

1 Le lagrangien d'une particule dans un champ de gravitation en RG

Les trajectoires des particules dans un champ de gravitation sont des géodésiques, c'est à dire qu'elles minimisent l'intervalle de temps propre entre deux points de l'espace temps :

$$\Delta\tau = \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x(\lambda)) \dot{x}^\mu(\lambda) \dot{x}^\nu(\lambda)} d\lambda = \int \mathcal{L}(x(\lambda), \dot{x}(\lambda)) d\lambda, \quad (1)$$

où $\dot{x} = \frac{dx(\lambda)}{d\lambda}$, et \mathcal{L} est le lagrangien (à une constante près). Je n'explicite pas les indices de x quand cela n'est pas utile.

1.1 Paramètre « affine »

Le lagrangien introduit en (1) a une caractéristique désagréable : le radical qui complique les équations de Lagrange et les rend singulières pour des trajectoires de longueur nulle correspondant aux particules de masse nulle. Cependant, \mathcal{L} a aussi propriété agréable qui permet d'arranger les choses : son homogénéité dans les dérivées. Plus précisément :

$$\mathcal{L}(x, \eta \dot{x}) = \eta^\alpha \mathcal{L}(x, \dot{x}) \text{ ou } \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \alpha \mathcal{L} \text{ avec } \alpha = 1 \quad (2)$$

Grâce à cette propriété, on va pouvoir travailler avec le Lagrangien

$$L = \frac{\mathcal{L}^2}{2} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x(\lambda)) \dot{x}^\mu(\lambda) \dot{x}^\nu(\lambda). \quad (3)$$

Grâce à la propriété d'homogénéité (2), on peut montrer que :

1. Les Lagrangiens \mathcal{L} et L sont équivalents s'ils sont constants et non nuls le long des trajectoires.
2. Étant donnée une trajectoire solution des équations de Lagrange de \mathcal{L} , il est toujours possible de changer de paramètre pour que \mathcal{L} devienne constant. Les équations de Lagrange restent vérifiées dans la nouvelle paramétrisation.
3. Le Lagrangien L est constant le long des trajectoires qui satisfont ses équations de Lagrange (à cause de la relation d'homogénéité (2) avec $\alpha = 2$).

On est donc naturellement conduit à adopter le lagrangien L . Les seules paramétrisations admissibles sont alors telles que L est constant et est donc lui même une intégrale première du mouvement. Ces paramétrisations sont appelées « affines ». Si la masse est non nulle, le paramètre affine est proportionnel au *temps propre*.

Le quadri-moment On se rappelle la définition du moment : $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}$ et on voit que

$$p^\alpha = g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} \dot{x}^\gamma = \dot{x}^\alpha. \quad (4)$$

Cette égalité est souvent prise comme définition de la paramétrisation affine. La définition relativiste de la masse :

$$p^\alpha p_\alpha = m^2 = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 2L = \left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2, \quad (5)$$

nous donne la signification du coefficient de proportionnalité entre le temps propre et le paramètre affine. Changer ce coefficient n'affecte évidemment en rien la trajectoire, ce qui traduit le principe d'équivalence : le mouvement sous l'action de la gravitation ne dépend pas de la masse.

Exercice Montrer qu'en partant du Lagrangien \mathcal{L} la relation $p^\alpha p_\alpha = \text{constante}$ est une identité qui n'apporte pas d'information. Déterminer le facteur de proportionnalité qu'il faut affecter au lagrangien \mathcal{L} pour que cette constante soit égale à m^2 .

La masse nulle . Dans ce cas, les équations de Lagrange associées à \mathcal{L} sont singulières, par contre, celles associées à L sont parfaitement régulières et permettent de définir la masse nulle comme limite $m \rightarrow 0$ de l'équation (5). Le temps propre n'existe plus, mais le paramètre affine existe toujours.

1.2 Démonstration de l'équivalence entre \mathcal{L} et L

Les équations de Lagrange s'écrivent

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \quad (6)$$

Il est facile de se convaincre que les équations de Lagrange pour \mathcal{L} et $L = \mathcal{L}^2$ sont équivalentes si \mathcal{L} est constant et non nul, en effet :

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 2\mathcal{L} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \right) - 2 \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}.$$

Il est toujours possible de trouver un paramètre λ' tel qu'avec ce paramètre \mathcal{L} soit constant, en effet

$$\mathcal{L} \left(x(\lambda'), \frac{dx(\lambda')}{d\lambda'} \right) = \mathcal{L} \left(x(\lambda), \frac{dx(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\lambda'} \right) = \frac{d\lambda}{d\lambda'} \mathcal{L} \left(x(\lambda), \frac{dx(\lambda)}{d\lambda} \right), \quad (7)$$

où l'on a utilisé la propriété d'homogénéité (2). Il suffit donc de choisir le paramètre λ' tel que

$$\frac{d\lambda'}{d\lambda} \propto \mathcal{L} \left(x(\lambda), \frac{dx(\lambda)}{d\lambda} \right), \quad (8)$$

pour que \mathcal{L} soit constant *le long de la trajectoire*. Pour un lagrangien homogène de degré 1 en \dot{x} , la trajectoire décrite dans le nouveau paramètre λ' satisfait toujours les équations de Lagrange. En effet, considérons provisoirement un lagrangien L homogène de degré α en \dot{x} , alors $\frac{\partial L}{\partial x}$ est aussi homogène de degré α en \dot{x} tandis que $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ est homogène et de degré $\alpha - 1$, et donc $(\dot{x}_\lambda = \frac{dx}{d\lambda}, \dot{x}_{\lambda'} = \frac{dx}{d\lambda'})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, \dot{x}_{\lambda'})}{\partial x} &= \frac{\partial L(x, \frac{d\lambda}{d\lambda'} \dot{x}_\lambda)}{\partial x} = \left(\frac{d\lambda}{d\lambda'} \right)^\alpha \frac{\partial L(x, \dot{x}_\lambda)}{\partial x} \text{ et} \\ \frac{\partial L(x, \dot{x}_{\lambda'})}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial L(x, \frac{d\lambda}{d\lambda'} \dot{x}_\lambda)}{\partial \dot{x}} = \left(\frac{d\lambda}{d\lambda'} \right)^{\alpha-1} \frac{\partial L(x, \dot{x}_\lambda)}{\partial \dot{x}} \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, \dot{x}_{\lambda'})}{\partial x} - \frac{d}{d\lambda'} \frac{\partial L(x, \dot{x}_{\lambda'})}{\partial \dot{x}} &= \left(\frac{d\lambda}{d\lambda'} \right)^\alpha \frac{\partial L(x, \dot{x}_\lambda)}{\partial x} - \frac{d\lambda}{d\lambda'} \frac{d}{d\lambda} \left(\left(\frac{d\lambda}{d\lambda'} \right)^{\alpha-1} \frac{\partial L(x, \dot{x}_\lambda)}{\partial \dot{x}} \right) = \\ &= \left(\frac{d\lambda}{d\lambda'} \right)^\alpha \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}_\lambda)}{\partial x} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L(x, \dot{x}_\lambda)}{\partial \dot{x}} + (\alpha - 1) \frac{d^2 \lambda}{d\lambda'^2} \frac{\partial L(x, \dot{x}_\lambda)}{\partial \dot{x}} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

