Détermination «optimale» des coefficients d'intercalibration pour un PSB ou un OMT

18 juin 2001

1 Traitement général

On utilise des données qu'on peut supposer non polarisées. À un coefficient de calibration global près, les signaux des deux bolomètres peuvent être écrits (en négligeant pour l'instant la polarisation croisée) :

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha \ \tfrac{I+Q}{2} \\ S_2 &= (1-\alpha)\tfrac{I-Q}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Le but du jeu est de déterminer le coefficient d'intercalibration α en supposant les données ne sont pas polarisées. Supposons qu'on dispose de deux séries temporelles de données correspondant aux signaux des deux polariseurs, alors le meilleur estimateur de α est déterminé en minimisant le suivant qui suppose les données non polarisées ($Q = 0$) :

$$\chi 2 = \sum_t \frac{(S_1(t) - \alpha I(t))^2}{\sigma_1(t)^2} + \frac{(S_2(t) - (1-\alpha)I(t))^2}{\sigma_2(t)^2} \tag{2}$$

où t désigne une série discrète de temps.

En minimisant le χ^2 par rapport à α et I, on obtient :

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \alpha} = -\sum_t I(t)\frac{S_1(t) - \alpha I(t))}{\sigma_1(t)^2} + I(t)\frac{S_2(t) - (1-\alpha))}{\sigma_2(t)^2} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial I(t)} = -\left[\alpha\frac{S_1(t) - \alpha I(t))}{\sigma_1(t)^2} + (1-\alpha)\frac{S_2(t) - (1-\alpha)I(t))}{\sigma_2(t)^2}\right] = 0 \tag{4}$$

De l'équation (4), ont peut tirer $I(t)$:

$$I(t) = \frac{\alpha\sigma_2(t)^2 S_1(t) + (1-\alpha)\sigma_1(t)^2 S_2(t)}{\alpha^2\sigma_2(t)^2 + (1-\alpha)^2\sigma_1(t)^2} \tag{5}$$

En reportant dans l'équation (3), on peut éliminer $I(t)$ et obtenir une équation qui donne α en fonction des données.

$$\sum_t \frac{\alpha^2\left[\sigma_2^2 S_1^2 - \sigma_1^2 S_2^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)S_1S_2\right] + \alpha\left[2\sigma_1^2 S_1 S_2 - (\sigma_2^2 S_1^2 - \sigma_1^2 S_2^2)\right] - \sigma_1^2 S_1 S_2}{\left[\alpha^2\sigma_2^2 + (1-\alpha)^2\sigma_1^2)\right]^2}(t) = 0 \tag{6}$$

En général les quantités σ_i et S_i dépendent de t et cette équation ne peut pas être simplifiée. Il vaut alors mieux minimiser le χ^2 de l'équation (2) numériquement. Cependant, si l'on peut supposer que dans tout l'intervalle de temps où l'on travaille, les bruits sur les deux détecteurs varient avec le temps en gardant un rapport constant : $\sigma_2^2(t) = (1+\eta)\sigma_1^2(t)$, alors on peut factoriser σ_1^2 dans le dénominateur pour obtenir une équation du second degré :

$$\alpha^2\left[(1+\eta)\overline{S_1^2} - \overline{S_2^2} + \eta\overline{S_1S_2}\right] + \alpha\left[2\overline{S_1S_2} - ((1+\eta)\overline{S_1^2} - \sigma_1^2\overline{S_2^2})\right] - \overline{S_1S_2} \tag{7}$$

où $\overline{f} = \frac{\sum_t f(t)/\sigma_1^2}{\sum_t 1/\sigma_1^2}$ est la valeur moyenne de $f(t)$ sur l'intervalle de temps T considéré.

On peut définir $\epsilon = \frac{(1+\eta)\overline{S_1^2} - \overline{S_2^2}}{\overline{S_1S_2}}$ et l'équation (7) devient :

$$(\epsilon + \eta)\alpha^2 + (2-\epsilon)\alpha - 1 = 0 \tag{8}$$

qui admet toujours une seule solution comprise entre 0 et 1 (notons que $1+\eta = \sigma_2^2/\sigma_1^2 > 0$) :

$$\alpha = \frac{2}{2-\epsilon+\sqrt{4(1+\eta)+\epsilon^2}} \tag{9}$$

On peut vérifier que ces équations sont invariantes dans l'échange :

$$1 \longleftrightarrow 2,\ \alpha \longleftrightarrow 1-\alpha \tag{10}$$