Relativité Générale 3

Mouvement près d'un trou noir

JK

PCC

Le mouvement près d'un trou noir

La métrique de Schwarzschild proprement dite est :

$d\tau^2 = A(r)\,dt^2 - \frac{dr^2}{A(r)} - r^2\,d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\,d\phi^2$

$2L = A(r)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{A(r)} - r^2\dot{\phi}^2 = m^2$, où $A(r) = 1 - \frac{r_S}{r}$

Équations du mouvement :

$$A(r)\,\dot{t} = E$$

$$r^2\,\dot{\phi} = E\,J$$

$$\frac{E^2}{A(r)} - \frac{\dot{r}^2}{A(r)} - \frac{E^2\,J^2}{r^2} = m^2$$

Équation différentielle pour $r(\tau)$ (en prenant m=1) :

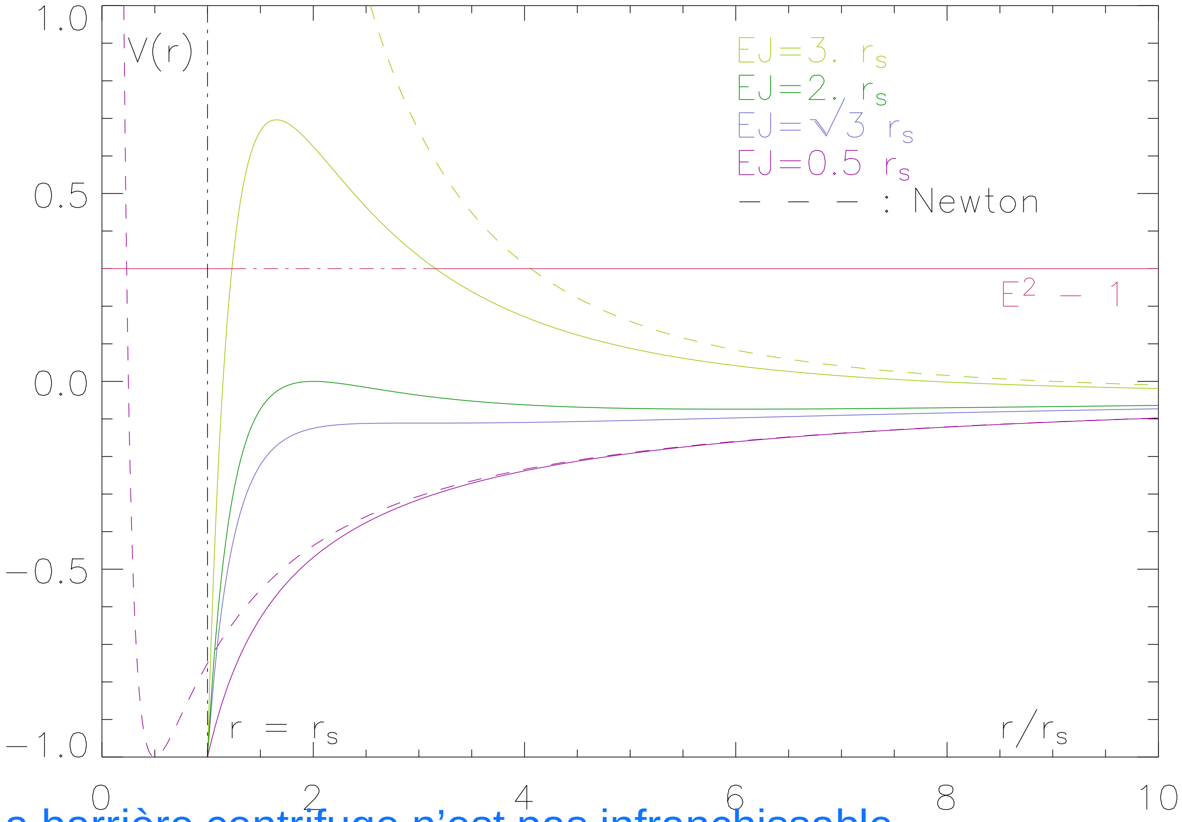
$$\dot{r}^2 = E^2 - 1 - \left\{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(1 + \frac{E^2 J^2}{r^2}\right) - 1\right\} = E^2 - 1 - V_E(r)$$