L'équation montre que les équations de Lagrange sont invariantes dans un changement de paramètre arbitraire si $\alpha = 1$, ce qui est le cas pour le lagrangien d'origine \mathcal{L} , mais seulement pour des changement de paramètre linéaire si $\alpha \neq 1$ comme pour $L = \mathcal{L}^2$.

Par contre, quand $\alpha \neq 1$, on peut montrer que les équations de Lagrange entraînent que L est constant le long de trajectoires, en effet (de nouveau en utilisant la propriété d'homogénéité (2)) :

$$\frac{dL(x, \dot{x})}{d\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\lambda} \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{1}{\alpha} \left(\ddot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right),$$

et en utilisant l'équation de Lagrange : $\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$

$$\frac{dL(x, \dot{x})}{d\lambda} = \frac{1}{\alpha} \left(\ddot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial L}{\partial x} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{dL(x, \dot{x})}{d\lambda} \text{ et donc } \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{dL(x, \dot{x})}{d\lambda} = 0.$$

On voit que si $\alpha \neq 1$, le lagrangien L est constant le long des trajectoires qui satisfont les équations de Lagrange.

1.3 Retour sur le mouvement Newtonien

Dans ce cas, l'équation du mouvement est bien connue :

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\vec{F}}{m} = -\vec{\nabla}V \text{ où } V = -\frac{GM}{r} = -\frac{r_s c^2}{2r} \quad (10)$$

où V est le potentiel gravitationnel. On en déduit la conservation de l'énergie :

$$\frac{v^2}{2} + V = \text{constante} \quad (11)$$

Le Lagrangien qui correspond à l'hamiltonien (11) est

$$L_N = \frac{v^2}{2} - V \quad (12)$$

1.3.1 Potentiel central

Dans ce cas, par conservation du moment angulaire, le mouvement est plan et on peut l'étudier dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$, de plus on a une deuxième équation de conservation :

$$j = r^2 \dot{\phi} = b_0 v_0 \quad (13)$$

où b_0 et v_0 sont les conditions initiales. Pour une trajectoire hyperbolique v_0 est typiquement la vitesse très loin du centre et b_0 est le paramètre d'impact. Pour une trajectoire elliptique, il est commode de choisir des conditions initiales à un des points où le rayon r passe par un maximum $r_0 = b_0$ et v_0 est la vitesse en ce point. Dans tous les cas $r_0 > b_0$. En coordonnées polaires, l'équation (11) devient :

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + V(r) = \frac{v_0^2}{2} + V(r_0) \quad (14)$$

Pour obtenir la trajectoire on peut éliminer le temps en utilisant l'équation (13). Il est aussi commode de passer à la variable $u = \frac{1}{r}$. On obtient alors une équation sur l'angle ϕ :

$$j^2(u^2 + u'^2) = v_0^2 + 2(V(u_0) - V(u)), \quad (15)$$

où $f' = \frac{df}{d\phi}$ et $u_0 = \frac{1}{r_0}$.

Masse ponctuelle Le potentiel Newtonien d'une masse ponctuelle s'écrit :

$$V(r) = -GM u = -\frac{r_s c^2 u}{2}, \quad (16)$$

où G est la constante de Newton, M est la masse source du potentiel, $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ est le rayon de Schwarzschild associé, et c est la vitesse de la lumière. En utilisant cette forme dans (15), et après quelques manipulations algébriques simples, on obtient :

$$u'^2 + \left(u - \frac{r_s}{2b_0\beta_0^2}\right)^2 = \frac{1}{b_0^2} - u_0^2 + \left(u_0 - \frac{r_s}{2b_0\beta_0^2}\right)^2, \quad (17)$$

où $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$. La solution, bien connue, est évidente :

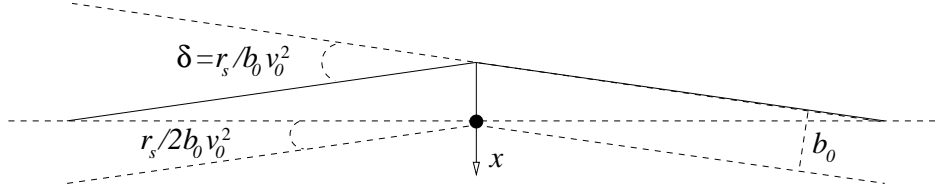
$$r = \frac{b_0}{\frac{r_s}{2b_0\beta_0^2} + \sqrt{1 - b_0^2 u_0^2 + \left(b_0 u_0 - \frac{r_s}{2b_0\beta_0^2}\right)^2} \cos(\phi - \phi_0)}. \quad (18)$$

C'est l'équation d'une conique de foyer l'origine.

Trajectoire ouverte Si v_0 est égale ou supérieure à la vitesse de libération v_L :

$$v_0^2 > v_L^2 = \frac{r_s}{r_0} c^2 = \frac{2GM}{r_0},$$

le coefficient de $\cos(\phi - \phi_0)$ est plus grand que le terme constant, le dénominateur peut s'annuler et r devenir infini, la trajectoire est une parabole ou une hyperbole. Il est alors commode de prendre comme conditions initiales la vitesse à l'infini $v_\infty = \beta_\infty c$, et le paramètre d'impact à l'infini b , et $u_0 \simeq 0$. Les directions asymptotiques sont : $\phi_\infty = \frac{\pi}{2} \pm \arctan\left(\frac{r_s}{2b\beta_\infty^2}\right)$



et la déviation de la trajectoire est l'angle entre les deux asymptotes :

$$\delta = 2 \arctan\left(\frac{r_s}{2b\beta_\infty^2}\right) \quad (19)$$

Pour un photon, $\beta_0 = 1$ et pour un paramètre d'impact grand par rapport au paramètre d'impact, on trouve la déviation Newtonienne des rayons lumineux :

$$\delta_N = 2 \arctan\left(\frac{r_s}{2b}\right) \simeq \frac{r_s}{b} \text{ quand } b \gg r_s \quad (20)$$

Pour une étoile dont la ligne de visée rase le soleil, $r_s = 2.95 \text{ km}$ et $b = r_\odot = 6.95 \cdot 10^5 \text{ km}$, la déviation Newtonienne prédite est de $0.87''$.

