Implémentation d'une fonction de masse en loi de puissance par morceaux

3 octobre 2005

1 Densité de masse

On suppose une fonction de densité de masse séparable :

$$\rho(\vec{x}, m) = n(\vec{x})\, m\, \frac{dP(m)}{dm} \ , \tag{1}$$

où $n(\vec{x})\, d\vec{x}$ est le nombre d'objets dans un élément de volume $d\vec{x}$ autour de $\vec{x}$ et $\frac{dP(m)}{dm}\, dm$ est la probabilité qu'un objet ait une masse m à dm près. La densité de masse $\rho(\vec{x})$ au point $\vec{x}$ est

$$\rho(\vec{x}) = n(\vec{x}) \int m\, \frac{dP(m)}{dm}\, dm = n(\vec{x}) \ < m > \ .$$

Cela signifie que dans le Montecarlo, le paramètre `AM_PAR_...` correspondant à une distribution de masse est égal à la moyenne $< m >$ pour cette distribution.

2 Loi de puissance par morceaux

On prend un exemple à deux zones, continu en m_1 :

$$\begin{aligned} m_0 \leq m < m_1 \quad & \tfrac{dP}{dm} = \tfrac{1}{\mathcal{N}\, m_1} \left(\tfrac{m}{m_1}\right)^{-\alpha_1} \\ m_1 \leq m < m_2 \quad & \tfrac{dP}{dm} = \tfrac{1}{\mathcal{N}\, m_1} \left(\tfrac{m}{m_1}\right)^{-\alpha_2} \end{aligned} \tag{2}$$

où $\mathcal{N}$ est un facteur de normalisation :

$$\mathcal{N} = \frac{1}{m_1} \left(\int_{m_0}^{m_1} dP + \int_{m_1}^{m_2} dP \right) = \frac{1}{1-\alpha_1} \left[1 - \left(\frac{m_0}{m_1}\right)^{1-\alpha_1} \right] + \frac{1}{1-\alpha_2} \left[\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1-\alpha_2} - 1 \right] \ . \tag{3}$$

Masse moyenne : La masse moyenne $< m >$, qui est le paramètre `AM_PAR_...` du Montecarlo est :

$$< m >= \frac{m_1}{\mathcal{N}} \left\{ \frac{1}{2-\alpha_1} \left[1 - \left(\frac{m_0}{m_1}\right)^{2-\alpha_1} \right] + \frac{1}{2-\alpha_2} \left[\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2-\alpha_2} - 1 \right] \right\} \ .$$

Moyenne d'ordre k : Il est utile pour certaines estimations de définir la masse moyenne d'ordre k comme :

$$< m >_k = \left(\int m^k dP \right)^{\frac{1}{k}} \ ,$$

soit ici :

$$< m >_k = m_1 \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \left\{ \frac{1}{k+1-\alpha_1} \left[1 - \left(\frac{m_0}{m_1}\right)^{k+1-\alpha_1} \right] + \frac{1}{k+1-\alpha_2} \left[\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{k+1-\alpha_2} - 1 \right] \right\} \right)^{\frac{1}{k}} \ .$$

3 Tirage en loi de puissance

On tire x uniformément, et on veut que la loi de probabilité satisfasse :

$$\frac{dP}{dm} = \frac{dP}{dx}\frac{dx}{dm} \propto m^{-\alpha} \ , \tag{4}$$

et donc

$$dx \propto m^{-\alpha} dm \qquad \Rightarrow \qquad x + \mathrm{const} \propto m^{1-\alpha} \ .$$

On va donc tirer x uniformément et poser ($\alpha \neq 1$)

$$m = (a + b\,x)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad \Leftrightarrow \qquad a + b\,x = m^{1-\alpha} \ . \tag{5}$$

Si $\alpha = 1$,

$$m = \mu\, e^{b\,x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln|\mu| + b\,x = \ln m \ . \tag{6}$$

Vérification : des équations (5) et (6), on déduit que

$$\frac{dP}{dm} \propto \frac{dx}{dm} = \frac{m^{-\alpha}}{b}(1-\alpha) \ .$$

3.1 Tirage en loi de puissance par morceaux

On tire x uniformément entre 0 et 1, dans deux régions $[0,x_1]$ et $[x_1,1]$ de tailles dans le rapport

$$\frac{x_1}{1-x_1} = \frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}_2} = \frac{(1-\alpha_2)\left[1 - \left(\frac{m_0}{m_1}\right)^{1-\alpha_1}\right]}{(1-\alpha_1)\left[\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1-\alpha_2} - 1\right]} \ ,$$

ce qui conduit à

$$x_1 = \frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2} \ . \tag{7}$$

la masse sera donnée par deux fonctions différentes dans les deux zones, mais toutes deux de la forme (5) :

$$\begin{aligned} 0 \le x < x_1 \quad & m = m_0 \left\{1 + \left[\left(\frac{m_1}{m_0}\right)^{1-\alpha_1} - 1\right]\frac{x}{x1}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \\ x_1 \le x \le 1 \quad & m = m_2 \left\{1 + \left[\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1-\alpha_2} - 1\right]\frac{1-x}{1-x1}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha_2}} \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Ces expressions satisfont $m(0) = m_0$ et $m(1) = m_2$. Si l'un des exposants, par exemple α_1 est égal à 1 le tirage devient :

$$0 \le x < x_1 \quad m = m_0 \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^{\frac{x}{x_1}} \ . \tag{9}$$

La généralisation à plusieurs morceaux est évidente.