Équivalent Newtonien :

$\dot{r}^2 = 2\,(E-1) - \left(-\frac{r_s}{r} + \frac{E^2 J^2}{r^2}\right) = 2\,(E-1) - V_N(r)$. À faible vitesse, $E^2 - 1 \simeq 2(E-1)$

Le mouvement près d'un trou noir 2

Pour une particule massive : $E^2 - 1$ doit être $> V(r)$



- La barrière centrifuge n'est pas infranchissable
- La barrière centrifuge empêche aussi de sortir du trou noir

- Pas de barrière centrifuge $\rightarrow$ et pas d'orbite stable si $E\,J < \sqrt{3}\,r_s$.

Voyage vers un trou noir

Un Cosmonaute, décide d'aller explorer un trou noir

Il arrive à l'horizon $r = r_s$ au bout d'un temps propre fini car

$\tau - \tau_0 = \int_r^{r_0} \frac{dr}{\dot{r}}$ et $|\dot{r}| \to E$

Mais les collègues restés à terre perdent le contact car

$t = E \int \frac{d\tau}{1 - \frac{r_s}{r}}$ diverge linéairement et $dt_{\text{terre}} = dt \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_{\text{terre}}}}$

et donc les signaux envoyés régulièrement par le cosmonaute sont reçus

- de plus en plus espacés
- de plus en plus décalés vers le rouge donc faibles.

Que se passe-t-il quand le cosmonaute traverse la surface de Schwarzschild?

Rien sauf des forces de marée finies ($\gamma/\mathrm{m} \simeq \frac{GM}{{r_s}^3} \simeq \frac{c^2}{{r_s}^2}$) en m/s^2/m

soit 1 g_{terre}/m pour $10^9 M_\odot$

Mais surtout, même s'il ne le sait pas,

Il ne peut plus revenir

Dans le trou noir

Une fois dans le trou noir, Pourquoi le cosmonaute ne peut plus en sortir?
Que devient le principe du retour inverse?

Quand $r < r_s, \quad 1 - \frac{r_s}{r}$ devient **négatif**

$\mathbf{r}$ devient la variable de temps et ne plus changer son sens de variation et cesser de décroitre.

$r \rightarrow -t'$ et $t \rightarrow r'$ et la métrique devient

$$d\tau^2 = \frac{dt'^2}{\frac{r_s}{t'}-1} - \left(\frac{r_s}{t'} - 1\right) dr'^2 - t'^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right)$$

Tout ce qui rentre dans le trou noir se contracte inexorablement vers le centre

Cela ressemble beaucoup à l'expansion de l'univers (en sens inverse)

Le cosmonaute ne peut sortir car il est venu de l'extérieur avec $dr < 0$ et il ne peut plus changer cela

On peut imaginer des trous noirs primordiaux où $dr > 0$, crachant matière et lumière, mais

- Nous ne les verrons jamais (temps et décalage vers le rouge infinis)
- Ils avalent la matière extérieure ($dr < 0$) $\rightarrow$ mélange des flèches du temps ????

Photons près d'un trou noir

Le lagrangien :

$$2\,L = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1-\frac{r_s}{r}} - r^2\,\dot{\phi}^2 = 0$$

les équations du mouvement :