Trajectoire Elliptique (planètes). Si v_0 est inférieur à la vitesse de libération à r_0 , la trajectoire décrite par l'équation (18) devient une ellipse de grand axe dans la direction $\phi = \phi_0$. Il est alors commode de définir les conditions initiales les points où le rayon est maximum, alors $b_0 = r_0$. L'équation devient :

$$u^2 + \left(u - \frac{r_s}{2r_0^2\beta_0^2}\right)^2 = \left(u_0 - \frac{r_s}{2r_0^2\beta_0^2}\right)^2, \quad (21)$$

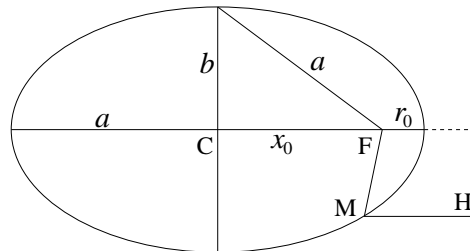
dont la solution est :

$$r = \frac{r_0}{\frac{r_s}{2r_0\beta_0^2} + \left|1 - \frac{r_s}{2r_0\beta_0^2}\right| \cos(\phi - \phi_0)} \quad (22)$$

Quelques rappels sur les paramètres d'une ellipse en équation polaire peuvent être utiles :

$$r = \frac{b^2}{a + x_0 \cos(\phi - \phi_0)}, \quad (23)$$

où a est le grand axe, b est le grand axe et $x_0 = \sqrt{a^2 - b^2}$ est la distance du foyer F au centre C . On définit aussi l'ellipticité $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{x_0}{a}$



Son équation cartésienne en prenant comme axe des x la direction du grand axe : $\phi = \phi_0$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (24)$$

Les paramètres de l'ellipse du mouvement peuvent s'écrire commodément en fonction de r_0 , v_0 , et la vitesse de libération à r_0 , $v_L = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$:

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_0}{2} \frac{v_L^2}{v_L^2 - v_0^2}, & b &= \frac{r_0 v_0}{\sqrt{v_L^2 - v_0^2}} \\ x_0 &= r_0 \frac{|v_L^2 - 2v_0^2|}{v_L^2 - v_0^2}, & e &= \frac{|v_L^2 - 2v_0^2|}{v_L^2} \end{aligned} \quad (25)$$

1.4 Champ de gravitation Relativiste statique à symétrie sphérique

Je suppose avoir démontré que l'élément de temps propre peut s'écrire (cf Weinberg page 176-177) :

$$d\tau^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (26)$$

Je veux l'écrire dans une « jauge » où apparaisse le carré de la vitesse $v^2 dt^2 = \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} dt^2 = (dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))dt^2$:

$$d\tau^2 = H(r')c^2 dt^2 - K(r')(dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)). \quad (27)$$

Pour cela, il faut faire un changement de variable tel que :

$$A(r) \left(\frac{dr}{dr'} \right)^2 = \frac{r^2}{r'^2}, \text{ ou } \sqrt{A(r)} \frac{dr}{r} = \frac{dr'}{r'} \quad (28)$$

dont la solution est

$$r' = \text{cte} \exp \left[\int \sqrt{A(r)} \frac{dr}{r} \right] \quad (29)$$

Dans le cas de la métrique de Schwarzschild,

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (30)$$

où $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ est le rayon de Schwarzschild associé à ma masse M et le potentiel de Newton est $V(r) = -\frac{c^2 r_s}{2r}$, on a (pour $r < r_s$, et en normalisant de telle sorte que $r' \sim r$ à l'infini)

$$r' = \frac{r_s}{4} \frac{\sqrt{r} + \sqrt{r - r_s}}{\sqrt{r} - \sqrt{r - r_s}} = \frac{r}{4} \left(2 - \frac{r_s}{r} + 2\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \right) \text{ et } r = r' \left(1 + \frac{r_s}{4r'} \right)^2, \quad (31)$$

ainsi que

$$H(r') = \left(\frac{1 - \frac{r_s}{4r'}}{1 + \frac{r_s}{4r'}} \right)^2 = \left(\frac{1 + \frac{V(r')}{2c^2}}{1 - \frac{V(r')}{2c^2}} \right)^2 \text{ et } K(r') = \left(1 + \frac{r_s}{4r'} \right)^4 = K(r') = \left(1 - \frac{V(r')}{2c^2} \right)^4. \quad (32)$$

1.5 Mouvement Relativiste dans un champ gravitationnel central

(Dans cette section, sauf pour les résultats numériques, j'ai pris $c = 1$.)

Dans la jauge (27), le lagrangien décrivant le mouvement d'un objet ponctuel dans un champ de Schwarzschild s'écrit :

$$2L = H(r)\dot{t}^2 - K(r)(\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)) = H(r)\dot{t}^2 - K(r)\dot{v}_\lambda^2 = m^2 \quad (33)$$

où $H(r)$ et $K(r)$ sont donnés par (32) et $\vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{dx}{d\lambda} \\ \frac{dy}{d\lambda} \\ \frac{dz}{d\lambda} \end{pmatrix}$ avec $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$. Les équations du mouvement sont :

$$\frac{d(H(r)\dot{t})}{d\lambda} = 0 \rightarrow p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = H(r)\dot{t} = E \quad (\text{Conservation de l'énergie}) \quad (34)$$

$$K(r)r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = \frac{d(K(r)r^2 \dot{\theta})}{d\lambda} \quad (35)$$

$$p_\phi = K(r)r^2 \sin \theta \dot{\phi} = \text{cte} \quad (36)$$

$$2L = \frac{E^2}{H(r)} - K(r)(\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)) = \frac{E^2}{H(r)} \left(1 - \frac{K(r)}{H(r)} \vec{v}_t^2\right) = m^2. \quad (37)$$

L'équation (34) traduit la conservation de l'énergie associée au fait qu'il est possible de choisir un système de coordonnées tel que la métrique ne dépende pas de la coordonnée temporelle. Elle entraîne que $\frac{dt}{d\lambda} \sim E$ loin du centre, quand $H(r) \rightarrow 1$.

