# Règles de changement d'échelle pour les galaxies lointaines

7 octobre 2004

## 1 Règles d'échelle générales

### Masse dans un rayon $R$

Je suppose qu'une nouvelle distribution $\rho'$ est la transformée d'une distribution précédente $\rho$ par :

$$\rho'(\vec{r'}) = f^\alpha \, \rho(\vec{r} = \vec{r'}/f) \tag{1}$$

Si l'espace est à $n$ dimensions, alors en utilisant(1) :

$$M'(R') = \int^{|r|<R'} \rho'(\vec{r}) \, d^n r = f^n \int^{|u|<R'/f} \rho'(f \, \vec{u}) \, d^n u = f^{\alpha+n} \int^{|u|<R'/f} \rho(\vec{u}) \, d^n u = f^{\alpha+n} M(R = R'/f)$$

### Distribution projetée

J'appelle $g(\vec{x})$ la distribution projetée :

$$g(\vec{x}) = \int dz \, \rho(\vec{x}, \, z)$$

on a alors, en utilisant (1) :

$$g'(\vec{x'}) = \int dz \, \rho'(\vec{x'}, \, z) = f \int d\zeta \, \rho'(f \, \vec{x}, \, f \, \zeta) = f^{\alpha+1} \int d\zeta \, \rho(\vec{x}, \, \zeta) = f^{\alpha+1} \, g(\vec{x} = \vec{x'}/f)$$

**En résumé,** pour un distribution à $n$ dimensions telle que $\rho'(\vec{r'}) = f^\alpha \, \rho(r = \vec{r'}/f)$,alors :

$$M'(R') = f^{\alpha+n} M(R = R'/f) \quad \text{et} \quad g'(\vec{x}) = f^{\alpha+1} \, g(\vec{x} = \vec{x'}/f) \tag{2}$$

## 2 Eloignement d'une galaxie

### Magnitude de surface et magnitude de volume

Je prends une galaxie située à la distance $D$ et je l'envoie à une distance $D' = D/f_{\text{angl}}$. Un point situé initialement à un angle $\theta$ du centre sera vu à un angle $\theta' = f_{\text{angl}} \, \theta$. Comme la magnitude de surface en ce point ne dépend pas de la distance, on a :

$$\mu'(\theta') = \mu(\theta'/f_{\text{angl}}) \tag{3}$$

La magnitude de surface étant une distribution projetée à 2 dimensions, elle doit satisfaire l'équation (2) avec $\alpha + 1 = 0$ et la distribution de magnitude de volume, $\mu_3$ : doit obéïr l'équation :

$$10^{-0.4 \, \mu_3'(\theta', \, z')} = \frac{1}{f_{\text{angl}}} \, 10^{-0.4 \, \mu_3(\theta'/f_{\text{angl}}, \, z'/f_{\text{angl}})}$$

et donc

$$\mu_3'(\theta', \, z') = \mu_3(\theta'/f_{\text{angl}}, \, z'/f_{\text{angl}}) + 2.5 \, \log \, f_{\text{angl}} \tag{4}$$

### Distributions de masse

Si je pars d'une distribution angulaire de masse $\rho(\theta,\, z)$ et je l'envoie à la distance $D' = D/f_{\rm angl}$, le point physique situé à $\{\theta,\, z\}$ du centre passe à $\{\theta',\, z'\} = \{f_{\rm angl}\, \theta, f_{\rm angl}\; z\}$. La densité devient donc :

$$\rho'(\theta',\, z') = \text{const}\, \rho(\theta = \theta'/f_{\rm angl},\, z = z'/f_{\rm angl})$$

La constante « const » peut être évaluée en notant que la masse totale ne change pas quand on éloigne la galaxie. En utilisant les relations (2), pour des rayons angulaires homologues et $n = 3$ onobtient :

$$\text{const}\, {f_{\rm angl}}^3 = 1 \quad \text{et} \quad \rho'(\theta',\, z') = \frac{1}{{f_{\rm angl}}^3}\, \rho(\theta = \theta'/f_{\rm angl},\, z = z'/f_{\rm angl}) \tag{5}$$

