Fluctuations du nombre de photons

8 juillet 2002

1 Fluctuation d'une distribution de bosons

On suppose que la probabilité d'occupation d'un état d'un gaz de bosons est proportionnelle à z, par exemple dans le cas d'un gaz de photons $z = e^{-\frac{h\ \nu}{k\ T}}$. La probabilité que le nombre d' occupation soit n est alors $\frac{z^n}{Z}$, où Z est la fonction de partition :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Le nombre d'occupation moyen de l'état est

$$\overline{n} = Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n\ z^n = Z^{-1}\ z\ \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{z}{1-z}$$

La moyenne du carré du nombre d'occupation est obtenue en calculant :

$$\overline{n(n-1)} = Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\ z^n = Z^{-1}\ z^2\ \frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{1-z} = 2\ \frac{z^2}{(1-z)^2} = 2\ \overline{n}^2$$

La variance du nombre d'occupation est donc :

$$\Delta n^2 = \overline{n^2} - \overline{n}^2 = \overline{n(n-1)} + \overline{n} - \overline{n}^2 = 2\ \overline{n}^2 + \overline{n} - \overline{n}^2 = \overline{n}\ (1+\overline{n}) \tag{1}$$

S'il y a g modes, statistiquement indépendants, le nombre total de bosons est $N = g\ \overline{n}$ et la variance (Lamarre, 1986) :

$$\Delta N^2 = \sum_{\text{modes}} \Delta n^2 = g\ \Delta n^2 = g\ \overline{n}(1+\overline{n}) = N\ \left(1 + \frac{N}{g}\right) \tag{2}$$

1.1 Introduction d'une efficacité de détection

Supposons une efficacité de détection η, ce qui revient à dire que chaque boson a une probabilité η d'être détecté, la probabilité de détecter q bosons est :

$$p(q) = Z^{-1} \sum_{n=q}^{\infty} z^n \eta^q (1-\eta)^{n-q} \frac{n!}{q!(n-q)!}$$

le nombre moyen de photon détecté par état est ($r = q - 1$) :

$$\overline{q} = Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{q=0}^{n} q\ \eta^q (1-\eta)^{n-q} \frac{n!}{q!(n-q)!} = Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n n\ \eta \sum_{r=0}^{n-1} \eta^r (1-\eta)^{n-1-r} \frac{n-1!}{r!(n-1-r)!},$$

soit

$$\overline{q} = \eta\ Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n n = \eta\ \overline{n}.$$

De même (ici, $r = q - 2$) :

$$\overline{q(q-1)} = Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{q=0}^{n} q(q-1)\ \eta^q (1-\eta)^{n-q} \frac{n!}{q!(n-q)!} = Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n n(n-1)\ \eta^2 \sum_{r=0}^{n-2} \eta^r (1-\eta)^{n-2-r} \frac{n-2!}{r!(n-2-r)!},$$

soit

$$\overline{q(q-1)} = \eta^2\ Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n n(n-1) = \eta^2\ \overline{n(n-1)}.$$

La variance de q est donc :

$$\overline{q^2} - \overline{q}^2 = \overline{q(q-1)} + \overline{q} - \overline{q}^2 = \eta^2\ \overline{n(n-1)} + \eta\ \overline{n} - \eta^2\ \overline{n}^2 = \eta^2\ (\overline{n^2} - \overline{n}^2) + \overline{n}\ \eta(1-\eta),$$

et en utilisant (1),

$$\Delta q^2 = \eta^2\ \overline{n}(1+\overline{n}) + \overline{n}\ \eta(1-\eta) = \eta\ \overline{n}(1+\eta\ \overline{n}).$$

La quantité $\eta\ \overline{n}$ se comporte comme un nombre d'occupation effectif détecté. Si le nombre d'états est g, le nombre moyen de bosons détectés est $N = g\ \eta\ \overline{n}$ et la variance de N est (toujours en supposons les différents modes indépendants)

$$\Delta N^2 = \sum_{\text{modes}} \Delta q^2 = g\ \Delta q^2 = g\ \eta\ \overline{n}(1+\eta\ \overline{n}) = N\left(1+\frac{N}{g}\right),$$

comme dans l'équation (2).

C'est seulement lorsque N/g est petit que l'on retombe sur un bruit poissonnien.

Évaluation du facteur g

Le facteur g est le nombre d'états quantiques dans les conditions d'observation. Il s'écrit :

$$g = 2\ c\ \Delta t\ dS\ \frac{p^2\ dp\ d\Omega}{h^3} = 2\ c\ \Delta t\ \frac{1}{\lambda^3} \frac{d\lambda}{\lambda}\ d\Omega\ dS, \tag{3}$$

où $\Delta t, dS$ et $d\Omega$ sont la durée, la surface et l'angle solide de l'observation. $c\,\Delta t\,dS$ est le facteur de volume.

En récrivant g sous la forme :

$$g = 2\ \frac{d\lambda}{\lambda}\ \frac{c\ \Delta t}{\lambda}\ \frac{dS_r \times d\Omega_r}{\lambda^2}, \tag{4}$$

On voit que g est petit et donc le bruit cesse d'être poissonnien g lorsque le rayonnement est presque monochromatique (premier facteur de l'Eq. (4)), et/ou cohérent dans le temps (second facteur de l'Eq. (4)) et/ou dans l'espace (troisième facteur de l'Eq. (4))

2 Observations typiques

Observations CCD dans le visible

$$
\begin{array}{c}
\lambda \sim 0.5\,\mu = .5\,10^{-6}\,\mathrm{m} \\
\Delta t \sim 5\,\mathrm{mn} = 300\,\mathrm{s} \\
dS_r \sim \pi \times 1\,\mathrm{m}^2 \\
d\Omega_r \sim 1\,\mathrm{arcsec}^2 = 0.2510^{-10}\,\mathrm{radian}^2
\end{array}, \tag{5}
$$

et

$$
g \simeq 10^{21}\,\frac{d\lambda}{\lambda} \text{ and } \Delta N^2 \simeq N, \tag{6}
$$

car $N\ 10^4$ est au plus de l'ordre de 10^5.

Observations du CMB. Dans ce cas, on connaît $\bar{n}$ et donc on peut évaluer le terme correctif, à l'efficacité de détection η près.

$$
\Delta N^2 \simeq N(1 + \eta\,\bar{n}) \tag{7}
$$

où $\bar{n}$ figure dans la table suivante pour quelque valeurs typiques des fréquences

ν (GHz)	30	50	100	143	256
λ (mm)	10	6	3	2.1	1.2
$\bar{n}$	1.44	0.71	0.21	0.09	0.01

On voit que pour des fréquences plus grandes que 250 GHz, on peut considérer le bruit de photons comme poissonnien.

References

Lamarre, J.-M. : 1986, *Applied Optics* **25/6**, 870