L'équation (35) assure que le mouvement est plan : on peut choisir $\theta = \pi/2$ constant. L'équation (36), extension de la conservation du moment angulaire, s'écrit alors :

$$K(r)r^2 \dot{\phi} = E J \quad (38)$$

La normalisation de la constante est choisie pour inclure le facteur E implicite dans $\dot{\phi} = \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\phi}{dt} = \frac{E}{H} \frac{d\phi}{dt}$. Dans la dernière égalité de (37), $\vec{v}_t = \frac{d\vec{r}}{dt}$ et on a utilisé (34) pour éliminer \dot{t} . Cependant, \vec{v}_t est une vitesse dans l'espace des paramètres et n'a pas de sens physique. Pour mesurer la vitesse locale, on doit se placer dans un système inertiel local où la métrique a la forme de Minkowsky, ce qui est toujours possible localement. Ici il suffit de prendre des coordonnées qui vérifient localement

$$dt_L = \sqrt{H(r)} dt \quad \text{et} \quad d\vec{r}_L = \sqrt{K(r)} d\vec{r}.$$

Cela signifie que la vitesse physique qu'on mesure localement est :

$$\vec{v}_L = \sqrt{\frac{K(r)}{H(r)}} \vec{v}_t. \quad (39)$$

et la dernière égalité de (37) devient :

$$\frac{E^2}{H(r)} (1 - v_L^2) = m^2 \quad (40)$$

La vitesse physique locale d'une particule de masse nulle reste la vitesse de la lumière (1 dans nos unités) même dans un champ de gravitation. A la limite où la gravitation disparaît, C.A.D. $H(r) \rightarrow 1$, on retrouve la relation de la relativité restreinte entre masse et énergie.

En tenant compte de (38), l'équation (37) permet de trouver $r(\lambda)$ par quadrature :

$$\frac{E^2}{H(r)} - \left(K(r)\dot{r}^2 + \frac{E^2 J^2}{K(r)r^2} \right) = m^2, \quad (41)$$

En général on est plutôt intéressé par la forme de la trajectoire, c'est à dire $r(\phi)$, et le changement de variable est facile grâce à (38) :

$$\frac{E^2}{H(r)} - \frac{E^2 J^2}{K(r)} \left(\frac{r'^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} \right) = m^2, \quad \text{où } r' = \frac{dr}{d\phi}. \quad (42)$$

A l'ordre le plus bas, on a :

$$H(r) \simeq 1 + 2V(r) = 1 - \frac{r_s}{r} \quad \text{et} \quad K(r) \simeq 1 - 2V(r) = 1 + \frac{r_s}{r}, \quad (43)$$

et l'équation (42) devient, en revenant à la variable $u = \frac{1}{r}$

$$E^2(1 - 2V(u)) - (1 + 2V(u)) E^2 J^2(u'^2 + u^2) = m^2, \quad (44)$$

où l'on voit que même à l'ordre le plus bas la gravitation est couplée à la vitesse.

Il est commode de multiplier l'équation (44) des deux côtés par $K(r) \simeq 1 - 2V(u)$ et, en ne gardant que les termes d'ordre le plus bas, on obtient :

$$E^2 - m^2 - 2V(u)(2E^2 - m^2) - E^2 J^2(u'^2 + u^2) = 0. \quad (45)$$

Conditions Initiales Les valeurs des constantes du mouvement sont fixées par les conditions initiales que je désigne par un indice 0 ($F_0 = F(r_0)$), exprimées en utilisant la vitesse initiale mesurée localement (voir Eqs. (39) et (40)) :

$$E^2 = \frac{H_0 m^2}{1 - v_0^2} \\ J = \frac{K_0}{E} r_0^2 \dot{\phi}_0 = \frac{K_0}{E} r_0^2 \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\lambda} \Big|_0 = \frac{K_0}{H_0} r_0^2 \frac{d\phi}{dt} \Big|_0 = \frac{K_0}{H_0} b_0 v_{t0} = \sqrt{\frac{K_0}{H_0}} b_0 v_0 = \sqrt{\frac{K_0}{H_0}} j_0 \quad (46)$$

où b_0 est le paramètre d'impact et v_0 et la vitesse initiale mesurée localement et j_0 est le moment angulaire initial¹.

Limite Newtonienne. À faible vitesse, quand $v \lesssim |V(u_0)|$, autrement dit quand l'énergie cinétique est du même ordre ou plus petite que l'énergie potentielle gravitationnelle, on a $E^2 - m^2 \simeq m^2(v_0^2 + 2V)$ (comme dans la théorie Newtonienne) et $J^2 \simeq j_0^2 = b_0^2 v_0^2$. En divisant par le facteur commun m^2 , on retrouve exactement l'équation Newtonienne (15). La limite Newtonienne s'obtient si le potentiel *et* la vitesse initiale v_0 sont *tous les deux petits*, elle ne s'applique donc pas au mouvement d'un photon.

1.6 Mouvement d'un photon à l'ordre le plus bas

Pour un photon, $m^2 = 0$. En reportant dans l'équation à l'ordre le plus bas (47) et en simplifiant par E^2 , on trouve :

$$1 - 4V(u) - J^2(u'^2 + u^2) = 0 \quad (47)$$

en utilisant les conditions initiales (46), $J^2 \simeq j_0^2(1 - 4V_0)$ et en reportant dans (47) et en multipliant par $(1 - 4V_0)$ on obtient à l'ordre le plus bas

$$1 + 4(V(u_0) - V(u)) - j_0^2(u'^2 + u^2) = 0 \quad (48)$$

C'est exactement l'équation (15) pour un objet de vitesse initiale satisfait $v_0 = 1 (= c)$, mais avec un potentiel double du potentiel Newtonien. On peut interpréter ce résultat comme venant du fait que la gravité est couplée autant à l'impulsion d'une particule qu'à son énergie et que pour le photon les deux sont égaux. La conséquence est le résultat bien connu que la Gravitation Relativiste prédit une déviation des photons deux fois plus grande que la gravitation Newtonienne :

$$\delta_{RG} \simeq \frac{2r_s}{b}. \quad (49)$$

Ici seule l'expression approchée est valable, car si le rayon de Schwarzschild n'est pas petit par rapport au paramètre d'impact, la dérivation ci-dessus ne s'applique plus.