Je prends la distribution de masse du bulbe égale à

$$\rho_b(\theta,\, z) = \rho_b^0\, 10^{-0.4\, \mu_3^b(\theta,\, z)}$$

si je l'envoie à la distance $D'$, il faut que je tienne compte du facteur $1/f_{\rm angl}$ déjà inclus dans la transformation de la magnitude de volume (Eq. (4)), et donc

$$\rho_b'(\theta',\, z') = {\rho'}_b^0\, 10^{-0.4\, \mu_3^b(\theta/f_{\rm angl},\, z/f_{\rm angl})} \quad \text{avec } {\rho'}_b^0 = \frac{\rho_b^0}{{f_{\rm angl}}^2} \tag{6}$$

où $z' = (D_{\rm lens} - D_{\rm centre})/D_{\rm centre}$, et$D_{\rm centre}$ est la distance qui nous sépare du centre dela galaxie éloignée.

## 3 Changement d'échelle d'une galaxie, à distance constante

Je choisis la même règle : La magnitude de surface à la distance $\theta$ du centre de la galaxie de départ est la même que celle de la nouvelle galaxie à $\theta' = f_{\rm ech}\, \theta$ :

$$\mu'(\theta') = \mu(\theta = \theta'/f_{\rm ech}).$$

comme la luminosité de surface est une densité projetée à 2 dimensions, d'après l'équation 2 $\alpha = -1$ et les densités volumiques ainsi que les masses dans un rayon $R$ donné satisfont donc, d'après l'équation (2) :

$$\rho'(\vec{r'}) = \frac{1}{f_{\rm ech}}\, \rho(\vec{r} = \vec{r'}/f_{\rm ech}) \tag{7}$$

$$M'(R') = {f_{\rm ech}}^2\, M(R = R'/f_{\rm ech}). \tag{8}$$

Si je suppose que les densités convergent, et que la nouvelle galaxie est plus (moins)massive d'un facteur $X$ que celle de départ, alors :

$$M' = {f_{\rm ech}}^2\, M \quad \text{et} \quad {f_{\rm ech}}^2 = X \tag{9}$$

### Changement d'échelle pour les vitesses

Les vitesses de rotation sont reliées aux distances au centre par

$$v'^2(r') = \frac{G\, M'(r')}{r'} = f_{\rm ech}\, \frac{G\, M(r = r'/f_{\rm ech})}{r'/f_{\rm ech}} = f_{\rm ech} v^2(r = r'/f_{\rm ech}),$$

et donc asymptotiquement,

$$v'^2 = f_{\rm ech} v^2. \tag{10}$$

Par exemple, si l'on suppose que les vitesses asymptotiques[1] pour la Voie Lactée (VL) et M31 sont 220 et 277 km/s respectivement, le facteurd'echelle de M31/VL, ${f_{\rm ech}}_{M31}$ est

$${f_{\rm ech}}_{M31} = \left(\frac{v_{M31}}{v_{VL}}\right)^2 = \left(\frac{277}{220}\right)^2 \simeq 1.59 \quad \text{et} \quad \frac{M_{M31}}{M_{VL}} \simeq 2.5$$

Si au contraire on veut que $\frac{M_{M31}}{M_{VL}}$ soit égal à deux, cela implique ${f_{\rm ech}}_{M31} = 1.4$ et $v_{M31} \simeq 260$ km/s