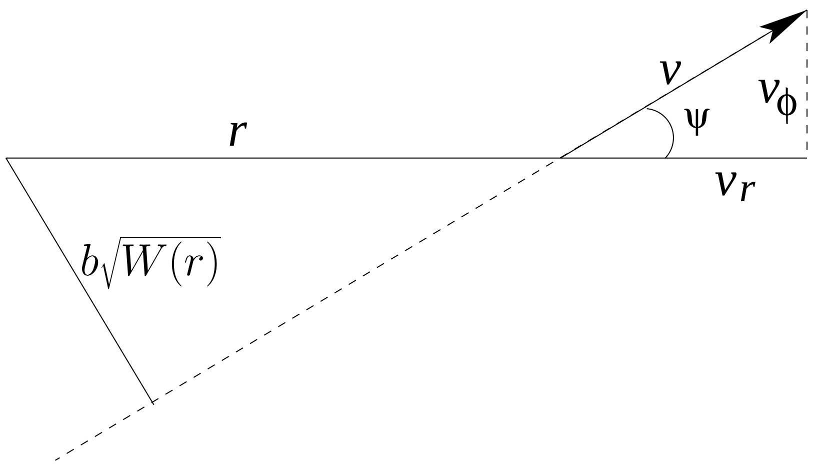
$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t} = E$$

$$r^2\,\dot{\phi} = E\,J$$

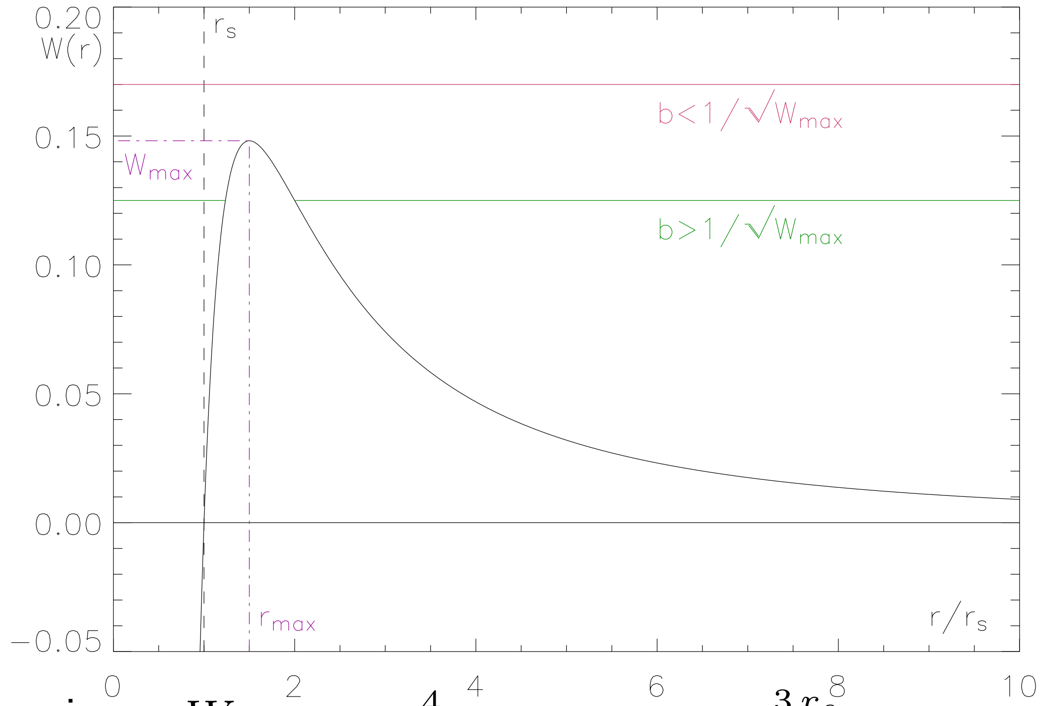
L'équation différentielle pour $\dot{r}$ (on prend $E = 1$ et $J = b\,c = b$):

$$\dot{r}^2 = 1 - \frac{b^2}{r^2}\,\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = 1 - b^2\,W(r)$$

Angle de la trajectoire avec le rayon : $\sin\psi = \frac{b}{r}\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} = b\,\sqrt{W(r)}$



Le potentiel pour un photon



W(r) passe par un maximum $W_{\max} = \frac{4}{27\, {r_s}^2}$ pour $r_{\max} = \frac{3\, r_s}{2}$

W(r) n'a pas de minimum, $\longrightarrow$ pas d'orbite stable.