1.7 Déplacement du périhélie des planètes

On a vu que, pour des objets lents, RG et Gravité Newtonienne sont équivalents à l'ordre le plus bas. Pour obtenir le déplacement du périhélie, il va donc falloir pousser un ordre plus bas : $H = 1 + 2V + 2V^2$ et $K = 1 - 2V + o(V^2)$ ². On applique les conditions initiales (46) à un sommet de

¹En fait, b_0 et j_0 sont des paramètres et ne sont pas mesurables physiquement sans ambiguïté car il ne sont pas locaux.

²A priori, comme le terme de vitesse est d'ordre V , on peut se passer du terme en V^2 dans K , comme on va le voir.

la trajectoire, ce qui veut dire que $b_0 = r_0 = 1/u_0$. Rappelons que v_0 désigne vitesse initiale *mesurée localement*. Après simplification par m^2 , on peut récrire l'équation de la trajectoire :

$$\left(\frac{H_0}{H} - 1 + v_0^2\right) \frac{K}{K_0} = b_0^2 v_0^2 (u^2 + u'^2), \quad \text{où } F_0 \text{ désigne } F(r_0). \quad (50)$$

Comme $\frac{H_0}{H} - 1$ est d'ordre 1 en V , on vérifie bien que le développement au premier ordre de K suffit. Le développement aux deux plus bas ordres s'écrit :

$$r_0^2 v_0^2 (u^2 + u'^2) = 6V^2 - 2V(1 + v_0^2 + 6V_0) + 2V_0(1 + v_0^2 + 3V_0) + v_0^2. \quad (51)$$

En tenant compte de la relation $V^2 = r_s^2 u^2/4$ et du fait que $v_0^2 \lesssim 2V_0$ puisque la trajectoire est fermée, on obtient.

$$r_0^2 v_0^2 \left(u^2 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r_s^2}{r_0^2 v_0^2}\right) + u'^2\right) - r_s u \left(1 + v_0^2 - 3\frac{r_s}{r_0}\right) = v_0^2 - \frac{r_s}{r_0} \left(1 + v_0^2 - 3\frac{r_s}{2r_0}\right). \quad (52)$$

On peut la récrire sous une forme très voisine de l'équation Newtonienne (21) :

$$\left(1 - \frac{3}{2} \frac{r_s^2}{r_0^2 v_0^2}\right) \left(u - \frac{r_s}{2r_0^2 v_0^2} (1 + O(V_0))\right)^2 + u'^2 = \left(u_0 - \frac{r_s}{2r_0^2 v_0^2}\right)^2 (1 + O(V_0)), \quad (53)$$

où $O(V_0)$ désigne des termes constants d'ordre V_0 . On a cependant détaillé le coefficient du terme en u^2 qui est maintenant légèrement différent du terme en u^2 , ce qui veut dire que la trajectoire n'est plus une ellipse. La solution :

$$r = \frac{r_0(1 + O(V_0))}{\frac{r_s}{2r_0 v_0^2} (1 + O(V_0)) + \left|1 - \frac{r_s}{2r_0 v_0^2}\right| (1 + O(V_0)) \cos\left((\phi - \phi_0) \sqrt{1 - \frac{3r_s^2}{2r_0^2 v_0^2}}\right)} \quad (54)$$

est presque la même que l'équation Newtonienne (22). Les paramètres de l'ellipse sont modifiés par des termes constants d'ordre V_0 très petits, mais surtout, ce n'est plus tout à fait une ellipse car la période en ϕ est légèrement supérieure à 2π : le rayon ne reprend la même valeur qu'après un tour $+\delta\phi$ avec

$$\delta\phi \simeq \frac{3\pi}{2} \frac{r_s^2}{r_0^2 v_0^2} = \frac{6\pi G M}{c^2 a (1 - e^2)}, \quad (55)$$

où a est le demi grand axe et e l'excentricité de la trajectoire.

Exercice

1. Retrouver le second membre de (55) à partir des équations (25)
2. Calculer le décalage gravitationnel en " /siècle pour la Terre et Mercure, à partir de la table suivante (le rayon de Schwarzschild du soleil est 2.95 km) :

| planète | a (10 ⁶ km) | e | Masse (M_\odot) | Période (an) |
|---------|------------------------|-------|---------------------------|--------------|
| Mercure | 57.9 | 0.205 | 1/(6.01 10 ⁶) | 0.241 |
| Terre | 150 | 0.017 | 1/(3.1 10 ⁵) | 1 |

3. Évaluer l'ordre de grandeur relatif des termes $o(V_0)$ dans l'équation (54)

2 Trou noir de Schwarzschild

2.1 Retour sur la métrique de Schwarzschild

Pour comprendre ce qui se passe au voisinage d'un trou noir, il est plus commode de revenir à la métrique de Schwarzschild sous sa forme « canonique » :

$$d\tau^2 = A(r) dt^2 - \frac{dr^2}{A(r)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \text{ où } A(r) = 1 - \frac{r_s}{r} \quad (56)$$

et le lagrangien :

$$2L = A(r)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{A(r)} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2) = m^2 \quad (57)$$

Les équations du mouvement sont (toujours en se plaçant dans le plan $\theta = \pi/2$) :

$$\begin{aligned} A(r)\dot{t} &= E \\ r^2\dot{\phi} &= EJ \\ \frac{E^2}{A(r)} - \frac{\dot{r}^2}{A(r)} - \frac{E^2 J^2}{r^2} &= m^2 \end{aligned} \quad (58)$$

En prenant $m = 1$, ce qui revient à prendre le temps propre τ comme paramètre affine, on peut récrire la dernière équation :

$$\dot{r}^2 = E^2 - 1 - V_E(r) \text{ où } V_E(r) = \left\{ \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(1 + \frac{E^2 J^2}{r^2}\right) - 1 \right\} \quad (59)$$

à comparer avec l'équivalent Newtonien :

$$\dot{r}^2 = 2(E - 1) - V_N(r) \text{ où } V_N(r) = -\frac{r_s}{r} + \frac{E^2 J^2}{r^2} \quad (60)$$

Noter que $E^2 - 1 \simeq 2(E - 1)$ à la limite des faibles vitesses. La différence la plus visible sur la figure 1, est que la barrière centrifuge n'est plus absolue pour le cas relativiste.