[1] Ou les vitesses dans la VL à $R_\odot$ et dans M31 à $f_{\rm ech}\, R_\odot$

### Changement d'échelle des paramètres du halo

Si le halo a la forme générique :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{a^2 + r^2},$$

alors, en utilisant (7)

$$\rho'(r') = \frac{\rho'_0}{a'^2 + r'^2} = \frac{1}{f_{\rm ech}}\,\rho(r'/f_{\rm ech}) = \frac{1}{f_{\rm ech}}\,\frac{\rho_0}{a^2 + (r'/f_{\rm ech})^2} = \frac{f_{\rm ech}\,\rho_0}{{f_{\rm ech}}^2\,a^2 + r'^2},$$

et donc

$$\rho'_0 = f_{\rm ech}\,\rho_0 \quad \text{et} \quad a' = f_{\rm ech}\,a \tag{11}$$

### Changementd'échelle des paramètres du bulbe

La forme de la densité du bulbe de la galaxie de départ est

$$\rho_b(r) = \rho_b^0\,10^{-0.4\,\mu_3^b(\theta,z)}. \tag{12}$$

En utilisant les équations (7)

$$\rho'_b(r') = \frac{1}{f_{\rm ech}}\,\rho_b^0\,10^{-0.4\,\mu_3^b(\theta'/f_{\rm ech},\,z'/f_{\rm ech})}$$

## 4 Dans le programme

### Les facteurs d'échelle

– `f_ech_m31` : C'est le rapport des dimensions linéaires de M31 et de la VL

$$f_{{\rm ech}M31} = \left(\frac{v_{M31}}{v_{VL}}\right)^2$$

– `f_ech_tot` C'estle facteur d'échelle angulaire total :

$$f_{{\rm ech}tot} = \frac{r_{25}}{r_{25\,M31} = 95.1'}$$

– `f_ech_angl` C'est le facteur d'échelle angulaire par rapport à M31 dûà l'éloignement :

$$f_{{\rm ech}angl} = \frac{D_{galax}}{D_{M31} = 700kpc}$$

– `f_ech_gal` C'est le facteur d'échelle physique entre la galaxie visée et la VL

$$f_{{\rm ech}gal} = \frac{f_{{\rm ech}tot}}{f_{{\rm ech}angl}}\,f_{{\rm ech}M31}$$

– `f_ech_bul` C'est le facteur d'échelle physique entre le bulbe de la galaxie visée et celui de M31. N'intervient pas forcément explicitement dans le programme.

$$f_{{\rm ech}bul} = \frac{f_{{\rm ech}tot}}{f_{{\rm ech}angl}} \tag{13}$$

### Changement d'échelle des magnitudes de surface

Toutes les fonctions magnitude de surface `amu...vis(theta)` doivent être calculées à `theta/f_ech_tot`, sans autre changement. La magnitude de volume du bulbe `amrbul_vis` doit être en plus augmentée de 2.5 log(`f_ech_tot`).

### La densité de masse du bulbe

Il faut la mettre d'abord à l'échelle, suivant l'équation (7) :

$$\rho'_b(\theta', z') = \frac{\rho_b^0}{f_{\mathrm{ech}\,bul}}\, 10^{-0.4\,\mu_3^b(\theta'/f_{\mathrm{ech}\,bul},\, z'/f_{\mathrm{ech}\,bul})}$$

Ensuite, je l'envoie à `d_galax` en utilisant les équations (5,6) :

$$\rho''_b(\theta'', z'') = \frac{1}{f_{\mathrm{ech}\,angl}^{3}} \rho'_b(\theta'/f_{\mathrm{ech}\,angl}, z'/f_{\mathrm{ech}\,angl})$$

et en tenant compte de (13), la densité du bulbe de la galaxie lointaine s'écrit :

$$\rho''_b(\theta'', z'') = \frac{\rho_b^0}{f_{\mathrm{ech}\,tot}\, f_{\mathrm{ech}\,angl}^{2}}\, 10^{-0.4\,\mu_3^b(\theta''/f_{\mathrm{ech}\,tot},\, z''/f_{\mathrm{ech}\,tot})}$$

Attention, le facteur $1/f_{\mathrm{ech}\,tot}$ est déjà inclus dans `amrbul_vis` à la distance `d_galax`.