$b < \frac{1}{\sqrt{W_{\max}}}$, Tous les photons émis vers l'extérieur depuis $r_0 > r_s$ peuvent sortir.

Tous les photons entrant sont capturés. $\sigma_{\rm capture} = \pi\, b^2 = \frac{27\, \pi\, {r_s}^2}{4}$

$b > \frac{1}{\sqrt{W_{\max}}}$, Les photons émis depuis $r_0 < r_{\max}$ ne peuvent s'échapper.

Les photons émis depuis $r_0 > r_{\max}$ ne peuvent être capturés.

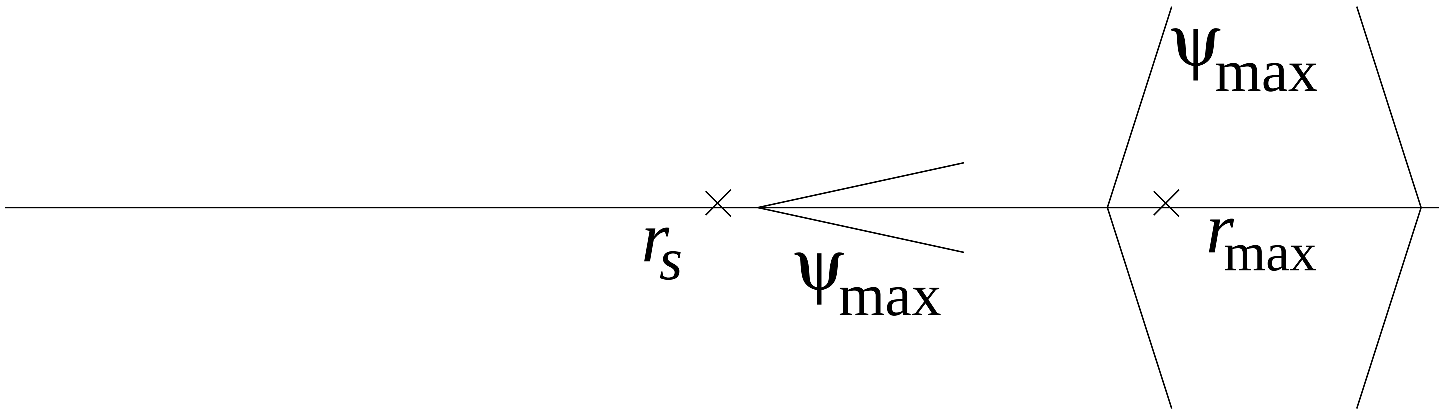
La trajectoire d'un photon

On élimine le paramètre affine λ au profit de ϕ et on exprime b en fonction de l'angle ψ_0 :

$$\phi - \phi_0 = \pm \int_{1/r}^{1/r_0} \frac{du}{\sqrt{\frac{W_0}{\sin^2 \psi_0} - u^2\,(1 - r_s\, u)}} = \pm \int_{1/r}^{1/r_0} \frac{du}{\sqrt{\frac{W_{\max}\,\sin^2 \psi_{\max}}{\sin^2 \psi_0} - u^2\,(1 - r_s\, u)}}$$

Les photons émis à $r_s < r_0 < r_{\max}$ ne s'échappent que si $\sin\psi < \sin\psi_{\max} = \sqrt{\frac{W_0}{W_{\max}}}$

$\psi_{\max} \to 0$ ou $\pi/2$ selon que $r \to r_s$ ou $r_{\max}$



Par retour inverse un observateur entre r_s et $r_{\max}$ voit tout le ciel dans un cône d'angle $\psi_{\max}$. Il le voit même plusieurs fois sur les bords!

En effet, quand ψ s'approche de $\psi_{\max}$, le radical s'annule linéairement et ϕ diverge. La trajectoire des photons spirale de plus en plus avant de sortir. Voir figure suivante

Attention sur la figure suivante les angles de départ sont trop grands car

$$\tan\psi_{\text{fig}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \tan\psi$$

Quelques trajectoires de photon