Quel que soit le moment angulaire initial, si l'énergie est suffisante, un mobile qui part vers le centre

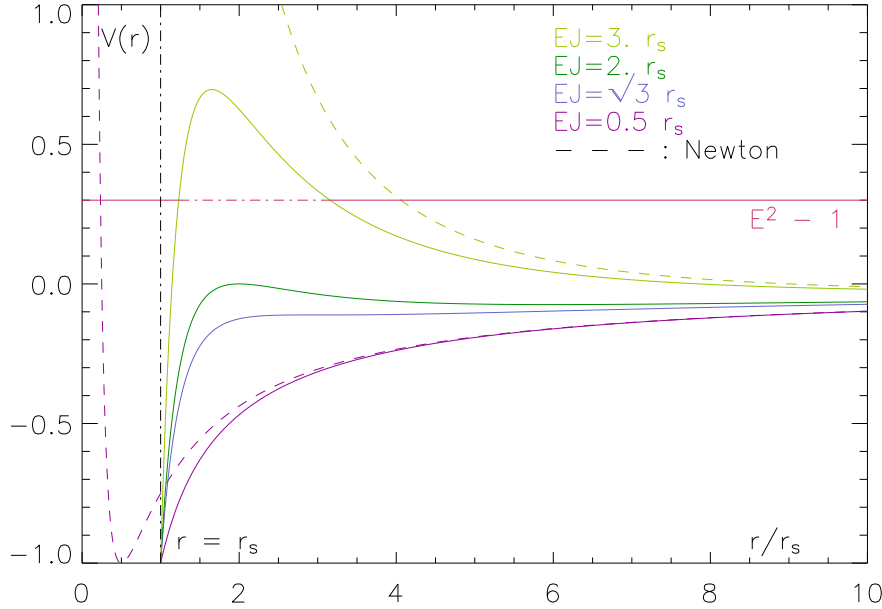


FIG. 1 – Le potentiel pour un mobile massif, pour différents moments angulaires

finira par tomber au centre du trou noir. Quelle que soit l'énergie initiale, si son moment angulaire

initiale est suffisamment petit, un mobile qui part vers le centre finira par tomber au centre du trou noir. Si le moment angulaire est insuffisant ($J < \sqrt{3}$), $V_E(r)$ n'a plus de minimum et il n'existe plus d'orbite stable.

Finalement, considérons la ligne rouge de la figure 1, tracée dans le cas où $EJ = 3$ et l'énergie ($E^2 - 1 = 0.3$) est insuffisante pour franchir la barrière centrifuge. On voit que cette barrière centrifuge joue dans les deux sens : un objet lancé vers l'extérieur d'un point situé entre l'horizon de Schwarzschild et le maximum de potentiel ne pourra pas s'échapper et retombera dans le trou noir.

Le système local Pour mieux comprendre la signification des constantes E et J , il est utile d'introduire les coordonnées locales : Un système de 4 vecteurs dans l'espace tangent e_μ tels que $e_\mu \bullet e_\nu = \eta_{\mu\nu}$, où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski. Ici un système est

$$e_t^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{A}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_r^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{A} \\ 0 \end{pmatrix}, e_\phi^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{r} \end{pmatrix} \quad (61)$$

(on a oublié e_θ car on s'est placé dans le plan $\theta = \pi/2$) Dans notre paramétrisation affine,

$$p^\alpha = \dot{x}^\alpha = \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{\sqrt{A}} \\ \dot{r} \\ \frac{EJ}{r^2} \end{pmatrix} \quad (62)$$

Comme on s'y attend, $P_0 = g_{00} p^0 = E$ est conservé et représente l'énergie totale. On peut calculer les composantes locale de l'énergie-impulsion :

$$\begin{pmatrix} p_t \\ p_r \\ p_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \bullet e_t \\ p \bullet e_r \\ p \bullet e_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{A} \dot{t} \\ \frac{\dot{r}}{\sqrt{A}} \\ r \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{\sqrt{A}} \\ \frac{\dot{r}}{\sqrt{A}} \\ \frac{EJ}{r} \end{pmatrix} \quad (63)$$

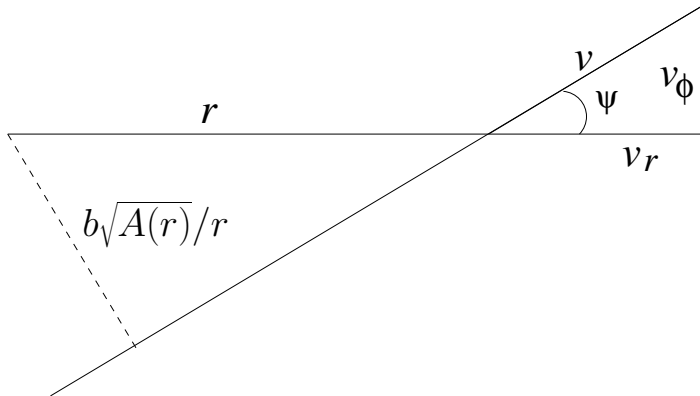
On vérifie bien que $p_t^2 - p_r^2 - p_\phi^2 = \frac{E^2}{A} - \frac{\dot{r}^2}{A} - \frac{E^2 J^2}{r^2} = m^2$ Les vitesses locales sont données par

$$\begin{pmatrix} v_{Lr} \\ v_{L\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_r}{p_t} \\ \frac{p_\phi}{p_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{r}}{\frac{E}{\sqrt{A}}} \\ \frac{\sqrt{A} r \dot{\phi}}{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{r}}{\frac{E}{\sqrt{A}}} \\ \frac{\sqrt{A} J}{r} \end{pmatrix} \quad (64)$$

On peut calculer : $v_L^2 = v_{Lr}^2 + v_{L\phi}^2 = \frac{\dot{r}^2}{E^2} + \frac{A J^2}{r^2} = 1 - \frac{m^2 A}{E^2}$ et donc

$$E^2 = \frac{m^2 A}{1 - v_L^2} \quad (65)$$

Donc la vitesse limite locale est bien la vitesse de la lumière $c = 1$. La composante temporelle locale de l'énergie impulsion, $p_t = \frac{E}{\sqrt{A}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v_L^2}}$, peut être considérée comme l'énergie non gravitationnelle.



