^2 = \frac{H_0\, m^2}{1 - {v_0}^2}$ et $J^2 = \frac{K_0}{H_0}\, {j_0}^2 = \frac{K_0}{H_0}\, b_0^2\, {v_0}^2$

Il est commode de prendre comme point inital un des sommets: $b_0 = r_0 = 1/u_0$

L'équation devient : $\left(\frac{H_0}{H(u)} - 1 + {v_0}^2\right) \frac{K(u)}{K_0} = {r_0}^2\, {v_0}^2 (u^2 + u'^2)$

Dévelopement au second ordre en V avec ${v_0}^2 \lesssim V$, ($V = \frac{r_s}{2\,r}$) :

$H = \left(\frac{1+V/2}{1-V/2}\right)^2 \simeq 1 + 2\,V + 2\,V^2 + \ldots$ et $K = (1 - V/2)^4 \simeq 1 - 2\,V + \ldots$

Équation à l'ordre 2 :

$${r_0}^2\, {v_0}^2 (u^2 + u'^2) = 6\,V^2 - 2\,V(1 + {v_0}^2 + 6\,V_0) + 2\,V_0(1 + {v_0}^2 + 3\,V_0) + {v_0}^2$$

Très proche de l'équation Newtonienne:

$${r_0}^2\, {v_0}^2 (u^2 + u'^2) = -2\,V + 2\,V_0 + {v_0}^2$$

Einstein : Orbite des planètes 2

Écriture “canonique” :

$$\left(1-\frac{3}{2}\frac{r_s^2}{r_0^2\,v_0^2}\right)\left(u-\frac{r_s}{2r_0^2v_0^2}(1+O(V_0))\right)^2+u'^2=\left(u_0-\frac{r_s}{2r_0^2v_0^2}\right)^2(1+O(V_0)),$$

Solution : $r=\dfrac{r_0(1+O(V_0))}{\frac{r_S}{2r_0v_0^2}(1+O(V_0))+\left|1-\frac{r_S}{2r_0v_0^2}\right|(1+O(V_0))\cos\left((\phi-\phi_0)\sqrt{1-\frac{3\,r_s^2}{2\,r_0^2\,v_0^2}}\right)}$

La trajectoire n’est plus fermée : La péride en ϕ est $2\,\pi+\delta\phi$

$$\delta\phi\simeq\frac{3\,\pi}{2}\frac{r_s^2}{r_0^2\,v_0^2}=\frac{6\pi\,G\,M}{c^2\,a\,(1-e^2)}$$

Planète	a (10^6km)	e	Masse ($M_\odot$)	Période (an)	$\delta\phi$ (”/siècle)
Mercure	57.9	0.205	$1/(6.01\;10^6)$	0.241	42.9
Terre	150	0.017	$1/(3.1\;10^5)$	1	3.8

Retour à la métrique de Schwarzschild

La métrique de Schwarzschild proprement dite est :

$d\tau^2 = A(r)\,dt^2 - \frac{dr^2}{A(r)} - r^2\,d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\,d\phi^2$

$2L = A(r)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{A(r)} - r^2\dot{\phi}^2 = m^2$, où $A(r) = 1 - \frac{r_S}{r}$

Equations du mouvement :

$$A(r)\,\dot{t} = E$$

$$r^2\,\dot{\phi} = E\,J$$

$$\frac{E^2}{A(r)} - \frac{\dot{r}^2}{A(r)} - \frac{E^2\,J^2}{r^2} = m^2$$

Equation de la trajectoire :

$$E^2\left[\frac{1}{A} - J^2\left(\frac{u'^2}{A} + u^2\right)\right] = m^2, \qquad \left(u' = \frac{du}{d\phi}\right)$$

Retour sur le repère local

Les vecteurs de base du repère local:

Système de 4 (3 si on oublie θ) vecteurs e_μ, tels que $e_\mu \bullet e_\nu = \eta_{\mu\,\nu}$, métrique de Minkowski.

$$e_t^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{A}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_r^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{A} \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_\phi^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

Energie-Impulsion : paramètre “affine”, donc $p^\alpha = \dot{x}^\alpha = \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{A} \\ \dot{r} \\ \frac{E\,J}{r^2} \end{pmatrix}$

Composantes locales de l’énergie-impulsion : $\begin{pmatrix} p_t \\ p_r \\ p_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \bullet e_t \\ p \bullet e_r \\ p \bullet e_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{A}\,\dot{t} \\ \frac{\dot{r}}{\sqrt{A}} \\ r\,\dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{\sqrt{A}} \\ \frac{\dot{r}}{\sqrt{A}} \\ \frac{E\,J}{r} \end{pmatrix}$

On vérifie bien que $p_t{}^2 - p_r{}^2 - p_\phi{}^2 = \frac{E^2}{A} - \frac{\dot{r}^2}{A} - \frac{E^2\,J^2}{r^2} = m^2$

Vitesse locale: $\begin{pmatrix} v_{L\,r} \\ v_{L\,\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_r}{p_t} \\ \frac{p_\phi}{p_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{r}}{E} \\ \frac{\sqrt{A}\,r\,\dot{\phi}}{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{r}}{E} \\ \frac{\sqrt{A}\,J}{r} \end{pmatrix}$

$v_L{}^2 = v_{L\,r}{}^2 + v_{L\,\phi}{}^2 = \frac{\dot{r}^2}{E^2} + \frac{A\,J^2}{r^2} = 1 - \frac{m^2\,A}{E^2}$ et donc $E^2 = \frac{m^2 A}{1 - v_L{}^2}$

Retour sur le repère local 2

Le moment angulaire Attention, la ligne du parti a changé depuis le cours!

$E\,J = r^2\dot{\phi} = \frac{E}{\sqrt{A}}\,r\,v_{L\,\phi} = E\,b\,v_L,$ et la loi de conservation de J nous dit :

$$J = \frac{r\,v_{L\,\phi}}{\sqrt{A}} = b\,v_L \text{ constant}$$

Attention, Le paramètre d'impact b n'est conservé, que si la masse est nulle ($v_L = c = 1$).

Fini pour Aujourd’hui

À SUIVRE