Calcul de la distance angulaire entre 2 points du ciel.

Jean Kaplan

Juillet 2002

Je veux calculer la distance entre 2 points de ra,dec (en radians) ϕ_i et δ_i les coordonnes des 2 points 1 et 2 sur la sphère unité sont :

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 & = & \cos\delta_1 \cos\phi_1 \\ y_1 & = & \cos\delta_1 \sin\phi_1 \\ z_1 & = & \sin\delta_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 & = & \cos\delta_2 \cos\phi_2 \\ y_2 & = & \cos\delta_2 \sin\phi_2 \\ z_2 & = & \sin\delta_2 \end{pmatrix}.$$

La distance angulaire est calculée comme : $\mathrm{dist}_{1,2} = \arcsin(|\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}|)$

Calcul du module du produit vectoriel.

$$\begin{aligned}
|x_1y_2 - x_2y_1|^2 &= (\cos\delta_1\cos\delta_2)^2 (\cos\phi_1\sin\phi_2 - \sin\phi_1\cos\phi_2)^2 = (\cos\delta_1\cos\delta_2\sin(\phi_2-\phi_1))^2 \\
|x_1z_2 - x_2z_1|^2 &= (\cos\delta_1\sin\delta_2\cos\phi_1 - \cos\delta_2\sin\delta_1\cos\phi_2)^2 \\
&= (\cos\delta_1\sin\delta_2\cos\phi_1)^2 + (\cos\delta_2\sin\delta_1\cos\phi_2)^2 - 2\cos\delta_1\sin\delta_2\cos\delta_2\sin\delta_1\cos\phi_1\cos\phi_2 \\
|y_1z_2 - y_2z_1|^2 &= (\cos\delta_1\sin\delta_2\sin\phi_1 - \cos\delta_2\sin\delta_1\sin\phi_2)^2 \\
&= (\cos\delta_1\sin\delta_2\sin\phi_1)^2 + (\cos\delta_2\sin\delta_1\sin\phi_2)^2 - 2\cos\delta_1\sin\delta_2\cos\delta_2\sin\delta_1\sin\phi_1\sin\phi_2
\end{aligned}$$

$|\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}|^2 = (\cos\delta_1\cos\delta_2\sin(\phi_2-\phi_1))^2 + (\cos\delta_1\sin\delta_2)^2 + (\cos\delta_2\sin\delta_1)^2 - 2\cos\delta_1\sin\delta_2\cos\delta_2\sin\delta_1\cos(\phi_2-\phi_1)$, et finalement :

$$\mathrm{dist}_{1,2} = \arcsin\sqrt{\sin^2(\delta_2-\delta_1) + (\cos\delta_1\cos\delta_2\sin(\phi_2-\phi_1))^2 + 4\cos\delta_1\cos\delta_2\sin\delta_1\sin\delta_2\sin^2\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\right)},$$

qui peut être aussi écrit :

$$\mathrm{dist}_{1,2} = \arcsin\sqrt{\sin^2(\delta_2-\delta_1) + 4\cos\delta_1\cos\delta_2\sin^2\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\right)\left[\cos(\delta_1-\delta_2) - \cos\delta_1\cos\delta_2\sin^2\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\right)\right]}.$$

On peut vérifier que :

1. Si $\phi_1 = \phi_2$, $\mathrm{dist}_{1,2} \equiv |\delta_2 - \delta_1|$, car on suit un grand cercle de la sphère.
2. Quand $\delta_1 = \delta_2$, $\mathrm{dist}_{1,2} \simeq |\cos\delta \times (\phi_2 - \phi_1)|$ lorsque $|\phi_2 - \phi_1|$ est petit. Ici, la relation n'est qu'approchée car les cercles $\delta =$ constante ne sont pas des grands cercles. Comme $\arcsin(x) > \arcsin(2\sin x/2)$, on vérifie aussi que la vraie distance angulaire est plus courte que la distance angulaire le long d'un cercle $\delta =$ constante.