L'angle de la vitesse dans le système local par rapport à \vec{r} est ψ , tel que

$$\sin \psi = \frac{v_{L\phi}}{v_L} \text{ et } \cos \psi = \frac{v_{Lr}}{v_L} \quad (66)$$

La relation classique entre le moment angulaire J et le paramètre d'impact $J = bv = rv_\phi$ permet de définir le paramètre d'impact à partir de la constante du mouvement J et de la vitesse locale v_L de l'équation (64) :

$$J = \frac{rv_{L\phi}}{\sqrt{A}} = bv_L. \quad (67)$$

À la limite de masse nulle, $v_L = c = 1$ et donc $J = b$. À la limite où $r \gg r_s$, on retrouve la relation classique $J = bv_L = rv_{L\phi}$.

2.2 La chute dans le trou noir

Qu'arrive-t-il à un astronaute parti vers le trou noir. Il arrive sur la surface $r = r_s$ au bout d'un temps propre fini car la dérivée par rapport au temps propre \dot{r} tend vers E , et donc n'est pas singulière. Par contre il y arrive au bout d'un temps t (À un facteur constant près le temps pour ses collègues qui attendent de ses nouvelles) infini car \dot{t} a une singularité linéaire. Ses collègues qui l'attendent constatent que ses messages radio s'espacent même si lui a l'impression d'en envoyer à fréquence constante et sont de plus en plus faibles car ils sont décalés vers le rouge.

Une fois qu'il a passé la surface de Schwarzschild, il est impossible à l'astronaute de revenir en arrière. Pourquoi? Parce que la coordonnée r est devenue la coordonnée de temps et son sens de variation ($\dot{r} < 0$) ne peut plus être inversé.

Les trous noirs provenant de l'effondrement de matière ne peuvent plus revenir en arrière. Rien ne peut en ressortir et ils finiront par s'effondrer sur leur singularité à $r = 0$

Mais on peut très bien imaginer des singularités de Schwarzschild primordiales, de source à inventer, où la flèche du temps est inversée $\dot{r} > 0$ et qui ne cesseraient de nous arroser de matière et de lumière. Mais est-ce vraiment possible, et s'ils existent les verrait-on? Je vois en effet quelques problèmes :

- La métrique de ces objets à l'extérieur de l'horizon est une métrique de Schwarzschild habituelle et donc va acréter de la matière qui aura une flèche du temps orientée $\dot{r} < 0$ en y entrant. Que donne un mélange des sens du temps?
- Les signaux émis ou les objets qui sortiraient de l'horizon devraient mettre un temps infini à nous parvenir (dans notre temps local) et les photons devraient être infiniment décalés vers le rouge, donc invisibles.

2.3 La vitesse locale à l'intérieur de l'horizon

À l'intérieur de l'horizon, Les rôles de p_t et p_r (voir Eq. (63)) sont inversés et donc la vitesse devient :

$$\begin{pmatrix} v_t \\ v_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_t}{p_r} \\ \frac{p_\phi}{p_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{\dot{r}} \\ \frac{EJ\sqrt{-A}}{r\dot{r}} \end{pmatrix}, \text{ où } A = 1 - \frac{r_s}{r} \quad (68)$$

Le carré de la vitesse devient $v^2 = 1 - \frac{m^2|A|}{\dot{r}^2}$ est bien 1 ($= c^2$ si la masse est nulle, et plus petit que 1 en général. En effet, $\dot{r}^2 > m^2|A|$ comme le montre l'équation du mouvement :

$$\dot{r}^2 = E^2 + |A| \left(m^2 + \frac{E^2 J^2}{r^2} \right), \quad (69)$$

Cela montre que dès qu'on a passé l'horizon où $|\dot{r}| = -E$, on r décroît inexorablement et de plus en plus vite vers 0.

Notons que la vitesse locale passe par $c = 1$ au moment l'on traverse l'horizon, ce qui traduit le fait qu'on ne peut plus s'arrêter.

On peut aussi noter qu'on n'a plus de relation simple telle que (65) entre l'énergie, la masse et la vitesse. Ceci est relié car E n'a plus le sens d'une énergie puisque sa conservation ne traduit plus une invariance par translation dans le temps.

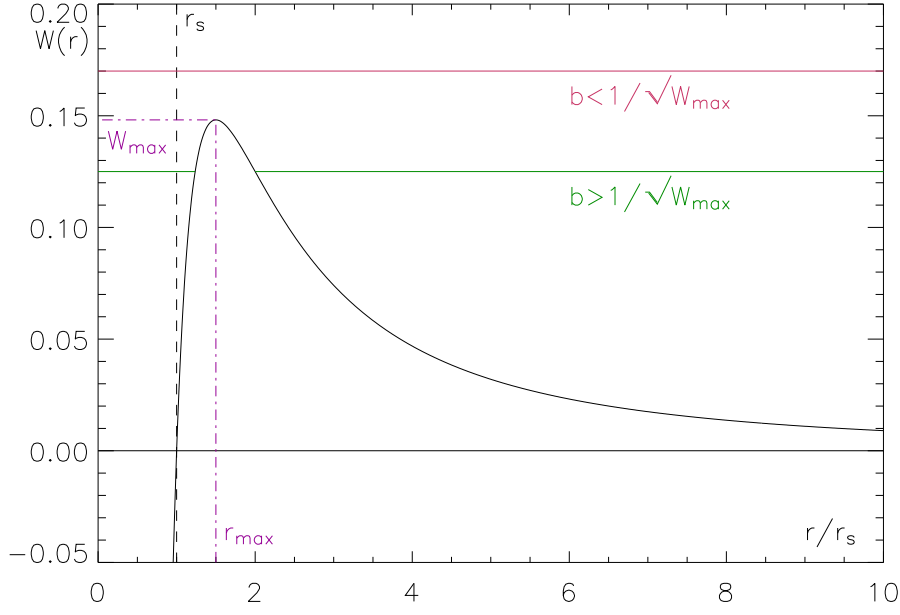


FIG. 2 – Le potentiel pour un photon

2.4 Photons près d'un trou noir

Le lagrangien est (toujours en se plaçant dans le plan $\theta = \pi/2$) :

$$2L = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2 \dot{\phi}^2 = 0 \quad (70)$$

et les autres équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} &= E \\ r^2 \dot{\phi} &= EJ \end{aligned} \quad (71)$$

Je peux choisir $E=1$ ce qui signifie que $\frac{dt}{d\lambda} \rightarrow 1$ loin du centre. D'autre part, $r^2 \dot{\phi} = J = bc$ où v est la vitesse locale et donc $v = c = 1$ et b est le paramètre d'impact.

Comme précédemment, on peut alors éliminer t et ϕ dans l'équation (70) en utilisant les constantes du mouvement (71) et aboutir à la quadrature :

$$\dot{r}^2 = 1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = 1 - b^2 W(r) \quad (72)$$

Le potentiel $W(r)$ est tracé sur la figure 2. Il a un maximum pour $r_{\max} = \frac{3r_s}{2}$ et ce maximum est $W_{\max} = \frac{4}{27r_s^2} \simeq \frac{0.15}{r_s^2}$. Tous les photons qui se dirigent vers le trou noir avec un paramètre d'impact $b < \frac{1}{\sqrt{W_{\max}}}$ sont capturés, autrement dit, la section efficace de capture des photons du trou noir nu est $\sigma = \frac{27\pi r_s^2}{4}$, soit environ 6.7 fois la section efficace géométrique de l'horizon. Les photons qui arrivent avec un paramètre d'impact $b > \frac{1}{\sqrt{W_{\max}}}$ repartent vers l'extérieur. Les photons qui partent vers l'extérieur de $r_s < r < r_{\max}$ pourront sortir seulement si $b < \frac{1}{\sqrt{W_{\max}}}$. Mais en se reportant aux équations (64) et (66) on voit que

$$\sin \psi = v_L \dot{\phi} = \frac{b}{r} \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} = b \sqrt{W(r)} \quad (73)$$

et donc seuls s'échappent les photons qui font avec le rayon sortant un angle $|\psi| < \arcsin\left(\sqrt{\frac{W(r)}{W_{\max}}}\right)$ et cet angle tend vers 0 quand $r \rightarrow r_s$. Si $r > r_{\max}$, seuls sont capturés les photons tels $|\pi - \psi| < \arcsin\left(\sqrt{\frac{W(r)}{W_{\max}}}\right)$.

Par retour inverse, on peut dire qu'un observateur situé entre r_s et r_{\max} verrait tout le ciel dans un cône de demi angle au sommet $\psi = \arcsin\left(\sqrt{\frac{W(r)}{W_{\max}}}\right)$.

2.5 Trajectoire des photons

De nouveau, on obtient la trajectoire en passant du paramètre affine λ à l'angle ϕ en utilisant la conservation du moment angulaire (71) :

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - u^2(1 - r_s u) \quad \left(u = \frac{1}{r}\right) \quad (74)$$

On a vu qu'un photon qui part de $r_s < r_0 < r_{\max}$ part dans une direction qui fait un angle ψ avec \vec{r} et que $\sin \psi_0 = bW(r_0)$. L'angle ϕ à un rayon r donné est donc

$$\phi - \phi_0 = \pm \int_{1/r}^{1/r_0} \frac{du}{\sqrt{\frac{u_0}{\sin^2 \psi_0} - u^2(1 - r_s u)}} \quad (75)$$

La valeur maximum ψ_{\max} de ψ_0 telle que le rayon s'échappe du trou noir est $\sin \psi_{\max} = \sqrt{\frac{W_0}{W_{\max}}}$. Lorsque ψ_0 s'approche de ψ_{\max} le minimum du radical à u_{\max} se rapproche de zéro et l'intégrale diverge linéairement et donc ϕ devient très grand. Autrement dit les rayon partant vers l'extérieur sous un angle proche de ψ_{\max} se mettent à spiraler de plus en plus rapidement au voisinage de r_{\max} et l'angle ψ_{\max} correspond à une spirale infinie plafonnant a r_{\max}

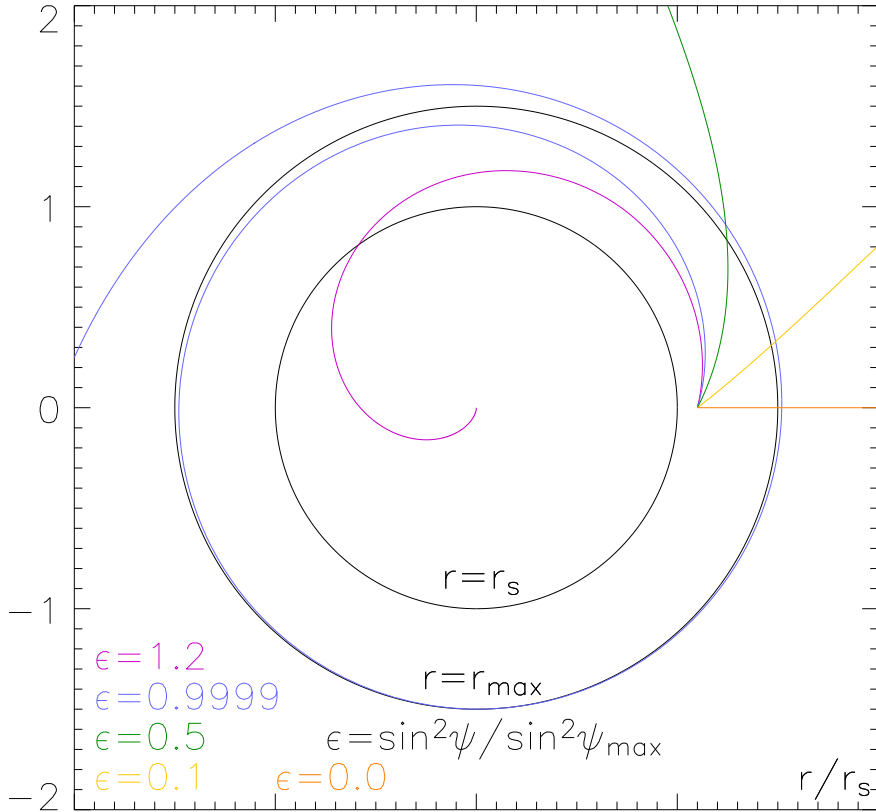


FIG. 3 – Les trajectoires de photons partant de $R_s < r_0 < r_{\max}$ pour des angles ψ variés

La figure 3 montre des trajectoires de photon, partant d'un point $r_s < r_0 < r_{\max}$, pour différentes valeurs de l'angle de départ. Cependant, il ne faut pas oublier que les angles sur la figure sont plus grand que les angles réels dans le système local, car $dr_L = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}} dr$ et donc $\tan \psi_{\text{fig}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}} \tan \psi_L$